தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை—59

புள்ளியியல் முறைகள்

பாகம் I

(STATISTICAL METHODS)

(PART I)

ஆசிரியர்
எஃப். சி. மில்ஸ்

தமிழாக்கம்
கோ. சண்முகசுந்தரம், எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி.,
கணிதப் பேராசிரியர்
G. T. N. கலைக் கல்லூரி, திண்டுக்கல்



தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்
தமிழ்நாடு - அரசாங்கம்

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை—59

புள்ளியியல் முறைகள்

பாகம் I

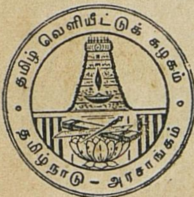
(STATISTICAL METHODS)

(PART I)



ஆசிரியர்
எஃப். சி. மில்ஸ்

தமிழாக்கம்
கோ. சண்முகசுந்தரம், எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி.,
கணிதப் பேராசிரியர்
G. T. N. கலைக் கல்லூரி, திண்டுக்கல்



தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழ்நாடு - அரசாங்கம்

First Edition—December, 1964

B.T.P. No. 59.

STATISTICAL METHODS

F. C. MILLS

Translation

G. SHANMUGASUNDARAM, M.A., M.SC.

Price Rs. 10-00

This translation of Statistical Methods by F. C. Mills, Third Edition is published by arrangements with Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York.

Printed by
Muthukumaran Press,
14-A, Kuppier Street, Madras.

அணிந்துரை

(திரு. எம். பக்தவத்ஸலம், தமிழக முதலமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி நான்கு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பீ.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வருகின்றனர். தொடக்கத்தில் இருந்த இடர்ப்பாடுகள் மெல்ல மெல்ல மறைந்துவருகின்றன. நாடு முழுதும் பரந்துள்ள மாணவர்களின் ஆர்வம், 'தமிழிலேயே கற்பிப்போம்' என முன்வந்துள்ள கல்வி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே திருப்திகரமாக நடைபெற்று வருகிறது.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், புவியியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், தத்துவம் ஆகிய பல துறைகளில் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **புள்ளியியல் முறைகள்–I** என்ற இந்நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் **59**ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **94** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

கணக்கிலடங்காத் தடைகளை எல்லாம் அகற்றித் தமிழன்னை கல்லூரிக் கலையாசனத்தில் அமர்ந்துள்ளாள். எனவே, இவ் அன்னையை வாழ்த்துவோமாக! உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். சென்னைப் பல்கலைக் கழகத்தின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

எம். பக்தவத்ஸலம்

மூன்றும் பதிப்பின் முன்னுரை

சமூக அறிவியல் அறிஞர்களின் ஆராய்ச்சிகளிலும் தனியார் துறை, பொதுத்துறை ஆளுநர்களது ஆட்சிகளிலும் நவீனப் புள்ளியியல் முறைகள் ஊடுருவி நிற்கின்றன. 'புள்ளியியல்' என்றால் 'நாட்டு மக்களின் நிலையைக் குறித்துத் தொகுக்கப்பட்ட விவரங்கள்' என்பது நமது மூதாதையர் எண்ணம். நமது காலத்திலோ, அன்றாட மனித வாழ்வில் எதிர்ப்படும் தெளிவற்ற நிலைகளை ஆய்வதற்கும் அறிவு வளர்ச்சிக்கும் வேண்டிய கோட்பாடுகளையும் செயல்முறைகளையும் உள்ளடக்கிய ஒரு பேரியலாகப் புள்ளியியல் வளர்ந்து விட்டது. இந்த முறையான வரைமுறைப்படுத்திய வளர்ச்சி பல நூற்றாண்டுகளாகப் படிப்படியாக நிகழ்ந்தது என்றாலும், கடந்த பத்தாண்டுகளில் இந்த வளர்ச்சி விரைந்து நிகழ்ந்தது.

1938-ல் இந்த நூலின் இரண்டாவது பதிப்பு வெளியானபோது முன்னுரையில் நான் எழுதினேன். 'போருக்குப் பிற்பட்ட காலத்தில் தீவிரமாகப் புதிய கண்டுபிடிப்புகளைக் காணும் ஒரு முனைப்பைக் கண்டோம். இதேபோன்றதொரு காலகட்டத்தில், முன்பு கார்ல் பியர்சனும் அவரது துணைவர்களும் செய்த அரிய ஆராய்ச்சிகளைப் போல இக் காலத்திலும் புதியது படைக்கும் பாங்கு காணப்படுகிறது. அளவின விவரங்களை ஆராயும் முறைகள் பண்படுத்தப்படுகின்றன ......; புள்ளியியல் சோதனைகளை வடிவ அமைப்புத் தந்து உருவாக்கவும், எடுகோள்களைப் புனைந்து சோதனை செய்யவும் செயல்முறைகள் சீர்திருத்தப்படுகின்றன; புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுகள் மிகவும் உறுதியான அடிப்படையின்மேலே நிறுவப்படுகின்றன.' இதே முன்னேற்றம் 1938-க்குப் பிறகும் தங்குதடையின்றி வளர்ந்து வந்திருக்கிறது. புள்ளியியலின் கணித அடிப்படையும் ஏரண அடிப்படையும் உறுதியாக்கப்பட்டன; விரிவாக்கப்பட்டன. புள்ளியியல் ஆய்வுச் சாதனங்கள் கூரியதாய் ஆக்கப்பட்டுள்ளன. இதே வளர்ச்சி இன்னும் தளராது நடைபெற்றுக்கொண்டேயிருக்கிறது.

சமுதாய இயல்களிலும், வணிக நிருவாகம், அரசாட்சி ஆகிய துறைகளிலும் புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்துவதில் அண்மைக் காலத்தில் ஏற்பட்ட முன்னேற்றங்களை மனத்தில் கொண்டே 'புள்ளியியல் முறைகள்' என்ற இந் நூலின் மூன்றும் பதிப்பினை உருவாக்கினேன். ஆய்வுகளிலும் நிருவாகத்திலும் புள்ளியியல் பயனுவதைக் குறித்த அண்மைக் காலத்திய எடுத்துக் காட்டுகளை இதில் சேர்த்தேன். புள்ளியியல் ஆராய்ச்சிப் பணி

புரிபவருக்குப் பயன்படும் வகையிலும், நவீன புள்ளியியல் செயல் முறைகளையும் கோட்பாடுகளையும் கற்பிப்பதற்கு நன்கு பயன்படும் வகையிலும் இதனை அமைக்க முயன்றுள்ளேன். இந் நூலின் துவக்கப் பகுதியின் (அத்தியாயங்கள் 2—5) கட்டுக்கோப்பை ஒரு சிறிதே மாற்றியுள்ளேன்; பிற்பகுதிகள் கிட்டத்தட்ட திரும்ப எழுதப் பட்டனவே. முந்திய பதிப்புகளில் இல்லாத புதிய தலைப்புகளில் புதிய பகுதிகள் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

இந்தப் பதிப்புகளில் செய்யப்பட்டுள்ள மாற்றங்களில் முக்கிய மானது, புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுபற்றி முன்னரே அறிமுகப் படுத்துவது; 6ஆவது அத்தியாயத்திலேயே இதற்கு அடிப்படை போட்டுவிடுகிறோம்; அடுத்த இரண்டு அத்தியாயங்களிலும் மாதிரி அளவைகளைக்கொண்டு பொதுமைப்படுத்தும் செயல்முறைகளைப் பற்றியும் எடுகோள்களைச் சோதனை செய்வதுபற்றியும் விரிவாகக் கூறப்படுகின்றன; தொடரும் அத்தியாயங்களில் இவை மேலும் விரிவுபடுத்தப்படுகின்றன. உய்த்துணர்வுபற்றி இத்துணை வலியுறுத்திக் கூறுவது ஏரண ரீதியிலும் மேலும் கற்பிக்கும் முறையிலும் அவசியமானதே. நவீன புள்ளியியலின் உயிர்நாடியே உய்த்துணர்வு முறைகள்தாம். இம் முறைகளின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகளே புள்ளியியல் செயல்முறைகள்பற்றிய விளக்கங்களைத் தொடர்புபடுத்துகின்றன. அன்றியும் புள்ளியியலின் இந்தப் பண்புதான் மாணவர் சிந்தனையை எழுப்பிவிடும். புள்ளியியலைப் பாடம் சொல்லுகையில் புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுக் கோட்பாடுகளை விளக்குவதால் சாதாரணமானதோர் இயல் எனும் நிலைமாறி, சுவை யுடைய பாடமாக மாணவருக்குத் தோன்றும். புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுபற்றித் திறம்பட அறிமுகப்படுத்தப்பட்டால், மாணவர் அறிவியல் முறைகளின் வரையறைகளைப்பற்றிய உணர்வும், ஏரண நூல் நியதிகளைப் பயன்படுத்துவதில் அனுபவமும் தெளிவும் பெறுவர். இதனைத் தொடக்கத்திலேயே அறிமுகப்படுத்தவேண்டும்; இதுவே புள்ளியியலில் பிற தலைப்புகளை ஒன்றோடொன்று இணைக்கும் சரடு என நான் நம்புகிறேன்.

தொழில் வளர்ச்சி மிகுந்த இக்காலத்துக்குத் தனிச் சிறப்புடைய பகுதியாக உற்பத்தித் திறன் மாற்றங்களை அளப்பது குறித்துக் குறியீட்டு எண்கள்பற்றிய அத்தியாயங்களில் ஒரு புதிய பகுதி சேர்க்கப்பட்டுள்ளது. மரபு ஆய்வு முறைகளைப்பற்றிய விளக்கத் தோடு, நேஷனல் பீரோ ஆஃப் எகனமிக் ரிசர்ச் (National Bureau of Economic Research) வாணிகச் சுழற்சிகள்பற்றிய ஆய்வில் வெற்றிகரமாகக் கையாண்டுள்ள புது உத்திகளைக்குறித்தும் காலத் தொடர்வரிசைபற்றிய பகுதியில் தந்துள்ளோம். கடைசி

அத்தியாயம், மாதிரி ஆய்வுகள்பற்றியது—இஃது ஒரு புதிய வளமான துறை.

இந்த இயலின் கருத்துகளை வகைப்படுத்தி வெளியிடுகையில் இரண்டு நோக்கங்களை மனத்தில் கொண்டேன். இயற்கணிதமும் ஆய கணிதமும்மட்டும் ஓரளவு அறிந்த—கணிதப் புலமை பெருதார்க்கும் புரியும்படியாக விளக்கம்தர முயன்றேன். குறிப்பிட்ட செயல்முறைகளுக்கு அடிப்படையாக அமைந்த கோட்பாடுகளின் தன்மையையும் செயல்முறைகளின் ஏரண விளக்கத்தையும் தந்துள்ளேன்; இவற்றுக்கான தேற்றங்களின் கணித நிரூபணங்களைத் தரவில்லை. ஸர் ஆர். ஃபிஷர் (Sir R. Fisher) குறிப்பிட்டிருப்பதுபோல 'இஃது ஒரு தொழில்நுட்பக் கூட்டுறவு யுகம்'. புள்ளியியல் கருவிகளை உருவாக்குவோருக்கும், குறிப்பிட்ட துறைகளிலும் ஆட்சியிலும் இக் கருவிகளைப் பயன்படுத்துவோருக்கும், மாணவருக்கும் இதன் வளர்ச்சியிலே பங்குண்டு. இந்த நூல், கருவிகளைப் பயன்படுத்துவோரை மனத்தில்கொண்டு உருவாக்கப்பட்டது. குறிப்பிட்ட செயல்முறைகள் எந்தப் புனைவுகளின் வலுவில் அமைந்துள்ளன; குறிப்பிட்ட கருவிகளின் வரையறைகள் என்ன; இவற்றைக் கருவிகளைப் பயன்படுத்துவோர் அறியவேண்டியது அவசியம். இந்தப் புனைவுகளையும் வரையறைகளையும் தெளிவுபடுத்த முயன்றுள்ளேன்.

புள்ளியியல் முறைகளை முறையாகக் கோவைப்படுத்தித் தருவது எனது இரண்டாவது நோக்கம். மனிதர்கள், பொருள்கள், நிகழ்ச்சிகள் ஆகியவற்றின் உலகங்களிலே ஒருமித்த பண்பு ஒன்றை ஆதாரமாகக் கொண்டு புள்ளியியல் முறைகள் ஆராய முற்படுகின்றன; பல்துறைப் பிரச்சினைகளை ஒரே மையத் தொகுப்பான கோட்பாடுகளைக்கொண்டு திட்டப்படுத்துகின்றன. தொடர்பற்ற செயல்முறைகளின் திரட்டாகப் புள்ளியியலைக் கருதுவோமானால், அதன் சிறப்பை அறியத் தவறியவர்களாவோம். இந்நூல் முழுவதையும் ஒரே தொடராகக் கோவைப்படுத்துவதில் நான் வெற்றி கண்டுவிட்டேன் என நம்புகிறேன்.

புள்ளிவிவரக் கோட்பாடுகளை வகைபடுத்திக் கூற இஃது ஒன்றே முறை என்பது இதன் பொருளன்று. இதில் கண்ட செய்திகளை விரித்தும் முறைமாற்றியும், சில பகுதிகளையும் பிற்சேர்க்கைகளையும் தேர்ந்தெடுத்துத் தொகுத்துச் சுருக்கமாகவும் தம் கருத்துக்கேற்பவும் ஆசிரியர் பாடம் சொல்லலாம். முன்பே நான் குறிப்பிட்டதுபோல வருணனைச் செயல்முறைகள் சிலவற்றைச் சொல்லிவிட்டு, புள்ளிவிவர உய்த்துணர்வு முறைகளை மாணவருக்கு அறிமுகப்படுத்துவதே உகந்தது என்று நான் நம்புகிறேன். அதற்குப் பின்னர், மாணவர்களின் தொகுதிக்கேற்ப அவரவர்களுக்குத் தேவைப்

படுகின்ற பல்வேறு செயல்முறைகளையும் புள்ளியியலின் பயன்களையும் தேர்ந்து கூறலாம். தலைப்புகளின் வரிசையிலோ பாடம் சொல்லும் அளவிலோ மாற்றங்கள் செய்வதால், புள்ளியியல் ஆய்வுக் கோட்பாடுகளை விளக்குவதன் தொடர்ச்சி கெடப் போவதில்லை.

ஒவ்வோர் அத்தியாயத்தின் இறுதியிலும் தரப்பட்டுள்ள துணை நூல் பட்டியல் பல நிலையிலுமுள்ள மாணவருக்கு அவர்தம் ஈடுபாட்டுக்கேற்பப் பயன்படும் வகையில் அமைக்கப்பட்டவை. துவக்கநிலை நூல்கள், இடைநிலை நூல்கள், புள்ளியியலின் கணித அடிப்படையை விவரிக்கும் பெருநூல்கள்—இப்படிப் பல்வகை நூல்களையும் துணை நூல் பட்டியலில் காணலாம். சில பட்டியல்களில் தனிச் சிறப்புடைய மூலக் கட்டுரைகளும், குறிப்பிட்ட துறைகளில் பயன்படும் முறைகள் பற்றிய விளக்கமாக அமைந்த ஆராய்ச்சித் தாள்களும் துணைநூல்களாகக் குறிப்பிடப்பட்டிருக்கின்றன.

இந்த நூலை எழுதுவதற்காக, பொதுவாகவும் குறிப்பாகவும் நான் கொண்ட நன்றிக்கடன் பெரிது. பல ஆண்டுகளாக, பலர் வளர்த்த அறிவின் துணைகொண்டே, இத்தகைய நூலை எழுதமுடியும்; இவர்களுக்கெல்லாம் நான் பெரிதும் கடன்பட்டிருக்கின்றேன்; இவர்களுக்கு நன்றி செலுத்துவதில் மிகவும் மகிழ்ச்சியடைகிறேன். வேண்டிய புள்ளிவிவரங்களையும் செயல்முறைக் குறிப்புகளையும் மனமுவந்து கொடுத்துதவிய பொது, அரசியல் நிறுவனங்களுக்கு நான் நன்றியுடையேன்; குறிப்பாக, அமெரிக்கன் டெலிபோன் அண்டு டெலிகிராப் கம்பெனியின் தலைமைப் புள்ளியியலார் பகுதி (Chief Statistician's Division of the American Telephone and Telegraph Company), தி நேஷனல் பீரோ ஆ∴ப் எகனமிக் ரிசர்ச் (The National Bureau of Economic Research), தி பீரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டேடிஸ்டிக்ஸ் (The Bureau of Labour Statistics), தி பீரோ ஆஃப் சென்ஸஸ் (The Bureau of Census) ஆகியோரைக் குறிப்பிட விரும்புகிறேன். இந் நூலில் பிற்சேர்க்கையாகத் தரப்பட்டுள்ள பட்டியல்கள் பல துறைகளிலிருந்து சேகரித்தவை; கேம்பிரிட்ஜ் பல்கலைக் கழகப் பேராசிரியர் சர் ரோனல்ட் ஃபிஷர் (Sir Ronald Fisher), அவரது பதிப்பகத்தாரான மெஸர்ஸ். ஆலிவர் அண்டு பாயிட் ஆஃப் எடின்பரோ அண்டு லண்டன் (Messrs. Oliver and Boyd of Edinburgh and London); பேராசிரியர் ஜார்ஜ் டபிள்யு. சினெடெக்கர் (Professor George W. Snedecor), ஐயோவா ஸ்டேட் காலேஜ் பிரஸ் (Iowa State College Press); பேராசிரியர் ட்ருமென் எல். கெல்லி (Professor Truman L. Kelley), ஹார்வர்டு யுனிவர்சிடி பிரஸ் (Harvard University Press); டாக்டர் டபிள்யு. எச். எஸ். ஸ்டீவன்ஸ் (Dr. W. H. S. Stevens), பீரோ ஆஃப் டிரான்ஸ்போர்ட்

எகனமிக்ஸ் அண்டு ஸ்டேடிஸ்டிக்ஸ் ஆஃப் தி இன்டர்ஸ்டேட் காமர்ஸ் கமிஷன் (Bureau of Transport Economics and Statistics of the Interstate Commerce Commission) ஆகியோருக்கு முக்கியமாகக் கடன்பட்டிருக்கிறேன். எனது குடும்பத்தினர் எனக்கு மிகவும் உதவியாக இருந்தார்கள் ; வில்லியம் எச். மில்ஸ் (William H. Mills), ராபர்ட் எல். மில்ஸ் (Robert L. Mills) ஆகிய இருவரும் சில துறைகளிலும், நூலை உருவாக்கும் பலதிறப்பட்ட பணிகளில் டோரதி சி. மில்ஸும் (Dorothy C. Mills) எனக்கு உதவினர். இவர்களுக்கும், தங்கள் கருத்துகளாலும் ஆலோசனைகளாலும் உதவிய பலருக்கும் நான் பெரிதும் நன்றியுடையேன். முந்திய பதிப்புகளைத் தயாரிப்பதில் பல விதத்திலும் எனக்கு உதவியவர்களுக்கு மீண்டும் நான் நன்றி செலுத்துகிறேன்.

இந் நூல் குறைகளிலிருந்தும் பிழைகளிலிருந்தும் விடுபட்டுள்ளது என நம்பவே விரும்புகிறேன்; எனினும், இதனைப் படிப்போர் பிழைகளைச் சுட்டிக்காட்டினல் நன்றி செலுத்துவேன்.

பிப்ரவரி, 1955. F. C. M.

பொருளடக்கம்

புள்ளியியல் முறைகள்

(பாகம் I)

1. புள்ளி விவரங்களும் புள்ளியியல் முறைகளும்

சமுதாய, இயற்கைப் போக்குகளை ஆய்வதற்கும், ஆராய்ச்சிகளிலும் நிர்வாகத்திலும் முடிவுகள் எடுப்பதற்கு ஆதாரங்களைக் காண்பதற்கும், கையாளப்படும் ஒருவகை ஆய்வுபற்றியது இந்நூல். விரித்துக் காண்கையில் புள்ளி விவர முறைகள் பலவாகவும் வேறுபட்டனவாகவும் இருக்கின்றன ; ஆனுல், மொத்தத்தில் பார்க்கப்போனுல் மனிதனது செயல்களையும் இயற்கை நியதிகளையும், தொகுப்பாக வகைப்படுத்தி, காரண காரியத் தொடர்புபடுத்தி, தர்க்கரீதியில் ஆராய்வதே புள்ளி விவர முறைகளின் குறிக்கோளாகும். அன்ருட வாழ்க்கையில், ஆய்வாளர்களுக்கும் நிர்வாகிகளுக்கும், பெருந்திரளான விவரங்களின் செறிந்த பொழிப்பாக, புள்ளி விவரங்கள் பயன்படக் காண்கிறேம். ஆனுல், விவரங்களைத் தொகுத்து, அவற்றிலிருந்து பெறும் தர விலக்கங்கள், உடன் தொடர்புக் கெழுக்கள், குறியீட்டு எண்கள், போக்குக் கோடுகள், பருவ, சுழற்சி வடிவுகள் ஆகியவைமூலம் நுகர்வறிவைச் சுருக்கமாக அறியும் முறைகளாகமட்டும் இவ்வகை ஆய்வினைக் கருதுவோமானுல், இவற்றின் சிறப்பை அறியத் தவறியவர்களாவோம். ஏனெனில், ஒரு சில அளவைகளின்மூலம் எளிய விளக்கங்கள் தரும் வேலையோடு, புள்ளியியலின் பணி முடிந்துவிடுவதில்லை. பல வேறுபட்ட செயல்களில் எதனைத் தேர்ந்தெடுப்பதென்று முடிவு செய்ய புள்ளியியல் உதவுகிறது. அறிவு வளர்ச்சிக்காக, உலகில் நாம் புரிந்துகொள்ள விரும்புகின்ற பொருள்களின் அடிப்படைத் தன்மைகளுக்கு இசைவான பல வழிகளில், புள்ளியியல் முறையைத் தலைசிறந்ததாகக் கருதலாம்.

டூவே (Dewey) என்பார் கூறியபடி உத்திரவாதத்தோடு முடிவுகள் கூறுவதற்குச் செயல்முறைகளைக் காண்பதே நவீன புள்ளி விவர முறைகளின் தனிச் சிறப்பாகும். அத்தகைய உத்தரவாதத்தோடுகூடிய முடிவுகள், மாதிரியில் கண்டறிந்த விவரங்களை அடிப்படையாகக்கொண்டு மாதிரியில் கண்டறிந்த விவரங்களைத்

தவிர பிறவற்றிற்கும் பொருந்துமாறு செய்யப்பட்ட முடிவுகளாகவும் மதிப்பீடுகளாகவும் இருக்கலாம்; அல்லது எடுகோள்களை ஏற்கவோ புறக்கணிக்கவோ செய்யப்படும் முடிவுகளாகவும் இருக்கலாம். இத் தகைய உய்த்துணர்வே நவீன புள்ளியியலின் உயிர் நாடி. புள்ளி யியல் உய்த்துணர்வு முறைகள் வளர்ச்சி பெற்றதுபற்றி விரிவாக ஆராயும்போது இயைபிலா மாதிரிகளின் தன்மைபற்றியும் செயல் பற்றியும் ஆராய்வோம்; மனிதர்கள், நிகழ்ச்சிகள், பொருள்கள், அளவைகள் ஆகியவைகளாலான முழுமைத் தொகுதிகளின் தன்மைகள்பற்றி அவற்றின் மாதிரிகளைக்கொண்டு மதிப்பீடுசெய்யும் முறைகளைக் காண்போம்; எடுகோள்களைச் சோதனை செய்யும் முறைகளையும் ஆராய்வோம்.

இந்தப் பல்வேறு முறைகளும், உண்மையில் மனிதர்களின் இயற்கைத் தன்மைக்கும் உலகத்தின் இயற்கைப் போக்குக்கும் இயைந்து விளங்குவதைக் காண்போம். இவற்றை விரிவாக ஆராய வேண்டுமானால், நடைமுறைப்புள்ளியியல் ஆராய்ச்சியாளர், அக்கறை காட்டும் முறைகளைத் தாண்டி ஒரு படி மேலே செல்லவேண்டும். ஏனினும், புள்ளியியல் ஆய்வாளருக்குக்கூட தாம் பயன்படுத்தும் முறைகள் தாம் பயன்படுத்தும் மூலப் பொருள்களுக்கு ஏற்புடையது தானா என்ற கேள்வி பிறப்பது இயற்கைதான். ஆனால், மனிதப் பண்புகள், பிற உயிர்வகைகளின் பண்புகள், பிற பருப்பொருள் சேர்க்கைகள் இவற்றில் எந்தத் தொகுப்பைப் புள்ளி விவர ஆய் வாளர் பயன்படுத்தினாலும் புள்ளி விவர ரீதிக்கு இவை கட்டுப் பட்டே இயங்குகின்றன என்பதற்கு ஆதாரங்கள் பல காட்டலாம். எண்பது ஆண்டுகளுக்கும் முன்னர் கிளார்க் மாக்ஸ்வெல் (Clerk Maxwell) என்பவர், ...நமது சோதனைகளில் பயன்படுத்தும் பருப்பொருள்பற்றிய நமது உண்மை அறிவு புள்ளியியல் தன்மையதே..... மில்லியன் கணக்கிலுள்ள அணுத்திரளாலான பருப்பொருள்களில் ஓர் ஒழுங்கமைதியைக் காண்கிறோம். இவற் றிற்கான காரணக் கூறுகள் தம்முள் முரண்பட்டாலுங்கூட இந்த அமைதியைக் காண்கிறோம்' என்று எழுதினார். தனிப் பொருள் களுக்கு இல்லாது, தொகுதிக்கேயுள்ள இந்த ஒருமித்த போக்கு தான்—மாக்ஸ்வெல் சுட்டிக் காட்டியதும் இதுவே — புள்ளி விவர ஆய்வுகளுக்கு உயிர்நாடி. தனிப்பட்ட குறிப்புகளின் நடத்தை, எங்கும் நிறைந்த தற்செயல் நிகழ்வுகளால் உருவாக்கப்படுவதால், முன்கூட்டிக் கூறமுடியாதபடி அமைகிறது; ஆனாலும், தொகுப்பாக அமைந்த குறிப்புகளின் தன்மைபற்றி ஒருவாறு கூறமுடியும்.

அணுத்திரள் கொள்கைபற்றி ஆராய்ந்தவர் மாக்ஸ்வெல் (Maxwell). அணுத்தத்துவத்தில் அவர் சுட்டிக் காட்டிய புள்ளி விவர

ரீதியான ஒழுங்கை இன்னும் பல்துறை ஆராய்ச்சிகளில் அறிவியல் நூலார் இன்று பயன்படுத்துகின்றனர். இந்த ஒழுங்கு, நிகழ்திறம் செயல்படும் எல்லாத் துறைகளிலும்—இது செயல்படாத இடமே மிகக் குறைவு தவிர்க்க முடியாதது. உயிர்த்தன்மை, மனித உறவுகள் ஆகிய துறைகளில் நாம் கண்டறிந்த பயனுள்ள அறிவு, பெரும் பாலும் புள்ளி விவர ரீதியில் அமைந்த கோட்பாடுகளால் உருவானதே. இந்த அறிவு, தொகுப்பான பொருள்களைக் குறித்தனவே; தனித்தனியே ஒவ்வொன்றைக் குறித்தும் பகுத் தறிய முடியாது. ஜான் ஜோன்ஸின் நடவடிக்கை, குறிப்பிடப்பட்ட நிலப் பரப்பிலே கூலத்தின் விளைச்சல், ஒரு குறிப்பிடப்பட்ட ஜீனிலிருந்து (gene) கொண்டு செல்லப்படுகின்ற பண்பு, போட்டிச் சந்தையில் ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் கோதுமை விலை ஆகியவற்றைத் தனித்தனியே காண முடியாது; முன்கூட்டியே கூறவும் முடியாது. ஆனால், ஒரேவகையான பொருள்களை ஒன்றோ டொன்று சேர்க்கும்போது கிடைக்கும் முழுமைத் தொகுதிகளிலே ஒருமைத் தன்மைகளைக் காணமுடிகிறது. இதுபோன்ற தொகுதி களின்—அணு, நியூட்ரான், ப்ரோட்டான், ஜீன்கள், மனிதர்கள் இவற்றில் எது குறித்த தொகுதியாயினும் சரி—ஒருமையான நடத்தையினைக்கொண்டே புள்ளி விவர ரீதியில் பொதுமையான முடிவுகளைக் காண்கிறோம். ஆனால், இந்த ஒருமை ஒழுங்கை ஓரளவு வரையறை செய்ய முடிந்தாலும், ஓரளவுக்கு முன் கூட்டியே ஊகித்தறிய முடிந்தாலும், குறையிருந்தே தீருகிறது. எனவே, புள்ளியியல் முடிவுகளைக் கூறும்போது நிகழ்திறத்தின் துணை கொண்டே கூறுகிறோம். எனவே, புள்ளியியல் துணைகொண்ட அறிவு குறைவுடையது, ஐயப்பாடுடையது என்றாலும் இந்த அறிவு உலகின் இயற்கை நியதிக்கும் மனிதப் பண்புகளுக்கும் பொருந்திப் பயன்படுவதாகும்.

இந்த அறிவு எப்படி உய்த்துணர்ந்து பெறப்படுகிறது என்பதையும், எங்ஙனம் விரிக்கப்படுகிறது என்பதையும் அடுத்து வரும் பக்கங்களில் விவாதித்துள்ளோம். கண்டறிந்த விவரங்களின் அடிப்படையில் பிறந்தவை அவை. செம்மையான, பொருத்தமான குறிப்புகள் புள்ளி விவர ஆய்வு என்ற மாளிகையின் கற்களாகக் கொள்ளலாம். எனவே, இந் நூலில் கூறப்பட்டுள்ள மனித வாழ்க்கையோடு தொடர்புடைய துறைகளில் ஈடுபட்டுள்ள ஆய்வாள ருக்குக் கிடைக்கும் விவரங்களின் தன்மைபற்றி முன்குறிப்பில் சில சொல்வது முறையே. இவ் விவரங்கள் அளவில் பெரியன. ஒருவேளை, நமது தேவைகளை அவை ஈடு செய்யாமல் இருக்கலாம். என்றாலும், ஒரு கால் நூற்றாண்டுக்குமுன் கிடைத்த விவரங்களைவிட தற்போது கிடைக்கும் விவரங்கள் மிகவும் திருத்தமானவை, தெளி

வானவை. நமது ஆய்வுக்காக இவ் விவரங்களை இருவகையாகப் பிரிப்போம்—இயைபிலா மாதிரி முறையில் அமைந்தவை, அப்படி அமையாதவை.

நாம் முன்பு கூறியபடி புள்ளி விவர ரீதியில் பொதுமையான முடிவுகள் செய்யவேண்டுமானல், ஆய்வாளருக்கு இயைபிலா முறையில் தேர்ந்து எடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் வேண்டும். இதுபற்றி முழு விவரத்தையும் பின்னர்க் காண்போம். குறிப்பிடப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, இயைபிலா மாதிரியினைத் தேர்ந் தெடுக்கும்போது, ஒவ்வொரு தனிக் குறிப்பும் மாதிரியில் இடம் பெறுவதற்கான நிகழ்திறம் ஒரே அளவாக வரையறை செய்யக் கூடியதாக இருக்கும் என்பதை இங்கே குறித்தால் போதுமானது. இன்று ஆய்வாளர் கைக்குக் கிடைக்கும் சில விவரங்கள் உண்மையில் இயைபிலா மாதிரிகளைத் தரும் முறைகளைக் கையாண்டு தொகுக்கப் பட்டனவே. சமுதாயப் பொருளாதார வாணிக 'ஒற்றறிவு' (intelligence—ராணுவ ரீதியில் இச் சொல்லைப் பயன்படுத்துகிறோம்) —குறித்த விவரங்கள், நன்கு திட்டமிட்ட முறைகளுடன் இயைபிலா மாதிரிகளைக் கையாண்டு தொகுக்கப்படுகின்றன. அண்மைக் காலத்திய இம் முறைகளின் வளர்ச்சி பயனுள்ளது; வரவேற்கத் தக்கது. மத்திய ஆட்சி (federal) நிறுவனங்களின் பல தொகுப்பு முறைகளும் இவ்வாறே அமைந்துள்ளன. தனிப்பட்டோரும் தம் தேவைக்கேற்ப, களமுறை ஆய்வில் இயைபிலா மாதிரிகளைப் பெறுவதற்குக் காட்டும் அக்கறை வளர்ந்து வருகிறது. இதுபோன்று இயைபிலாத் தன்மையை உருவாக்கிய பின்தான் நாம் விவாதிக்கப் போகும் புள்ளி விவர உய்த்துணர்வு குறித்த சோதனைகளைச் செய்யலாம்; முடிவுகளைப் பொதுமையாக்கும் முறைகளைப் பயன் படுத்தலாம்.

ஆனல், சமுதாய, பொருளாதார, வாணிக ஆராய்ச்சிகளில் பெரும்பாலான புள்ளி விவரங்கள், இயைபிலா முறையில் தொகுக் கப்பட்டவை அல்ல. அவற்றைச் சேகரிக்க இயைபிலா முறைகளைப் பயன்படுத்தாததனல் அவை இயைபிலாத் தன்மையின்றி இருக் கலாம். அரசாங்கமும் தனிப்பட்டோரும் தங்கள் புள்ளியியல் நிறுவனங்கள்மூலம் வேண்டிய விவரங்களைச் சேகரிப்பதற்குப் பதிலாக, கிடைக்கின்ற விவரங்களைச் சில வேளைகளில் தொகுக் கின்றனர். (சில சமயங்களில் உண்மையில் தேவைப்படுவது, கிடைப்பதே இல்லை.) காலத் தொடர்வரிசை போன்ற சில புள்ளி விவரங்களில், அடுத்தடுத்த குறிப்புகளுக்கு இடையேயுள்ள ஒட்டுறவால் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் இயைபிலாத் தன்மை

யின்றி இருக்கலாம். அத்தகைய இயைபிலா மாதிரிகளில் நிகழ்திறக் கோட்பாடுகளும், அத்தகைய கோட்பாடுகளின் அடிப்படையில் அமைந்த ஆய்வுகளும் பொதுமையான முடிவுகளும் பொருத்தமுடையதாகாது. அப்படி அவற்றைப் பயன்படுத்தினுலும் வரையறைகளுக்கு உட்பட்டே பயன்படுத்தவேண்டும். அப்படியில்லாது இம் முறைகளைத் தவருகப் பயன்படுத்தினுல் பெரும் தவறுகள் ஏற்படும். இதனுல், இயைபுடன்கூடிய மாதிரிகள் ஒரு பயனும் அற்றவை என்பது பொருளல்ல. இவற்றிலிருந்தும் அதிக செய்திகளைப் பெறலாம்; சில சமயங்களில் தேவைப்படுகின்ற செய்திகளெல்லாவற்றையும் பெறவேண்டியிருக்கலாம். வருணனை ரீதியில் அமைந்துள்ள புள்ளி விவரங்கள் கூடச் சில சமயங்களில் மாறுபடும் அனுபவங்களின் சுருக்கமான பொழிப்பாக அமைந்து பயன்படுகின்றன; காரணத்தோடு முடிவுகள் காண்பதற்கும் இவை துணை செய்கின்றன; ஆனுல், எச்சரிக்கையுள்ள ஆய்வாளர் இத்தகைய இயைபிலாத விவரங்களை அளவுடனேயே கையாளுவார். அவற்றின் அடிப்படையில் பொதுமையான முடிவுகள் செய்யும்போதும், இக் குறைபாட்டை நினைவில்கொண்டே செயலாற்றுவார்.

பின்வரும் பக்கங்களில் கூறப்படும் கருத்துகளையும் கொள்கைகளையும் அறிமுகப்படுத்தும் வகையில், இதுவரையில் சில செய்திகளைக் கூறினேம். இவை புள்ளியியல் மாணவருக்கு, நாம் பயன்படுத்தப்போகும் கருவிகள்பற்றியும் அவை பயன்படுத்தப்படும் முறைபற்றியும் கூறும்வகையில் அமையும். புள்ளியியல் முறை ஒரு சக்திவாய்ந்த முறை; ஆட்சிக்கும் நிர்வாகத்துக்கும் விரிவாகப் பயன்படுத்தப்படும் முறை என்ருலும், குறைபாடில்லாத, எல்லாம் வல்ல முறையன்று இது. இந் நூலில் விவாதிக்கப்படும் முறைகளைக் கையாள்வதற்கு எச்சரிக்கையாக, இரு கருத்துகளைப் படிப்போர் மனத்தில் நிலைநிறுத்த விரும்புகிருேம்.

புள்ளி விவர முறைகளைக் கருவிகளாகவும் சாதனங்களாகவும் நாம் பேசிய சொல்லாட்சி மிகவும் பொருத்தமுடையது. இக் கருவிகளை முறையறிந்து பயன்படுத்தவேண்டியது அவசியம். புள்ளி விவர ஆய்வாளர் தமது ஆராய்ச்சிகளில், நெறி முறைகளையும் தெளிந்த அறிவையும் துணைகொள்ள வேண்டும். பொதுவாக, புள்ளி விவர ஆய்வாளருக்கு இரண்டு இடர்ப்பாடுகள் உண்டு. புள்ளி விவரங்களைத் தொகுப்பதுபற்றியோ அவற்றைப் பயன்படுத்துவதுபற்றியோ மட்டும் — ஒன்றைப் புறக்கணித்து மற்றதை வலியுறுத்துவதில் மட்டும்—புள்ளி விவர

ஆய்வாளர் ஈடுபடக் கூடாது. அளவிலோ வேறு வகையிலோ விவரங்களைக் குவிப்பது ஆய்வின் நோக்கமன்று. பிரித்துணர முடியாத அளவுக்குக் குவிப்பது முடிவுகளைக் காணவும் உதவி செய்யாது. எந்த ஆய்வாலும் உத்தரவாதத்தோடு முடிவுகள் செய்யவேண்டுமானால், கண்டறிந்த விவரங்களை ஏற்ற அளவு சான்றாக எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். நடைமுறை விவரங்களைக் கொண்டு, கண்டறிதற்கப்பாற்பட்ட பொதுமையான முடிவுகளைச் செய்தல், எடுகோள் ஆய்வுகள், எடுகோள் கண்டறிந்த விவரங்களுக்குப் பொருத்தமில்லாதபோது மாற்றியமைத்தல்—இவற்றுக்கெல்லாம் கிடைத்த சான்றுகளை முறையாகப் பயன்படுத்தவேண்டும். உருவாக்கப்படும் கொள்கைகள் கண்டறிந்த விவரங்களுக்கு ஏற்புடையவைதானா என்று காரண காரிய ரீதியில் சரிபார்க்கவேண்டும். எனவே, அத்தகைய விவரங்களை மதிநுட்பத்துடன் தொகுத்தலும் கையாளுதலும் வேண்டும்.

இரண்டாவது எச்சரிக்கை புள்ளியியல் ஆய்வாளருக்குத் தேவையில்லாததுபோல் தோன்றலாம்; என்றாலும் அது முக்கியமானது. அறிந்து கண்டதைப் புறக்கணித்துவிட்டு, முறைகளை வலியுறுத்துவது சரியல்ல. ஜே. எல். ஹெண்டர்சன் (Henderson) கூறியதுபோல...... '(கண்டறிந்தவற்றோடு) நமக்குள்ள நெருக்கம் பழக்கம் உய்த்துணர்ந்து நாம் அறிந்துகொண்டது'— இதுதான் மிகவும் முக்கியமானது; முறைகளன்று. கையாளப்படும் துறையில் சரியான பழக்கம் இல்லாதபோது கூர்மையான கருவிகளைப் பயன்படுத்துவது ஆபத்தானது. இது புள்ளியியல் முறைக்கும் பொருந்தும். புள்ளியியல் முறைகளை நன்றாகவும் மதிநுட்பத்துடனும் ஆய்வுப் பொருளுக்கேற்பப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

துணை நூல்கள்

1. Cohen, Morris R., 'The Statistical View of Nature', Journal of the American Statistical Association, June 1936.

2. Kelley, Truman L., 'Fundamentals of Statistics, Chap. 1.

3. Kendall, M. G., 'The Statistical Approach,' Economica, May 1950.

4. Merz, J. T., 'A History of European Thought in the Nineteenth Century, Vol. II, Chap. 12, 'The Statistical View of Nature.'

5. Mills, F. C., 'On Measurement in Economics,' in The Trend of Economics, R. G. Tugwell, ed.

6. Royce, Josiah, 'The Mechanical, the Historical and the Statistical,' Science, April 17, 1914.

7. Wirth, L., ed., Eleven Twenty Six: A Decade of Social Science Research, section on 'Quantification: The Quest for Precision.'

இந்த அத்தியாய முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணை நூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரும், பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டும், நூலின் (இரண்டாம் பாக) இறுதியிலுள்ள துணை நூல் பட்டியலில் காணலாம்.

2. விளக்கப் படங்களின் இயல்புகள்

சில அடிப்படைக் கொள்கைகளும் செயல் முறைகளும்

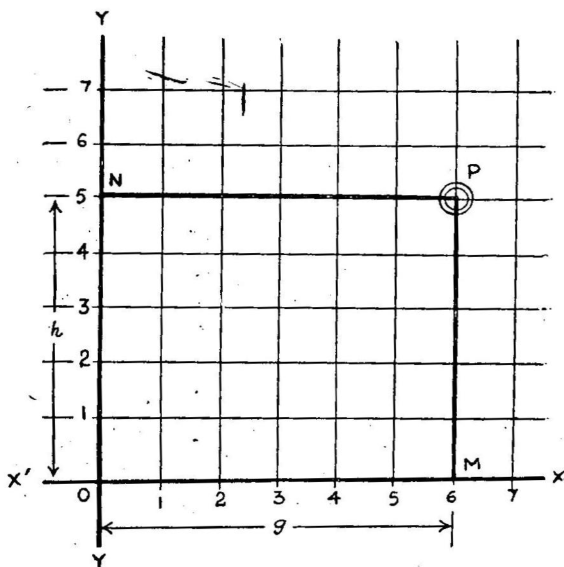
அளவின விவரங்களைச் சுருக்கி அமைக்கவும், ஆராயவும், விளக்கம் கூறவும் பயனுகும் முறைகளை விவரிப்பதற்குமுன் அவற்றுக்கு அடிப் படையாக வுள்ள சில கொள்கைகளை முதலில் காண்போம்; இக் கொள்கைகள் புள்ளியியலைவிடக் கணிதக் கோட்பாடுகளை அடிப் படையாகக் கொண்டன. எனவே, சில அடிப்படைக் கணிதக் கோட் பாடுகளை முதலில் விளக்குவோம். இவற்றுள் சில கோட்பாடுகள் நமக்கு ஏற்கெனவே தெரிந்தவைதாம். எனினும், பின்வரும் அத்தியாயங்களில் இவற்றுடன் அடிக்கடி தொடர்பு காட்டிப் பேசப் படுமாதலால், இவற்றைக் கற்பது நன்று.

புள்ளிவிவர ஆய்வுகள், பெரும்பாலும் பணஞ் சார்ந்த (pecuniary) அல்லது பருப்பொருள் (physical) அலகுகளில் அளந்து கிடைத்த விவரங்களைக் குறிப்பன. டே'கார்ட் (Descartes) என்ற தத்துவ அறிஞரால் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட ஆயகணித (coordinate geometry) முறைகள், புள்ளி விவரங்களைக் கையாள்வதிலும் விளக்கம் கூறுவதிலும் பெருந் துணையாய் நிற்கும். எனவே, தேவையான சில ஆயக்கணிதக் கோட்பாடுகளைச் சுருக்கமாகத் தொகுத்துரைப்போம்.

செங்குத்து ஆயங்கள் (Rectangular Coordinates)

ஒருதளத்தில் (plane) இரு செங்குத்தான நேர்கோடுகள் வரைந்தால், அக் கோடுகளின் ஊடறு புள்ளியினை (point of intersection) அடிப்படையாகக் கொண்டு, அந்தத் தளத்திலுள்ள எந்தப் புள்ளியின்

அமைப்பினையும் அளந்து கூறலாம். வரையப்பட்ட இரு நேர்கோடு களில் ஒன்றை (குத்துக்கோடு) $Y'Y$ என்றும், மற்றதை (படுக்கைக் கோடு) $X'X$ என்றும், ஊடறு புள்ளியை [அதாவது மூலத்தை (origin)] O என்றும் (படம் 2.1 காண்க) குறிப்போம். P என்பது தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி ; $Y'Y$-க்கு இணையாகவும், $X'X$-ஐ M-ல் வெட்டும்படியாகவும், PM என்ற கோட்டை வரைக ; $X'X$-க்கு இணையாகவும், $Y'Y$-ஐ N-ல் வெட்டும்படியாகவும் PN என்ற கோட்டை வரைக. PM-ஐ g அலகுகளாகவும் ON-ஐ h அலகுகளாகவும் கருதினால், g-ம், h-ம் P என்பதின் ஆயங்களாகும் (coordinates). O என்ற மூலத்தினை அடிப்படையாகக் கொண்டு P-ன் இடமதிப்பை இவை



2.1. படம். செங்குத்து ஆயங்கள் மூலம் ஒரு புள்ளியின் இட அமைப்பினை அறிதல்

விளக்குகின்றன. 2.1 படத்தில் g ஆறாகவும், h ஐந்தாகவும் எடுக்கப் பட்டுள்ளன. x அச்சு வழியே அளக்கப்பட்ட தூரமான g-ஐ P-ன் மட்டாயம் (abscissa) என்றும், y அச்சு வழியே அளக்கப்பட்ட தூரமான h-ஐ P-ன் குத்தாயம் (ordinate) என்றும் குறிப்பர். (மட்டாயத்தை முதலிலும் குத்தாயத்தைப் பின்னரும் குறிப்பது வழக்கம்.) தளத்திலுள்ள பிற புள்ளிகளின் ஆயங்களும் இதே

முறையில் தீர்மானிக்கப்படுகின்றன. மறுதலையாகக் கூறுவோமானால் (conversely) ஏதோ ஒரு மெய் எண்ணை (real number) மட்டாயமாகவும், மற்றொன்றைக் குத்தாயமாகவும் கருதினால் இரு எண்களும் சேர்ந்து தளத்தில் ஒரு புள்ளியினைச் சுட்டும்.

O என்ற மூலத்துக்கு வலப்புறத்திலோ, இடப்புறத்திலோ, மேலோ, கீழோ ஒரு புள்ளி அமையலாம். மூலத்துக்கு வலப்புறம் அமையும் மட்டாயங்களை நேராகவும் (positive), இடப்புறம் அமையும் மட்டாயங்களை எதிராகவும் (negative) குறிப்பது மரபு; அதேபோல மூலத்துக்கு மேல்புறம் அமையும் குத்தாயங்களை நேராகவும், கீழ்ப் புறம் அமையும் குத்தாயங்களை எதிராகவும் குறிப்பது மரபு. பொதுவாகப் பொருளாதார, சமூகப் புள்ளி விவரங்களில் பயன்படும் மதிப்புகள் வலதுகை மேல்புறக் கால் வட்டத்திலேயே (quadrant) அமையும். ஈண்டு மட்டாயமும் குத்தாயமும் நேராகவே இருக்கும்.

ஆயத்தொலைகள் பற்றிய இக் கருத்து, கணிதத்தில் இன்றியமையாததாகவும், புள்ளியியல் முறைகளுக்கும் அடிப்படை முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகவுமிருக்கிறது. பொருளாதார விவரங்களை வெளியிடுவதற்கு இம் முறை எவ்வளவு வசதியாக இருக்கிறது என்பதை மிகவும் எளிய எடுத்துக்காட்டு ஒன்றின்மூலம் விளக்குவோம். இதற்கு 2-1 பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைப் பயன்படுத்துவோம்.

இப் பட்டியலிலுள்ள விவரங்களை, ஆயக்கணித முறைமூலம் *x* அச்சில் மாதங்களையும் *y* அச்சில் மோட்டார் வண்டிகளின் (automobiles) எண்ணிக்கையையும் எடுத்துக்கொண்டு கீழ் வரும் படத்தில் (படம் 2.2) காட்டியபடி குறிக்கலாம். மட்டாயங்களைக் குறிக்கையில், 1953 டிசம்பர், மூலமாகிய புள்ளியியல் அமைவதாகக் கருதப்படுகிறது. எனவே, 1954 ஜனவரியின் *x* மதிப்பு 1-ஆகவும், பிப்ரவரியின் *x* மதிப்பு இரண்டாகவும், மற்றவை இதே முறையிலும் அமையும். விற்பனையான கார்களின் எண்ணிக்கையை வெளியிடும் ஆயங்கள்: 1954 ஜனவரியில் 1-ம், 454,562-ம்; 1954 பிப்ரவரியில் 2-ம், 446,676-ம்,......1954 டிசம்பரில் 12-ம், 669,778-ம். இப் புள்ளிகளைப் படத்தில் கண்டமாதிரி, நேர் கோடுகளால் தொடர்ந்து இணைத்தால், அந்த வருடத்தில் மோட்டார் வண்டிகளின் விற்பனையில் ஏற்பட்ட ஏற்ற இறக்கங்கள் நன்கு புலனாகும்.



2.2. படம்.

1954ஆம் ஆண்டில் மாதவாரியாகப் பயணிகள் மோட்டார் வண்டிகளின் தொழிற்சாலை விற்பனை (Factory Sales).*

* ஆதாரம்: மோட்டார் வண்டிகள் உற்பத்தியாளர் கழகம்.

பட்டியல் 2-1

1954 ஆம் ஆண்டில் அமெரிக்காவில் மாதவாரியாகப் பயணிகள் மோட்டார் வண்டிகளின் தொழிற்சாலை விற்பனை*

மாதம்	விற்பனையான பயணிகள் பொறிவண்டிகளின் எண்ணிக்கை
ஜனவரி	454,562
பிப்ரவரி	446,676
மார்ச்	531,529
ஏப்ரல்	534,667
மே	497,062
ஜுன்	507,055
ஜுலை	451,663
ஆகஸ்ட்	445,306
செப்டம்பர்	300,998
அக்டோபர்	221,195
நவம்பர்	498,248
டிசம்பர்	669,778

* *ஆதாரம்: மோட்டார் வண்டிகள் உற்பத்தியாளர் கழகம்.*

சார்பலன் உறவுகள் (Functional Relationship)

ஆயங்களின்மூலம் எப் புள்ளியைக் குறிப்பதாக இருந்தாலும், இரண்டு மதிப்புகள் தேவை என்பது முன்னரே குறிப்பிடப்பட்டது; எனவே, ஒவ்வொரு புள்ளியும் இரண்டு கூறுகளைப் பிணைத்து அவற்றுக்கிடையே ஓர் உறவை வெளியிடுகிறது. மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில், இவ்விதம் இணைக்கப்படும் இருகூறுகள், மாதங்களும் தொழிற்சாலைகளில் விற்பனையான பயணிகள் மோட்டார் வண்டிகளும் ஆகும். காலப்போக்கில் மோட்டார் வண்டிகளின் விற்பனையில் மாற்றங்கள் ஏற்படுகின்றன. இந்த மாற்றங்களின் அளவையும் போக்கையும் உடைந்த கோடு வெளிக்காட்டுகிறது. காலமும், கார்களின் எண்ணிக்கையும் மாறிகள் (variables) எனப்படும்; அஃதாவது இந்த அளவுகளின் மதிப்புகள் நிலையானவை அன்று; கொடுத்துள்ள விவரத்தில் மாறுதலடையும் தன்மையன. எடுத்துக்காட்டாக, 2.1 படத்தில் மட்டாயம் 6 என்ற நிலையான மதிப்பையும், குத்தாயம் 5 என்ற நிலையான மதிப்பையும் பெற்றிருக்கின்றன; ஆனல் 2.2 படத்தில் மட்டாயம், குத்தாயம் இரண்டுமே மாறும் மதிப்புகளைக்

கொண்டுள்ளன. ஒன்று 1-லிருந்து 12 வரையிலும், மற்றவை 221,195-ல் இருந்து 669,778 வரையிலும் மாறும் மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கின்றன. இத்தகைய மாறும் அளவுகளை x, y என்ற அடையாளங்களால் குறிப்பது மரபு. மட்டச்சு வழியாகக் குறிக்கப்படும் மாறிகளைக் குறிக்க முன்னதும் (x), குத்தச்சு வழியாகக் குறிக்கப்படும் மாறிகளைக் குறிக்கப் பின்னதும் (y) பயன்படுத்தப்படும்.[1]

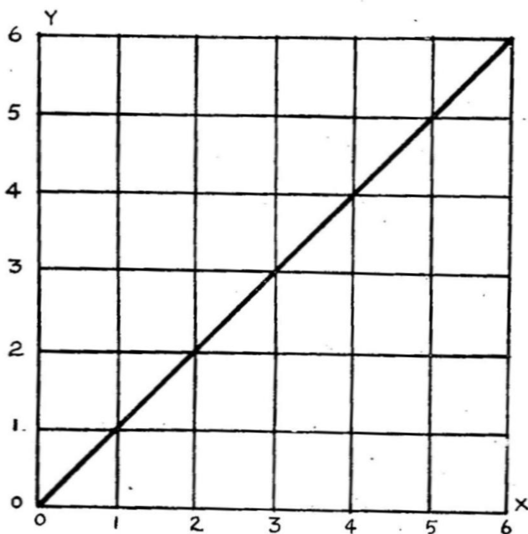
சார்புடைய மாறிகளும் சார்பிலா மாறிகளும் (Independent and dependent variables): காலப்போக்கில் மோட்டார் வண்டிகளின் விற்பனையில் ஏற்படும் மாற்றங்களை வெளியிடுகின்ற 2.2 படத்தில், காலம் என்ற மாறி, மாதம் என்ற எதேச்சையான அலகில் மாறுவதைக் கவனிக்கலாம். காலம் என்ற கூறில் ஒரு சார்பிலா மாற்றத்தை ஏற்படுத்தி, எதேச்சையாக எடுத்துக்கொண்ட இக்கால இடைவெளியில், உற்பத்தியில் ஏற்பட்ட மாற்றத்தைக் கண்டுபிடிக்கிரேம். எதேச்சையாகத் தீர்மானிக்கப்பட்ட அளவுகளில் கூடியோ குறைந்தோ மாற்றம் பெறுவதைச் சார்பிலா மாறி (independent variable) என்பர்; பொதுவாக இதனை x-அச்சில் குறிப்பர். மற்ருெரு மாறியைச் சார்புடை மாறி (dependent variable) என்பர்; இது y-அச்சில் குறிக்கப்படும். இச்சார்பு உண்மையானதாக—அஃதாவது, இரண்டாவது மாறியின் மதிப்புகள், தனித்த மாறியின் மதிப்புகளினின்று பெறக்கூடியதாக—இருக்கலாம்; அல்லது முற்றிலும் வசதிக்காக ஏற்படுத்திக்கொண்ட சார்பு வகையினதாகவும் இருக்கலாம். இரண்டு மாறிகளில் ஒன்று காலமாக இருக்குமாளுல், அதை எப்போதும் சார்பிலா மாறியாகவே எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

x-ன் மதிப்பைக் கொடுத்திருந்தால் அதைக்கொண்டு y-ன் மதிப்பைக் கணிக்கும்படியாக x-ம் y-ம் உறவுகொண்டிருந்தால், y-ஐ, x-ன் சார்பலன் (function) என்போம். அத்தகைய உறவை $y=f(x)$ என்ற பொதுவான கோவையால் எழுதுவோம். ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் சூன்யத்தில் வீழ்கின்ற பொருளின் வேகம், அஃது எவ்வளவு நேரமாக வீழ்ந்துகொண்டிருக்கிறதோ அஃததன் சார்பலன் ஆகும். ஒரு வாயுவின் பரிமாணம் கொடுக்கப்பட்டால், அதன் அழுத்தம், அதன் வெப்பநிலையின் சார்பலன் ஆகும். ஒரு குறிப்பிட்ட வட்டி மூலம் அசல் தொகை பணத்தில் ஏற்படும் கூடுதல், நேரத்தின் சார்பலன் ஆகும். ஒரு செங்குத்து வரைபடத்தில் சார்பிலாத மாறிகளின் மதிப்புகளை x அச்சு வழியே குறித்து, அதற்கியைந்த சார்

[1] அரிச்சுவடியில் (ஆங்கிலம்) கடை எழுத்துகளை மாறிகளைக் காட்டும் அடையாளங்களாகவும், முதல் எழுத்துகளை மாறிலிகளைக் (Constants) (கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தில் மாருத மதிப்புடைய அளவுகள்) காட்டும் அடையாளங்களாகவும் பயன்படுத்துவதைக் காண்க.

புடைய மாறிகளின் மதிப்புகளை y அச்சு வழியே குறித்தால் சார்பலனின் வரைபடம் ஒரு வளைகோடாகக் கிடைக்கும். சார்பலன் உறவுகள்பற்றிய தத்துவம் புள்ளியியல் முறைகளில் மிகவும் முக்கியமானதொன்று. எளிய சார்பலன்கள் சிலவற்றைப்பற்றிச் சுருங்கக் காண்போம்.[2]

நேர்கோடு: இரு மாறிகளுக்கு இடையே இருக்கக்கூடிய உறவுகளில் மிகவும் எளியது $y=x$. எடுத்துக்காட்டாக மரத்தின் வயதுக்கும், அதன் உடற்பகுதியில் காணப்படும் வட்டங்களின் எண்ணிக்கைக்குமுள்ள தொடர்பை எடுத்துக்கொள்வோம். 6 வயதான மரத்தில் 6 வட்டங்கள் இருக்கும்; 20 வயதான மரத்தில் 20 வட்டங்கள் இருக்கும்; பிறவும் இதேபோல இருக்கும். இந்த உறவை ஆயப்படத்தில், பல மாதிரிகளின் x, y மதிப்புகளை எடுத்துக்கொண்டு அமைக்கலாம். இந்தப் புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றின் வழியே கோடு வரைந்தால் அது மூலத்தின் (origin) வழியே செல்லும் நேர்கோடாக இருக்கும் (படம் 2.3 பார்க்க.)



2·3. படம். $y=x$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம்

இதுபோலவே எல்லா ஒருபடிச் சமன்பாடுகளையும் (equation of first degree) (x y என்ற உறுப்பும் x, y ஆகியவற்றின் முதல் படிக்கு

[2] ஆய கணிதத்தில் வளைகோடு என்று நாம் குறிப்பிடுவது, ஒரு கே (நேரானதோ, வளைவானதோ) குறிப்பிடும் பொதுச்சொல்.

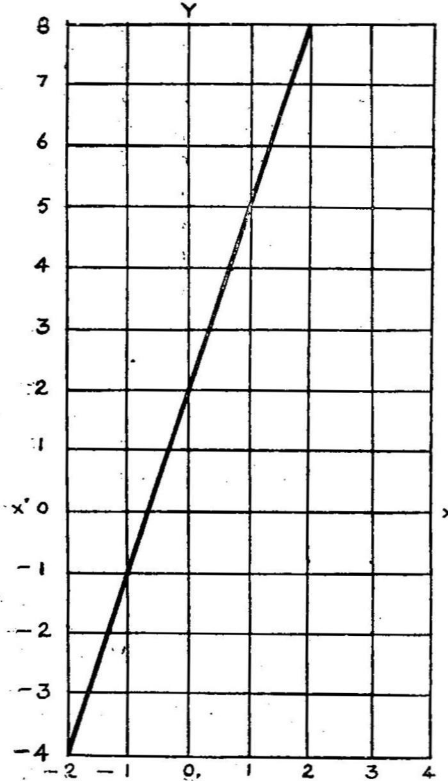
மேலான உறுப்புகளும் இல்லாத சமன்பாடு) ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிப்பிடலாம். சமன்பாட்டைப் பொதுவான முறையில் $y=a+b$ என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம். இதில் a என்பது மூலத்திற்கும், y அச்சும், கோடும் வெட்டுகின்ற புள்ளிக்கும் இடையில் உள்ள தூரம். இஃது ஒரு மாறிலி ; b என்பது மற்றுமொரு மாறிலி. இது கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் சாய்வை (slope), அதாவது, கோடு படுமட்டத்தோடு (horizontal) உண்டாக்கும் கோணத்தின் இருக்கையைக் (tangent) குறிக்கும். a என்ற மாறிலி உறுப்பு y துண்டம் (y-intercept) என அழைக்கப்படும். x என்பதற்கு 0 என்ற மதிப்பு இருக்கும் போது, y-ன் மதிப்பு a என்ற மாறிலியாக இருக்கும் என்பது பொதுச் சமன்பாட்டிலிருந்து நன்கு புலனாகும். 2.3 படம் சுட்டிக்காட்டும் எடுத்துக்காட்டில் a-ன் மதிப்பு 0; b-ன் மதிப்பு 1. a, b ஆகியவற்றின் மதிப்போடு அதன் குறியீடும் (sign) கொடுக்கப்பட்டால் கோடு அமைகின்ற இடத்தைத் தீர்மானித்துவிடலாம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் பொருந்த a, b ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடித்து, ஒரு நேர்கோட்டினைத் தீர்மானிப்பது முக்கியமானதொரு கணக்கு; புள்ளியியல் முறைகளில் இதே கணக்குப் பல உருவங்களில் தோன்றும்.

எளிய ஒருபடிச் சமன்பாடு (equation of the first degree) ஒன்றை வரைபடமாக அமைத்து, இதனை விளக்குவோம். $y=2+3x$ என்ற சார்பலனின் வரைபடத்தை வரைய, x-க்கு முதலில் பல மதிப்புகளை எடுத்துக்கொண்டு, அதற்கிசைந்த y மதிப்புகளைத் தீர்மானிப்போம். இவற்றை ஒரு பட்டியலாக அமைப்போம்:

x	y $(2+3x)$
—4	—10
—2	— 4
0	2
2	8
4	14

இந்த மதிப்புகளைப் புள்ளிகளாகக் குறித்துக்கொண்டு 2.4 படத்தில் குறித்துள்ளபடி வரைகோட்டினை வரைவோம். இந்தச் சார்பலன் முதல்படிச் சார்பலன் (அஃதாவது வரைகோடு நேர் கோடாக இருக்கும்). இந்த நேர்கோட்டினை வரையறை செய்ய [illegible]ரடு புள்ளிகளே போதும்; y துண்டு 2 என்ற மாறிலிக்குச் [illegible]; கோடு படுமட்டத்தோடு உண்டாக்கும் கோணத்தின் இருக்கை (tangent) 3 (அதுவே x-ன் கெழுவும்) ஆகும்.

இவ் வளைகோட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் ஆயங்களும் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்வதாலும், சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யும் இணை மதிப்புகள் ஒரு புள்ளியாக வளைகோட்டில் அமைவதாலும், இவ் வளைகோடு சமன்பாட்டினை விளக்கும் உருவம் என்பது நிரூபணமாகிறது. மாறிகளில் ஒன்றை ஒரு மாறிலி எண்ணால் அதிகப்படுத்த, மற்ற மாறியில் அதற்கிசைந்து ஏற்படும்



2.4 படம். $y=2+3x$ என்ற சமன்பாட்டின் வரை கோடு

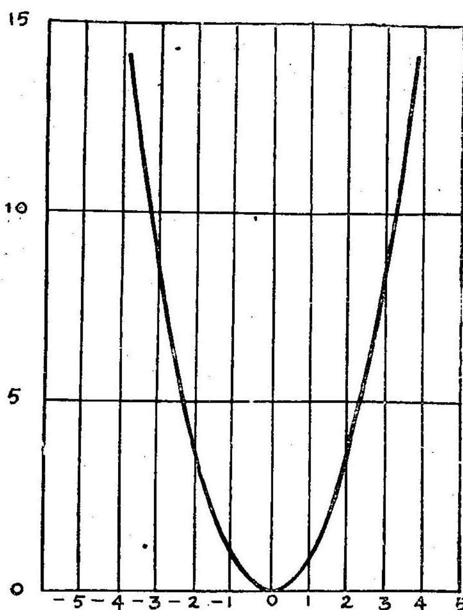
மாற்றமும் மாறிலியாகவிருக்கும் என்பது ஒருபடி உறவுகளின் ஒரு தன்மை. மேற்சுட்டிய எடுத்துக்காட்டில் x என்பது 2 என்ற மாறிலி மிகைபாட்டைப் (constant increment) பெற்று வளர, y மாறி, 6 என்ற மாறிலி மிகைபாட்டைப் பெறும். இவ்வகையாக

மாறிலி மிகைபாட்டின்மூலம் வளரும் தொடர்களைக் கூட்டுத்தொடர் (Arithmetic Series) என்போம்.

ஒருபடி உறவுடைய மாறிகளுக்குப் பருப்பொருளியல் துறைகளிலிருந்து பல எடுத்துக்காட்டுகள் தரலாம். பொருளாதாரத் துறையின்பாற்பட்ட ஓர் எடுத்துக்காட்டாகக் கூட்டுவட்டி அல்லாத தனிவட்டிமூலம் அசல் வளர்வதைக் கூறலாம். r என்பதைத் தனிவட்டி வீதமாகவும், x என்பதை ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கையாகவும், y என்பது ஒரு டாலர் அசல் x ஆண்டுகளுக்குப் பின் அசலும் வட்டியும் சேர்ந்து ஆகும் தொகையாகவும் எடுத்துக் கொண்டால், இவைகளுக்கிடையே உள்ள உறவு,

$$y=1+rx$$

என்ற சமன்பாட்டின்மூலம் வெளியாகும் எடுத்துக்காட்டுகளில் r என்பது மாறிலியாதலால், இவ்வகைச் சமன்பாடுகள் ஒரு



2·5. படம். பரவளையம் $y=x^2$ என்ற சமன் பாட்டின் வரை கோடு

படி இனத்தைச் சேர்ந்தன. இதுபோல எளிதாக நேரடியான நேர்கோட்டுவகை உறவுகளைப் புள்ளியியல் முறைகளில் காண்பது

அரிதாகும். எனினும் தோராயமாக, நேர்கோட்டு உறவினையுடைய மாறிகள் பலவற்றை அடிக்கடி காணலாம்.

ஒருபடியல்லா உறவுகள் (Nonlinear relationship): பல வகையான ஒருபடியல்லா உறவுகள் உண்டு; ஆனால், அதிகமாக வழக்கிலுள்ள ஒருசில வகைகளையே இங்குக் காண்போம். முக்கியமான காலவாரியில்லாத (non-periodic) வளைகோடுகளின் தன்மைகளில் சிறப்பானவற்றை மாணவர்கள் நன்கு அறியவேண்டும். பரவளைய இனம் (parabolic) உபவளைய இனம் (hyperbolic) ஆகியவையும், அடுக்கு இனத்தைச் (exponential) சேர்ந்தவையும் மிக முக்கியமானவை. பொது அமைப்பான பல்லுறுப்புச் சேர்ப்புக் கோவை (Polynomials) அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுவதால் அதனையும் இங்கே காண்போம்.

காலவாரி வரைகோட்டு வகைகளில், நெடுக்கை வரைகோடு (sine curve), ஓர் அடிப்படை அமைப்பென்று சுருக்கமாகக் கூறப்படுகிறது.

பருப்பொருளியலில் பரவளைய, உபவளைய அமைப்பு உடைய சார்பலன் உறவுகள் அதிகமுண்டு; அவற்றில் சிலவகை அமைப்புகள் சமூக, பொருளாதாரப் புள்ளிவிவரங்கள் சிலவற்றுக்குப் பொருந்திவருகின்றன. மாறிலி இல்லாதபோது, சமன்பாட்டின் பொது உருவம் $y=ax^b$ என்பது; b என்ற படிக்குறி நேராக இருக்கும்போது வளைகோடு பரவளையமாகவும், b எதிராக இருக்கும்போது வளைகோடு உபவளையமாகவும் இருக்கும். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் இரண்டும் இவ்வினங்களை விளக்கிக்காட்டும்.

கணக்கு : $y=x^2$ என்பதின் வரைகோட்டினை அமைக்க.

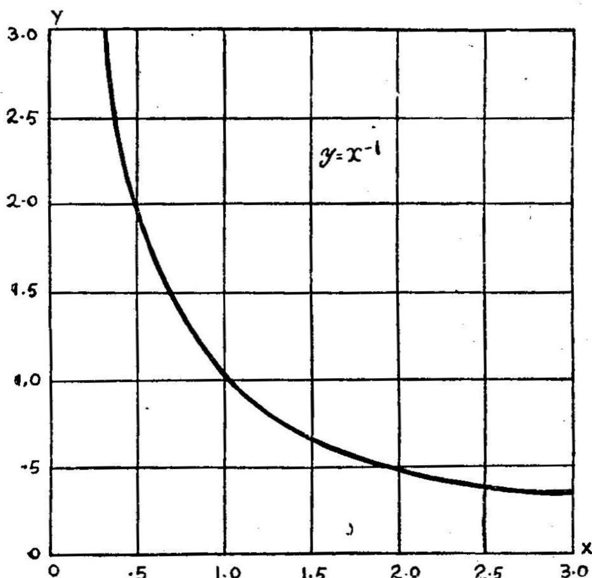
x	y (x^2)
—5	25
—4	16
—3	9
—2	4
—1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

2.5 படத்தில் இவ் வரைகோட்டைக் காணலாம்.

கணக்கு: $y=x^{-1}$ என்பதில் x-க்கு நேர் இருக்கும்போது வரைகோடு அமைக்க.

x	y (x^{-1})
$\frac{1}{3}$	**3**
$\frac{1}{2}$	**2**
1	**1**
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{5}$

இந்தச் சார்பலனின் வரைகோடு **2.6** படத்தில் காட்டியுள்ளது போன்று சம உபவளையமாக (equilateral hyperbola) இருக்கும் இதன் சமன்பாட்டை $y = \frac{1}{x}$ அல்லது $xy=1$ என்று எழுதலாம்.



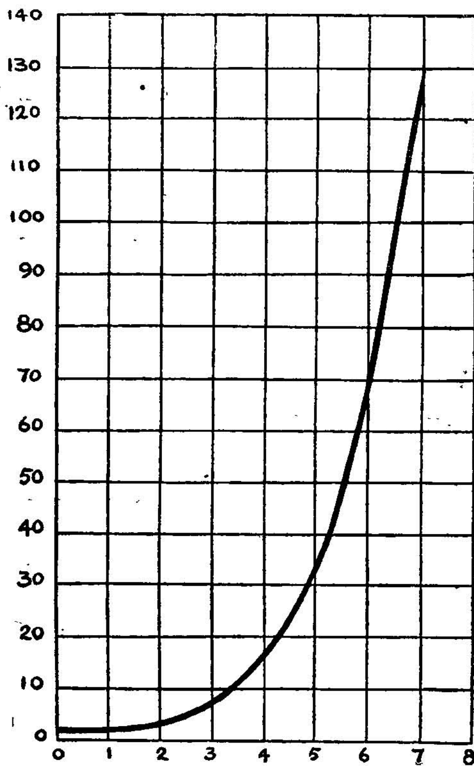
2.6. படம். சம உபவளையம் $y=x^{-1}$ என்பதின் வரைகோடு (x–ன் நேர் மதிப்புகளுக்கு)

இத்தகைய உறவுகளில் பெருக்குத் தொடரில் (geometric progression) x மாறும்போது, y-ன் மாற்றமும் பெருக்குத் தொடராக இருக்கும். அதனல் மேற்குறிப்பிட்ட எடுத்துக் காட்டான $y=x^2$ என்ற பரவளையத்தில் x-ன் மதிப்புகள் பெருக்

குத் தொடரில்[3] அமைந்தால், y-ன் மதிப்புகளும் பெருக்குத் தொடராக அமையும்.

x	1	2	4	8	16	32
y	1	4	16	64	256	1,024

$y=ab^x$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைவடிவமாக அமையும் சார் பலன்கள் பிறிதொருவகை. இவ்வகைச் சமன்பாடுகளில், மாறிகளில் ஒன்று அடுக்கில் (exponent) இருக்கும். இதுபோன்ற சமன்



2.7. படம் அடுக்கு வளைகோடு: (x ன் நேர் மதிப்புகளுக்கு) $y=2^x$ என்பதன் வரைகோடு

பாடுகளுக்கு வரையும் வரைகோடுகளை அடுக்கு வளைகோடுகள் (exponential curves) என்போம்.

[3] ஒவ்வோர் உறுப்பிலிருந்தும் அதற்கு அடுத்த உறுப்பினைப் பெறுவதற்கு மாறிலி ஒன்றால் பெருக்கவேண்டியிருந்தால் அத்தகைய தொடரைப் பெருக்குத் தொடர் என்போம்.

கணக்கு: x நேர் மதிப்புகளைப் (positive values) பெறும் போது $y=2^x$ என்பதின் வரைகோடு அமைக்க :

x	y (2^x)
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64

இந்த வரைவடிவத்தை 2.7 படத்தில் காணலாம்.

தொடர்ச்சியான (கூட்டுத் தொடரில் அமைந்த) பெருக்கங்களால் அதிகரித்துவரும் இரு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பை, ஒரு நேர்கோட்டால் குறிக்கலாம். பெருக்குத் தொடரில் வேறுபடுகின்ற உறவினைப் பெற்ற மாறிகளைப் பரவளையத்தாலோ உபவளையத்தாலோ குறிக்கலாம். அடுக்கு வளைகோடு ஒரு கலப்பினத்தின் பாற்பட்டது. ஒரு மாறி கூட்டுத் தொடரில் வளர, பிறிதொரு மாறி பெருக்குத் தொடரில் வளர்ச்சி அடையும் ஒரு வகை உறவை, இது காட்டுகிறது. மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் இவ்வுண்மையை விளக்கும்.

$y=a+bx$ என்ற எளிய ஒருபடி அமைப்பினை, x-ன் மேற்படிகளுக்கு விரிவுபடுத்தி, $y=a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots$ என்பது போன்ற பல்லுறுப்புச் சேர்ப்புக் கோவையை (polynomial) உண்டாக்கலாம். இங்கே ஒரே மாறியினால் உண்டான பல்லுறுப்புச் சேர்ப்புக் கோவை இருக்கிறது. y என்பது x-ன் சார்பலன் மட்டுமே. இவ்வகை உறவு இருக்கும்போது y-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பும், x-ன் பல படிகளில் அமைந்த பல உறுப்புகளிலிருந்து கணக்கிட்டுக் கூட்டித் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. (a என்ற மாறிலியைக் கூட ax^0 என்று கொள்ளலாம்.) y என்பது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட w, x, z என்பதுபோல பல மாறிகளினால் உருவான சார்பலனால், பல மாறிகளாலான பல்லுறுப்புச் சேர்ப்புக் கோவை கிடைக்கும். புள்ளியியல் ஆய்வுகளில் இவ்விரண்டு வடிவங்களும் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

காலவாரிச் சார்பலன்கள் மற்றுமொரு தனித்த வகையினை உருவாக்குகின்றன. இத் துறைகளுக்கே உரியவைகளாக இல்லாவிடினும்,

குறிப்பாக மின்சாரம், வானிலை ஆகியவற்றின் தொடர்பில் இதனைக் காணலாம். சார்பிலா மாறிகள் தொடர்ச்சியான மதிப்புகளைப்பெற, சார்ந்த மாறிகளின் மதிப்புகள் குறிப்பிட்ட ஒழுங்கான கால இடைவெளிகளில் திரும்பத் திரும்ப வருவதே இவ்வகை உறவுகளின் தனித் தன்மை. நெடுக்கை வளைகோடு (sine curve) இவ் வகையில் ஓர் அடிப்படை அமைப்பு; தொடர்ந்து வரும் எடுத்துக்காட்டில் இதன் விளக்கம் காண்க.

கணக்கு: $y = \sin x$ என்ற சார்பலனின் வரைகோட்டை வரைய.

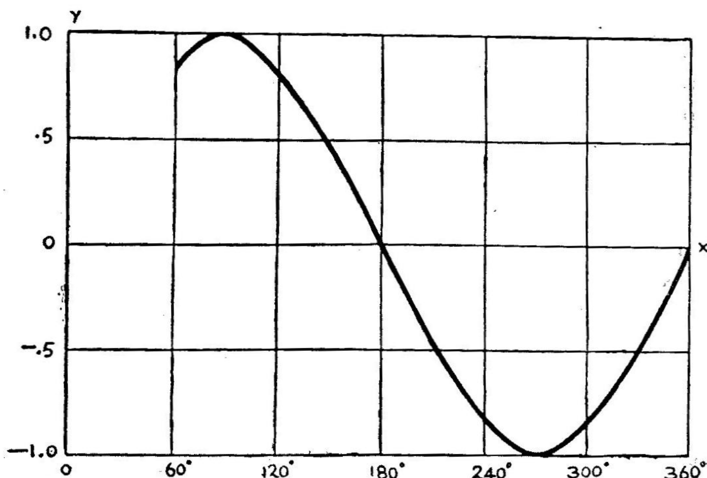
x (கோணம் டிகிரிகளில்)	y ($\sin x$)
0°	·000
30°	·500
60°	·866
90°	1·000
120°	·866
150°	·500
180°	·000
210°	— ·500
240°	— ·866
270°	— 1·000
300°	— ·866
330°	— ·500
360°	·000
390°	·500

மற்றும் இதுபோல.

இதன் வரைகோடு 2.8 படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

புள்ளியியல் முறைகளில் இரு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள உறவைக் கணிதமுறையில் அமைத்துக் காட்டவேண்டியது எத்துணை முக்கியமானதென்பது பின்னர் நன்கு புலனாகும். கண்டறிந்த விவரங்களுக்கு அடிப்படையான பருப்பொருள், பொருளாதார ஒழுங்குகளை ஆய்ந்து காண்பது ஓர் அடிப்படை நோக்கமாகும். மேலும் திட்டவட்டமாகக் கூறவேண்டுமானால், அந்த உறவுகளின் சமன்பாடுகளைக் கையாண்டு ஒரு மாறியின் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பு

களிலிருந்து மற்றொரு மாறியின் இயைந்த மதிப்புகளை மதிப்பீடு செய்ய இது பயன்படும். இந்நூல் முழுவதும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள



2·8. படம் எதிர்க்கை வளைகோடு
$y = \sin x$ என்பதன் வரைகோடு

எடுத்துக்காட்டுகள்மூலம், இக் குறிக்கோளினை நாம் எங்ஙனம் அடைகிறோம் என்பது தெளிவாகும்.

லாகிருதங்களும் வரைபடம் அமைப்பதில் அவற்றின் பயன்களும் (Logarithms and Their Use in Graphic Presentation)

லாகிருதங்கள் கணிதச் செயல் முறைகளில் மிகவும் முக்கியமான பங்குடையன. புள்ளி விவரங்களைத் திறம்படச் செப்பம் செய்வதற்கும் அவை பயனாகின்றன. லாகிருதங்களின் தன்மைகளையும் அவற்றைக் கையாண்டு கணிப்புகளை எங்ஙனம் எளிதாக்கலாம் என்பதையும் சுருங்கக் காண்போம். 10-ன் அடியாகத் தோன்றும் பொது லாகிருதங்களின் தன்மைகளைப் பற்றியே விரிவாக ஆராய்வோம்.

லாகிருதங்களின் தன்மைகள் (The nature of the logarithms): எல்லா எண்களையும் 10-ன் படிகளாக எழுத முடியும்.

அதாவது $1{,}000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$
$10{,}000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

இவை ஒவ்வொன்றிலும் 10-ன் படி (exponent), (எண்ணின் மேலே வலப்புறம் குறிக்கப்படும் சிறு எண்) 10 என்ற எண் எத்தனை தடவை பெருக்கப்படுகிறது என்பதைச் சுட்டுகிறது. 10-ன் படிப் பெருக்கங்களுக்கு, படி எப்பொழுதும் முழு எண்ணுக இருக்கும்; ஆனல், பிற எண்களுக்குப் படி பின்னமாக இருக்கும். எடுத்துக் காட்டாக 10-ஐ 2 படிக்கு உயர்த்த—அதாவது 10^2 என்பது 100-க்குச் சமமாகும். 10-ஐ 2·04139 படிக்கு உயர்த்த — அதாவது $10^{2.04139}$ என்பது 110-க்குச் சமமாகும்.

10-ன் படியை, அதாவது 10-ஐ எந்தப் படிக்கு உயர்த்தினல் குறிப்பிட்ட எண்ணுக்குச் சமமாகுமோ அதனை அந்த எண்ணின் லாகிருதம் என்கிறோம். 100-ன் லாகிருதம் 2, 110-ன் லாகிருதம் 2·04139, 998-ன் லாகிருதம் 2·99913. எந்த அடிப்படையின் மேல் வேண்டுமானுலும் லாகிருதங்கள் அமைக்கலாம் எனினும், இவை யாவும் 10-ன் அடியில் பிறந்தவை. பொதுவாக,

$a=b^c$ ஆனல்

$\log_b a = c$ ஆகும். அதாவது 'b அடிப் பிறந்த a-ன் லாகிருதம் c' எனப் படிக்க வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட எண், அடித்தளம், லாகிருதம் இவற்றுக்கிடையே உள்ள உறவை (பொது லாகிருதங்களைப் பயன்படுத்தும்போது) பின்வரும் உறவுகளால் எளிதில் மனத்திலிருத்தலாம்:

$$100 = 10^2$$
$$\log_{10} 100 = 2$$

ஒவ்வோர் எண்ணின் லாகிருதமும் இரு பாகங்கள் கொண்டது. ஒன்று லாகிருத முழு எண் (characteristic); மற்றது லாகிருத பின்னம் (mantissa). எண்ணைப் பார்த்த அளவிலேயே முன்னதைக் கண்டு கொள்ளலாம். பின்னதை லாகிருதப் பட்டியல்களைப் பார்த்து அறியலாம். தசமப் புள்ளியின் இட அமைப்புக்கேற்ப லாகிருத முழு எண்ணின் மதிப்பு மாறும். ஆனல், எண்களின் ஒரே வகையான தொகுப்புக்கு (தசமப் புள்ளியின் இட அமைப்பைப் புறக்கணித்து) லாகிருத பின்னம் ஒன்றுகவே இருக்கும். இதனைப் பின்வரும் எண் களின் மூலம் அறியலாம்.

$$\log 8{,}450 = 3{\cdot}92686$$
$$\log 845 = 2{\cdot}92686$$
$$\log 84{\cdot}5 = 1{\cdot}92686$$
$$\log 8{\cdot}45 = 0{\cdot}92686$$
$$\log 0{\cdot}845 = 9{\cdot}92686-10$$
$$\log 0{\cdot}0845 = 8{\cdot}92686-10$$

எந்த எண்ணுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணின் லாகிருதம் சமமாகிறதோ [இவற்றை எதிர் லாகிருதங்கள் (anti-logarithms) என்பர்] அவற்றைக் காணும் முறை இதுதான். லாகிருத பின்னம், (mantissa) எண்களில் வரிசையைத் தீர்மானிக்கும்; லாகிருத முழு எண் (characteristic) தசமப் புள்ளியின் இடத்தினைத் தீர்மானிக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, 2·17609 என்பதன் எதிர் லாகிருதத்தினைக் காணும்போது, லாகிருதப் பட்டியலிலிருந்து 1500 என்ற எண் ·17609 என்ற பின்னத்திற்கு உரியது என்பதைக் காண்கிறோம். லாகிருத முழு எண் 2 ஆதலால் நமக்குத் தேவையான எண் 100-க்கும் 1,000-க்கும் இடையில் இருக்கும். எனவே இதன் மதிப்பு 150.

கீழ்வரும் தொகுப்பைக் கவனித்தால் 10-ன் படிகளாலான தொடருக்கு இசைந்த எண்களைக் காண்போம். அதிலிருந்து 10-ன் படிகளுக்கும் அவற்றின் லாகிருதங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு புலனாகும். இதிலிருந்து வேண்டிய லாகிருத முழு எண்ணை விரைவில் தீர்மானித்துவிடலாம்.

·0001	·001	·01	·1	1	10	100	1,000	10,000
10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}

கீழ் வரிசையில் 10-ன் படிகளாகக் குறிக்கப்பட்டுள்ளவை மேல் வரிசை எண்களின் லாகிருதங்களாகும்.

0 விருந்து 1 வரை உள்ள எண்களின் லாகிருதங்கள் எதிர் (negative) என்பதைக் கவனிக்க. அதனால் 0·845 என்பதன் லாகிருதம்—1 + ·9286; அதாவது 9·926686—10. எனவே, பூஜ்யத்திலிருந்து (zero) எண்ணிலி (infinity) வரை உள்ள எல்லா நேர் எண்களுக்கும் (possitive numbers) லாகிருதங்கள் காணும்போது எல்லா நேர், எதிர் இருவகை எண்களுமே கிடைத்துவிடுகின்றன. எனவே, எதிர் எண்களுக்கு நேர் எண்ணோ எதிர் எண்ணோ லாகிருதமாக விருக்க முடியாது.

இதுபோல, எண்களை 10-ன் படிகளாக மாற்றிக்கொண்டால், பெருக்கல், வகுத்தல், படியாக அமைத்தல், படிமூலம் காணல் ஆகிய எண்கணிதச் செயல்முறைகள் எளிமையாக ஆகிவிடுகின்றன. இதுவே லாகிருதங்களின் பயன்.

எண்களைப் பெருக்குவதற்கு அதன் லாகிருதங்களைக் கூட்டுக

சினைகளுடைய (factors) லாகிருதங்களின் கூடுதல், அவற்றின் பெருக்கத்தின் லாகிருதமாகும். பொதுவாகக் கூறினால்,

$$a^b \times a^c = a^{(b+c)}$$

விளக்க வேண்டுமானல், $a = 10$, $b = 2$, $c = 3$ என்ற மதிப்புத் தர :

$$10^2 \times 10^3 = (10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10) = 10^5 = 100,000$$
$$100 \times 1,000 = 100,000$$

ஓர் எண்ணை மற்றென்றல் வகுக்க, முன்னதன் லாகிருதத்திலிருந்து பின்னதன் லாகிருதத்தைக் கழிக்கவும். மிகுதியே ஈவின் லாகிருதமாகும். பொதுவாகக் கூறினல் :

$$a^b \div a^c = a^{(b-c)}$$

விளக்க வேண்டுமானல், $a=10$, $b=5$, $c=2$ என்ற மதிப்புத் தர,

$$10^5 \div 10^2 = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10} = 10^3 = 1,000$$
$$100,000 \div 100 = 1,000$$

ஓர் எண்ணை ஒரு குறிப்பிட்ட படிக்கு உயர்த்த அந்த எண்ணின் லாகிருதத்தைப் படியினல் பெருக்குக. கிடைப்பது விடையின் லாகிருதமாகும்.

பொதுவாகக் கூறினல்,

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

விளக்க வேண்டுமானல், $a = 10$, $b = 3$, $c = 2$ என்ற மதிப்புத் தர,

$$(10^3)^2 = (10 \times 10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10) = 10^6 = 1,000,000$$
$$1,000^2 = 1,000,000$$

ஓர் எண்ணின் மூலத்தைக் (root) கண்டுபிடிக்க, அந்த எண்ணின் லாகிருதத்தை மூலப்படியினல் (index of the root) வகுக்கவும். ஈவு, விடையின் லாகிருதமாகும்.

பொதுவாகக் கூறினல்,

$$\sqrt[b]{a^c} = a^{\left(\frac{c}{b}\right)}$$

விளக்க வேண்டுமானல், $a = 10$, $b=3$, $c = 6$ என்ற மதிப்புத் தர,

$$\sqrt[3]{10^6} = 10^{\frac{6}{3}} = 10^2 = 100$$
$$\sqrt[3]{1,000,000} = 100$$

இதுவரை கூறியவற்றின் தொகுப்பு:

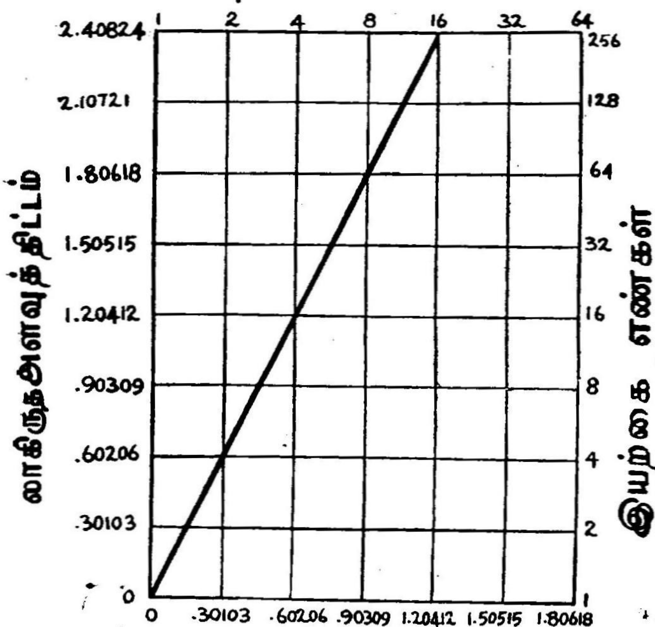
$$\log (a \times b) = \log a + \log b$$
$$\log (a \div b) = \log a - \log b$$
$$\log a^b = b \times \log a$$
$$\log \sqrt[b]{a} = \log a \div b$$

லாகிருத சமன்பாடுகள் (Logarithmic equations): செங்குத்து ஆயங்களைப் பயன்படுத்தி விவரங்களுக்கு வரை வடிவம் தருகின்ற முறைகளும், அவற்றின் பயன்களும் முன்னரே விளக்கப்பட்டன. பல சமயங்களில் இயற்கை எண்களைவிட அவற்றின் லாகிருத மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி, புள்ளிகளைக் குறிப்பது விரும்பத்தக்கதாக இருக்கிறது. இதன் பயனுல் விவரங்களின் முக்கிய உறவுகள் மிகத் தெளிவாக வெளிக்காட்டப்படுகின்றன; விவரங்களைச் சுருக்கவும் எளிதாகக் கையாளவும் வசதி ஏற்படுகிறது. குறிப்பாகக் கூறினுல், லாகிருதங்களைக் கையாண்டு சிக்கலான வளைகோட்டு அமைப்பை நேர்கோட்டு அமைப்பாக ஆக்க முடியுமாஞல், விவரங்களைக் கையாள்வதும் விளக்கம் தருவதும், குறிப்பிடத்தக்க அளவு எளிமையாகி விடுகின்றன.

முன்னரே கூறியபடி நேர்கோட்டுச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் $y=a+bx$; இதில் மாறிலிகளான a-ம் b-ம் முறையே y துண்டையும் (y-intercept), சாய்வையும் (slope) குறிக்கின்றன. உயர்ந்த படிகளில் அமைந்த சமன்பாட்டை, லாகிருதங்களைக் கையாண்டு, x அல்லது y அல்லது இரண்டுக்குமே $\log x$, $\log y$ ஆகியவற்றை மதிப்புக்கொடுத்து, எளிமையான வடிவில் அமைக்கலாம்.

$y = x^2$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொண்டு இதனை விளக்குவோம். செங்குத்து ஆயங்களைக் கையாண்டு இதனை உருவாக்கும்போது, நமக்குக் கிடைக்கின்ற வளைகோடு பரவளைய அமைப்புடையது (2.5 படம் காண்க). லாகிருத அமைப்பில் இச் சமன்பாட்டை $\log y = 2 \log x$ என எழுதலாம். இப்போது இச் சமன்பாட்டை $\log y$, $\log x$ ஆகிய மாறிகளைக் கொண்டதாகக் கருதினுல், இது ஒருபடிச் சமன்பாடு அமைப்புடையதாகிறது. 2.9 படத்தில் $\log x$-க்கு நேர் மதிப்புகள் தந்தால் கிடைக்கும் வரை படத்தைக் குறித்துள்ளோம். படத்தின் வலப்புறமும் மேற்புறமும் லாகிருத எண்களுக்கு இசைந்த இயற்கை எண்கள் அளவுத் திட்டத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. அளவுத் திட்டத்தில் காணப்படு

கின்ற இயற்கை எண்கள் பெருக்குத் தொடரிலும், அவற்றின் லாகிருதங்கள் கூட்டுத் தொடரிலும் அமைந்துள்ளன.



2·9. படம் LOG y=2 LOG x என்பதன் வரைகோடு ($y=x^2$ என்ற சமன்பாட்டின் லாகிருத அமைப்பு)

படத்தில் நிலமட்டத்தில் (vertical) சம அளவுள்ள தூரங்கள், லாகிருத அளவு அச்சில் சமஅளவுள்ள சார்பின் மிகைபாடுகளைக் (absolute increments) குறிக்கும்; படுக்கை மட்டத்தில் (horizontal) சம அளவுள்ள தூரங்கள், இயற்கை எண்களின் அளவு அச்சில் சம அளவுள்ள சதவீத மிகைபாடுகளைக் குறிக்கும்.

$y = 5x^3$ என்ற சமன்பாட்டையும் முன்கூறிய மாதிரியே $\log y = \log 5 + 3 \log x$ என்ற நேர்கோட்டு வடிவத்தில் குறுக்கி அமைக்க முடியும். அதேபோன்று $y = ax^b$ என்ற அமைப்பைப் பெற்றுள்ள—அதாவது எல்லா எளிமையான பரவளையங்களையும் உப வளையங்களையும் — $\log y = \log a + b \log x$ என்ற நேர்கோட்டு

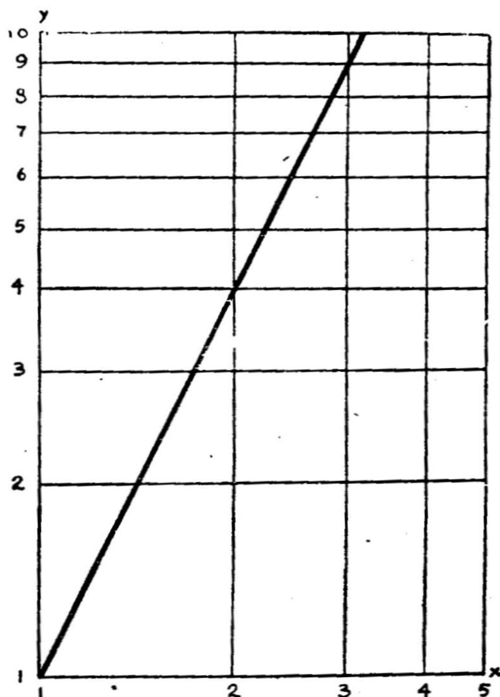
வடிவத்தில் மாற்றி அமைக்கலாம். வரை வடிவ முறையில் இதனை அமைக்கையில் log y-ஐயும் அதற்கு இசைந்த log x-ஐயும் புள்ளிகளாகக் குறிக்கவேண்டும்.

$y = ab^x$ என்ற வகையைச் சேர்ந்த சமன்பாடு வேறுவகைப்பட்டது. இதன் வரிவடிவம் அடுக்கு வளைகோடு (exponential curve) எனப்படுகிறது. இதனை லாகிருத வடிவத்தில் $\log y = \log a + x \log b$ என எழுதலாம். இதுவும் நேர்கோட்டு வகையைச் சேர்ந்ததே. log a-ம் log b-ம் இரு மாறிலிகள். x-ம் log y-ம் மாறிகள். x-ன் இயற்கை மதிப்பையும் சமன்பாட்டிலிருந்து அதற்கு இசையக் கிடைக்கும் y-ன் மதிப்பின் லாகிருதத்தையும் இணைத்துப் புள்ளிகளாக அமைத்தால், ஒரு நேர்கோடு கிடைக்கும். இவ்வகை வளைகோடு ஒன்று கீழே விவாதிக்கப்பட்டு விளக்கப்பட்டுள்ளது.

லாகிருதப் படங்களும் அரைலாகிருதப் படங்களும் (Logarithmic and semilogarithmic charts): லாகிருதங்களை வரை படத்தில் குறிப்பதில் சில இடர்ப்பாடுகள் நேர்கின்றன. நிறையப் புள்ளிகள் இருக்குமாயின் அவற்றிற்கு லாகிருதங்கள் காண்பது தொல்லையாகவிருக்கும். அதோடு நாம் எந்த மூலமதிப்புகளைப் பற்றி அக்கறை காட்டுகிறோமோ, அவை படத்தில் குறிப்பிடப்படுவதில்லை. இக் குறைபாடுகளைத் தவிர்ப்பதற்கு இயற்கை எண்களின் அளவுத் திட்டத்திற்குப் பதிலாக லாகிருத அளவில் அமைந்த அளவுத் திட்டத்தைப் படத்தில் பயன்படுத்தலாம். ஆனால், படத்தில் குறிப்பிடுகையில் லாகிருதங்களில் அவைகளைக் குறிப்பிடுவதற்குப் பதிலாக இயற்கை எண்களிலேயே குறிப்பிடவேண்டும். நழுவுக் கணிப்பான் (slide rule) அமைப்பிலேயே பயனாகும் முறைக்கு ஒத்தது இது. எனவே, அளவையாக இயற்கை எண்கள் குறிக்கப்பட்டிருந்தாலும், அந்த எண்கள் குறிப்பது அவற்றின் லாகிருதங்களுக்குத் தகவான தூரமே. 2.10 படத்தில் அதுபோன்ற வரைபடம் ஒன்று தரப்பட்டுள்ளது. $y = x^2$ என்ற சமன்பாட்டைக் குறிக்கும் வரைபடம் அது.

இதிலிருந்து சிறிது வேறுபட்ட வகையைச் சேர்ந்த வரைபடமொன்றும், புள்ளியியல் செயல் முறைகளுக்குப் பயனாகி வருகிறது. இதில் படுக்கை மட்ட அச்சில் இயல் எண்களாலும், குத்து மட்ட அச்சில் லாகிருத முறையிலும், அளவு வரை செய்யப்பட்டிருக்கும். இது x வழியே இயற்கை எண்களையும் y வழியே லாகிருதங்களையும் குறிப்பதற்கு ஈடாகும். முன்னரே குறிப்பிட்டபடி, இவ்வகையான அளவுத் திட்டத்தின்மூலம் அடுக்கு வளைகோட்டை, நேர்கோடாக

மாற்றுகிறது. இத்தகைய அரைலாகிருத வரைதாளை லாகிருதப் பட்டியலின் துணைகொண்டோ, நழுவுக் கணிப்பானைக் கொண்டோ உருவாக்கமுடியும். முன்கூட்டியே தயார் செய்யப்பட்டவைகளும்



2·10. படம் $y=x^2$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைகோடு லாகிருத அளவுத்திட்ட வரைதாளில் குறிக்கப்பட்டது

விலைக்குக் கிடைக்கும். மாறிகளில் காலம் ஒரு மாறியாகவுள்ள சமூகப் பொருளாதாரப் புள்ளிவிவரங்களை வரைபடமாக அமைப்பதற்கு இது மிகவும் பயன்படும். இத்தகைய படங்களில் காலத்தை இயற்கை அளவையாகக் குறிப்பர்.

இவ்வகை வளைகோட்டுக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டாகக் கூட்டுவட்டி வீதத்தைக் கொள்ளலாம். வட்டி வீதமாக r-ஐயும், ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கையாக x-ஐயும், அசலாக p-ஐயும் x ஆண்டுகளின் முடிவில் அசலும் கூட்டு வட்டியும் சேர்ந்த கூடுதலாக y-ஐயும் குறித்தால்,

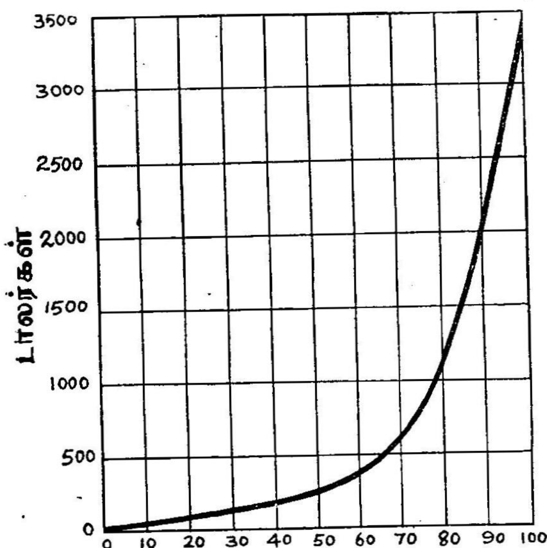
$$y = p\,(1 + r)^x$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். இதனை லாகிருத வடிவத்தில் அமைக்க, $\log y = \log p + x \log (1+r)$ என்ற நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

2.11 படத்தில் 6 சதவீதக் கூட்டு வட்டியில் 10 டாலர் வளர்வதை வளைகோடாக இயற்கை அளவுத்திட்டதில் வரைந்து காட்டப்பட்டுள்ளது. இது,

$$y = 10\,(1 + \cdot 06)^{x}$$

என்ற அடுக்குச் சமன்பாட்டின் வரை வடிவம்; y என்பது, x ஆண்டுகளின் இறுதியில் அசலுடன் வட்டி கூடிய தொகை; 2.12 படத்தில்

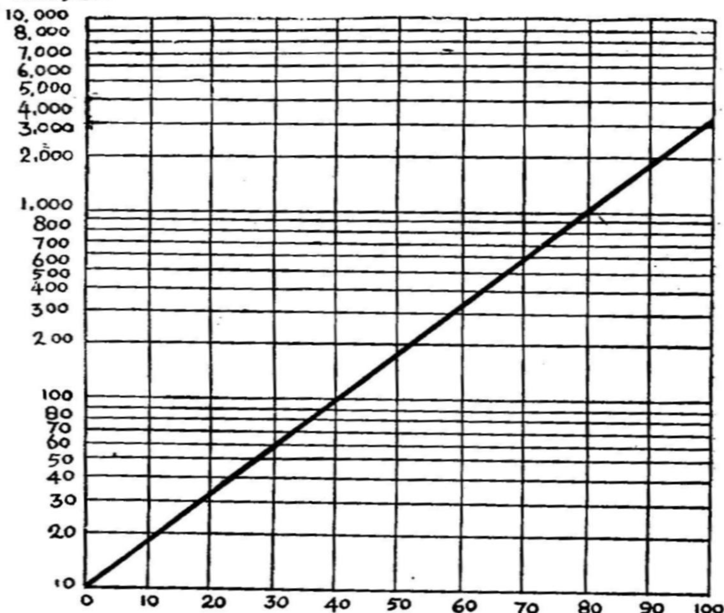


௨.11. படம் கூட்டு வட்டி விதி 100 ஆண்டுகளில் 6 சத வீத கூட்டு வட்டிக்கு $ 10.00 ன் வளர்ச்சி (எண் கணித அளவுத்திட்டத்தில் குறிக்கப்பட்டது)

இதே விவரம் அரை லாகிருத தாளில் குறிக்கப்பட்டிருக்கிறது. இதில் அடுக்கு வளைகோடு, நேர்கோடாக உருவம் பெற்றுவிடுகிறது.

அரை லாகிருதத் தாள்கள், அடுக்கு வளைகோட்டை நேர்கோடாக அமைப்பதற்கே பயனாகிறது என்பதில்லை. இன்னும் பல

வகை விவரங்களுக்கும், இந்த வகையான வரைபடங்களைப் பயன் படுத்தும்போது, விவரங்களின் சிறப்புப் பண்புகள் நன்கு வெளியா



உ·12. படம். கூட்டு வட்டி விதி : $ 10·00, 6 சதவீதக்கூட்டு வட்டியில் 100 ஆண்டுகளில் பெறும் வளர்ச்சி (அரை லாகிருத அல்லது வீத அளவுத் திட்டத்தில் குறிக்கப்பட்டது)

கின்றன. கீழே இவற்றின் பயன்கள் விரிவாக விளக்கப் படுகின்றன.

விளக்கப் படங்களின் வகைகள்

புள்ளி விவர ஆய்வுகளின் பயனைக் கிடைத்த விவரங்களையும், கண்டறிந்த விவரங்களையும் அளவுகளாகப் பெற்றபின், விவரங்களைப் பகுப்பாய்வு (analysis) செய்வதற்கும், அவற்றிலிருந்து விளக்கம் தருவதற்கும், விவரங்களை விளக்கப்படமாக அமைப்பதே முதல் நடவடிக்கையாகும். கண்டறிந்த விவரங்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்புகளை மேலும் ஆராய்வதற்கு விளக்கப் படங்கள் வழி செய்வதால், இவற்றுக்கு அறிவியல் முறையிலே மதிப்புத் தரவேண்டும்.

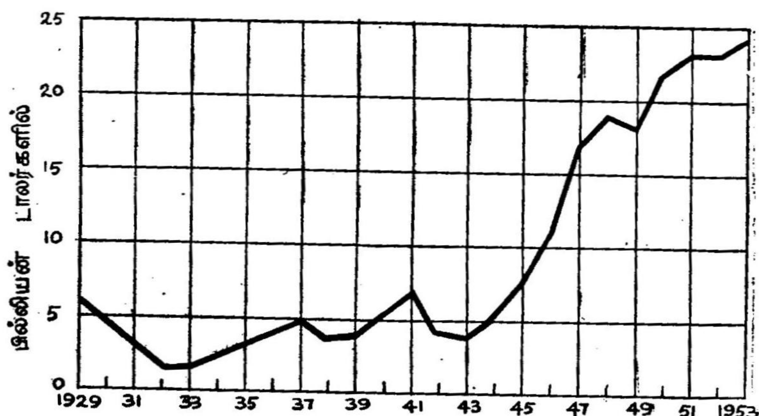
மேலும், முடிவுகளைப் படங்களாக வடிவம் தந்து காட்டும்போது விவரங்கள் மனத்தில் உருப்பெறுகின்றன ; படங்கள் உடனடியாகப் பயன்தருவன : பத்தி பத்தியாக அமைக்கப்பட்டுள்ள எண்களை அப்படியே ஆராய்வது கடினமான செயலாகும் ; ஆனால் அதே விவரங்களை விளக்கப்படமாக அமைக்கும்போது, அவை விரைவில் எளிதாகப் புரிந்துகொள்ளக்கூடியதாக விருக்கின்றன.

இன்றைய பொறியியல் கலைஞரும், புள்ளியியல் கலைஞரும் பயன் படுத்தும் பலவகை வரைபடங்களைப்பற்றி விரிவாகக் கூறுவது இந்நூலின் குறிப்பன்று. எனினும் விளக்கப் படங்களை உருவாக்கும் போது மேற்கொள்ளவேண்டிய முக்கிய கோட்பாடுகள் சிலவற்றைச் சுருங்கக் கூறுவோம். அன்றாட வழக்கில் பயன்படும் சில முக்கிய மான வரைபட வகைகளையும் இங்கே தருவோம் ; இந்நூலின் பின்வரும் அத்தியாயங்களில் பிற எடுத்துக்காட்டுகள் காணப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் தன்மை, அவற்றின் பயன் இவற்றைப் பொறுத்தே அமைக்கவேண்டிய விளக்கப் படத்தின் வகையினைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட சிக்கல் ஒன்றின் விவரங்களையே, பலவகையான படங்களின்மூலம், பலவித மாக வெளியிடுதல் இயலும் ; எனினும் அவ் விவரங்களுக்கு மிகவும் ஏற்புடைய வகையைத் தேர்ந்து காணவேண்டும். மேலும் கொடுக்கப் பட்டுள்ள விவரங்களுக்குச் சில படவகைகள் சிறிதும் பொருத்த மில்லாமல் இருக்கலாம். எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் தன்மையை மனத்தில் கொண்டே, பயன்படுத்தப்போகும் படவகை யைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். இப்படம் எந்த பயனைக் கருதித் தயார்செய்யப்படுகிறதென்பது இதைவிட முக்கியமானது. பொதுவாக வழக்கத்திலிருக்கும் பல்வகைப் படங்களில் ஒவ்வொன்றும் சில குறிப் பிட்ட நோக்கங்களுக்குப் பொருத்தமுடையதாகவிருக்கும். விவரங் களின் தனித்தன்மைகள் சிலவற்றை வெளியிடுவதற்காக விளக்கப் படம் தேவையாக இருக்கலாம் ; அல்லது அவற்றுக் கிடையேயுள்ள தொடர்புகள் சிலவற்றை வலியுறுத்துவதற்காக விளக்கப் படம் தேவைப்படலாம். எல்லாக் காரியங்களுக்கும் பயனுகுமாறு ஒரே படத்தை அமைத்துவிட முடியாது. மிகவும் சிறந்த படத்தைத் தேர்ந்தெடுக்குமுன் அது எந்த நோக்கத்தோடு வரையப்பட்டிருக் கிறது என்பதை முடிவுகட்டவேண்டும். கீழே விளக்கப்பட்டுள்ள சில முக்கியமான வகைகள், ஏற்புடைய அமைப்பைத் தேர்ந்தெடுக்க உதவி செய்யும்.

காலத் தொடர்வரிசையை வரைபடம் அமைத்தல்

காலத் தொடர்வரிசையை வரைபடமாக அமைக்கும்போது, நாம் கீழ்க்கண்டவற்றைக் கருத்தில் கொள்ளவேண்டும். விவரங்கள் குறிக்கும் செய்திகள், காலரீதியில் எங்ஙனம் மாற்றம் அடைகின்றன ? அவற்றின் பொதுவான போக்கு எப்படி அமைந்திருக்கிறது? பொதுவான போக்கிலிருந்து எந்த அளவுக்குத் தனி மதிப்புகள் ஏற்ற இறக்கமடைகின்றன ? தனித்த மாற்றங்களை (absolute variations) மட்டும் வலியுறுத்துதல் போதுமானால்—



2.13.படம். உற்பத்தியாளரின் நிலைத்த சாதனங்களுக்கான செலவு 1929 – 1953 கால கட்டத்தில் — அமெரிக்காவில்.*

* ஆதாரம் : யு. எஸ். வணிகத்துறை : வாணிகப் பொருளாதார அலுவலகம்.

அதாவது வெவ்வேறு காலங்களில் தொடரின் மதிப்புகளின் வேறுபாட்டைத் தனித்த அலகுகளில் குறிப்பது போதுமானால்—2.13 படத்தில் காணப்படுவதைப்போல, சாதாரண வரைபடம் அமைப்பதே போதும். இந்த வரைபடம், 1929—1953 கால இடைவெளியில் அமெரிக்காவில் உற்பத்தியாளர்கள், நீடித்து உழைக்கக் கூடிய சாதனங்களுக்காக ஆண்டுதோறும் செலவழித்த மொத்த தொகையினைக் குறிக்கிறது. தனியார் துறையில் செய்யப்பட்ட நிகர முதலீட்டில் இது ஒரு பெரும் பங்கு ஆகும். படத்தின் இரண்டு அச்சுகளின் வழியேயுமுள்ள அளவுத் திட்டம் இயற்கணித ரீதியில் அமைந்துள்ளது. பல ஆண்டுகளிலும் ஆன செலவுத் தொகைகள் புள்ளிகளாகக் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றை ஆராய்ந்து மேலும் விளக்கம் பெறுவதற்காக இவற்றைத் தொடர் நேர்கோடுகளால் இணைக்கிறோம். 1929–ல் ஏற்பட்ட பிற்போக்கினால் (recession), சாதனங்கள் வாங்குவது குறைவுபட்டதையும், அடுத்த பத்து

ஆண்டுகளில் ஏற்பட்ட ஏற்ற இறக்கங்களேயும், போருக்குப் பிந்திய ஆண்டுகளில் முன்னர்க் கண்டிராத அளவு உச்ச நிலேக்கு உயர்வதையும் விளக்கப்படம் தெளிவாகக் காட்டுகிறது. வரைபடங்களே அமைப்பதில் பின்கண்ட பொதுவிதிகளேக் கவனிக்கவும் :

1. குறிக்கப்படுகின்ற செய்தி என்ன என்பது பற்றிய விளக்கத்தையும் கால அளவையும் தலேப்பு வெளியிட வேண்டும்.

2. குத்து அளவைத் திட்டம் 0-கோட்டிலிருந்து துவங்க வேண்டும். அப்போதுதான் ஏற்ற இறக்கங்களின் அளவைக் குறித்து சரியான கருத்தைப் பெறமுடியும்.

3. 0-கோடும், குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளே இணக்கும் கோடும், அச்சுக் கோடுகளேவிட அழுத்தமாக வரையப்பட வேண்டும்.

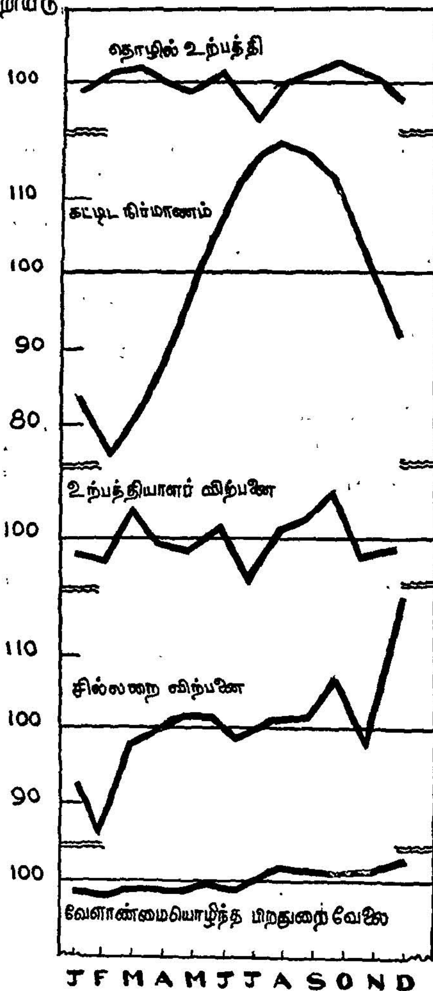
4. அளவுத் திட்டத்தின் எண்களேப் படத்தின் இடப்புறத்திலும், அடியிலும் குறித்தல் வேண்டும். குத்து அளவைத் திட்டத்தை வலப்புறத்திலும் குறித்துக் காட்டினுல் படத்தை எளிதில் புரிந்துகொள்ள உதவியாக இருக்கும். அடிமட்டத்தை அடிப்படையாகவோ, படத்தின் வலப்புற முனேயை அடிப்படையாகவோ கொண்டு, படிப்பதற்கு வசதியாக எண்களேக் குறிக்கவேண்டும்.

2.14 படத்தில் காணப்படுவது வேறுவகையாகப் பயன்படுகின்ற ஒரு நேர்கோட்டு வரைபடம். ஐந்து அடிப்படைப் பொருளாதாரத் தொடர் வரிசைகளில், பருவ காலங்களில் ஏற்படும் மாற்றங்களின் (seasonal variations) அமைப்பை இங்கே குறித்துள்ளோம். 100 என்ற அடிக்கோட்டின்மீது குறியீட்டு எண்களின் மாற்றங்களேக் குறித்துக் காட்டியுள்ளோம். ஒவ்வொரு தொடருக்கும் இவை சராசரி ஆண்டு மதிப்பைக் காட்டுகின்றன.[4] இந்த அமைப்பின் வரைபடங்களே இணயாக அமைத்துக்காட்டியிருப்பதால் பருவ கால மாற்றங்களினுல் ஐந்து முக்கியத் துறைகளில் ஏற்படும் கூரிய முரண்பாடுகள் வெளிப்படையாகத் தெரிகின்றன.

வீத வரைபடங்களின் பயன்கள் : தனித்த மாறுபாடுகளே விட ஒப்பீட்டு மாறுபாடுகளே அறிவதில் நாம் அக்கறை காட்டினுல் அரை லாகிருத வகையைச் சேர்ந்த படத்தைப் பயன்படுத்தவேண்டும்; அதாவது, y அச்சில் லாகிருத முறையிலும் x அச்சில் இயற்

[4] கால மாற்றங்களுக்கு ஏற்ப குறியீட்டு எண்களே அமைக்கும் முறை 11ஆம் அத்தியாயப் படத்தில் தரப்பட்டுள்ளது.

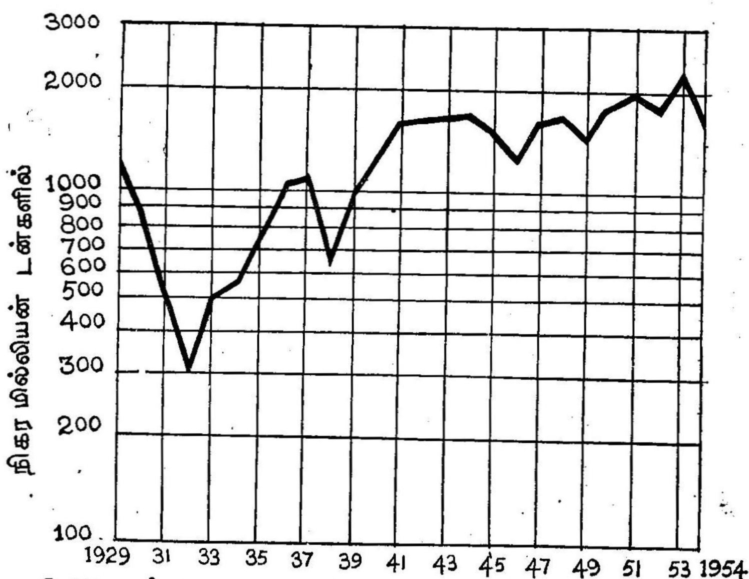
கணித முறையிலும் அளவுத் திட்டமிடப்பட்ட படத்தைப் பயன் படுத்த வேண்டும். இயற்கணித ரீதியில் அமைந்த படங்களில்



உ.14. படம். பொருளாதாரச் சுட்டிக்காட்டிகள் (INDICATORS) ஐந்தின் பருவகால (SEASONAL) இயக்கம்

* ஆதாரம்: பிலடெல்பியா ஃபெடரல் ரிசர்வ் பேங்க் வெளியிடும் பிஸினஸ் ரிவ்யூ (Business Review) 1954, மே இதழில் வெளியான விளக்கப் படம்.

சமமான சார்பிலா மாற்றங்கள் சமமான குத்துத் தொலைவுகளால் குறிக்கப்படும் என்பதையும், இதற்கு மாறாக அரை லாகிருத படத்தில் சமமான சராசரி மாற்றங்கள், சமமான குத்துத் தொலைவுகளால் குறிக்கப்படும் என்பதையும் முன்னரே குறிப்பிட்டோம். பொதுவாக, ஒரு மாற்றத்தின் சிறப்பு அம் மாற்றம் எந்த அடிப்படையிலிருந்து அளக்கப்படுகிறதோ, அதைப் பொறுத்தே அமைகிறது. இதுவே, அரை லாகிருத விளக்கப்படத்தை அல்லது வீத வரைபடத்தை, காலத் தொடர்வரிசையினை வெளியிடப் பயன்படுத்துவதற்கு முக்கிய காரணமாகும். அதாவது 100 என்ற அடிப்படையிலிருந்து 100 அதிகரிப்பது, 10,000 என்ற அடிப்படையிலிருந்து 10,000 அதிகரிப்பதற்குச் சமம். இந்த இரண்டு மாற்றங்



உ.15. படம். 1929 – 1954 வரை அமெரிக்க நாட்டில் எஃகு வார்ப்புகள் பாளங்கள் ஆகியவற்றின் வாரசராசரி உற்பத்தி (லாகிருத அளவுத் திட்டத்தில் குறிக்கப்பட்டது)

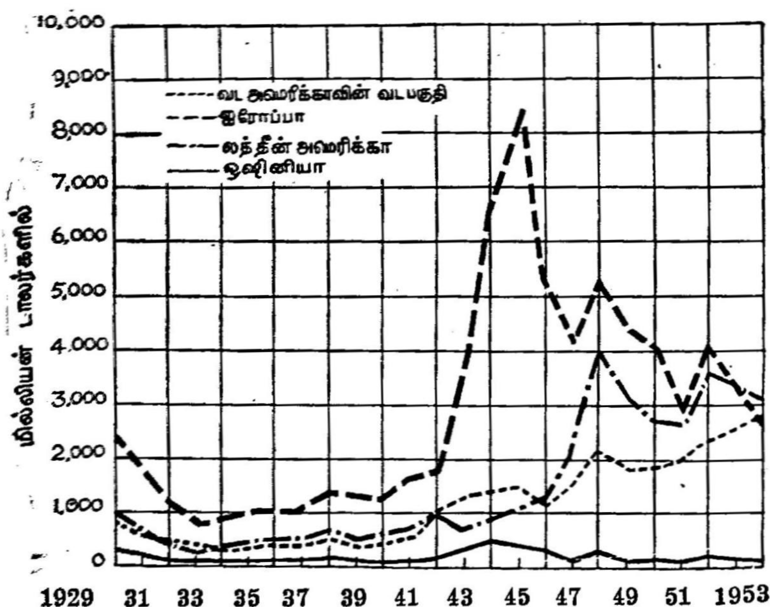
*ஆதாரம் : அமெரிக்கன் ஐயர்ன் அண்டு ஸ்டீல் இன்ஸ்டிடியூட் (American Iron and Steel Institute).

களிலும் அதிகரிப்பு 100 சதவீதமாகும். ஆனால், இரண்டாவது எடுத்துக்காட்டில் தனித்த அதிகரிப்பானது, முதலதைவிட 100 மடங்கு அதிகம். இந்த இரண்டு மாற்றங்களும் இதே விகிதத்தில்

இயற்கணித வரைபடத்தில் காட்டப்படும். ஆனால், இவை இரண்டும் அரை லாகிருதப் படத்தில் சமமான சிறப்புடன் காட்டப்படும்.

அத்தகைய ஒரு விளக்கப்படம் 2.15ஆம் வரைபடத்தில் காட்டப் பட்டுள்ளது. இதில் 1929-லிருந்து 1954 வரை அமெரிக்காவில் எஃகு உற்பத்தியின் போக்கு தரப்பட்டுள்ளது. தனித்த அளவுகளே (absolute magnitudes) குறிக்கப்பட்டிருப்பினும், ஆண்டுக்கு ஆண்டு ஏற்படுகின்ற மாற்றங்களைச் சார்ந்தவைகளின் வீதங்களாக வெளி விடும் வகையில் குத்து அளவுத் திட்டம் அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது.

2.16 படத்தையும், 2.17 படத்தையும் ஒப்பு நோக்க, வீத அமைப்பு அல்லது லாகிருத அமைப்பின் குறிப்பிடத்தக்க சிறப்பு



2.16. படம். 1929-1953 கால கட்டத்தில், தேர்ந்து தொகுக்கப் பட்ட ஐந்து கண்டப் பகுதிகளுக்கு, அமெரிக்காவின் ஏற்றுமதிகள். *

*ஆதாரம்: பீரோ ஆகிப் சென்சஸ், யு. எஸ். டிபார்ட்மென்ட் ஆகிப் காமர்ஸ் (1953-54-ல் வெளியான நேஷனல் இண்டஸ்ட்ரியல் கான்ஃபெரன்ஸ் போர்டாருடைய Economic Almanac-ஆம், 1953-ல் வெளியான Statistical Abstract of the U.S.-ஆம் சுருக்கமாக வெளியிட்டது).

கள் தெரியவரும். இவற்றில் 1939-லிருந்து 1953 வரை நான்கு பெருங்கண்டங்களுக்கு அமெரிக்க நாட்டின் இறக்குமதி குறிக்கப் பட்டுள்ளது. இந்த நான்கு தொடர்வரிசைகளையும் ஒரே வரை

மில்லியன் டாலர்களில்

10,000 8000 6000 5000 4000 3000 2000 1000 800 600 500 400 300 200 100 80 60 50 40 30

1929 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 1953 X

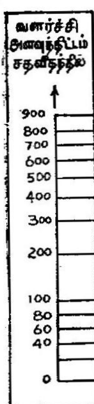
ஐரோப்பா

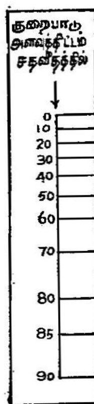
அமெரிக்கா

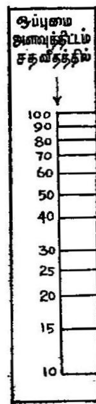
லத்தீன்

வட அமெரிக்காவின் வட பகுதி

ஆஸியா







2.17. படம்.

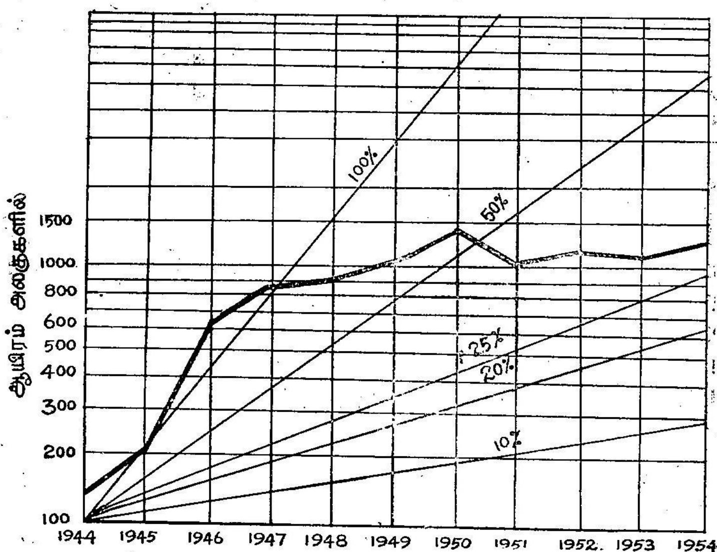
1929—1953 காலகட்டத்தில் தேர்ந்து தொகுக்கப்பட்ட ஐந்து கண்டப் பகுதிகளுக்கு அமெரிக்காவின் ஏற்றுமதிகள். வளர்ச்சி, குறைபாடு, ஒப்புமை ஆகிய அளவுத் திட்டங்களுடன் அரை லாகிருதத் தாளில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

படத்தில் இயற்கணித அடிப்படையில் குறிப்பிடவேண்டுமானல், மிகப் பெரிய குறிப்பான 1944-ல் ஐரோப்பாவுக்கு இறக்குமதி செய்த மதிப்பாகிய $ 9,344,000,000 என்பதனையும் உள்ளடக்குமாறு ஓர் அளவுத் திட்டத்தினைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். அளவுத் திட்டத் தினைத் தேர்ந்தெடுப்போமானல் இதனினும் குறைவுபட்ட அளவு களின் சிறப்புகள் யாவும் குன்றும்.

இக் காலத்தில் ஐரோப்பாவுக்குச் செய்யப்பட்ட ஏற்றுமதிகளில் காணப்படுகின்ற ஏற்ற இறக்கங்கள் மற்றப் பகுதிகளில் நடந்த வாணி கத்தின் ஏற்ற இறக்கங்களை ஒப்பிடும்போது, தனித்த அளவில் அதிக மாக இருக்கும். மற்றொரு பக்கத்தில் ஓஷினியா (Oceania) கண்டத் தோடு நடந்த வாணிகத்தின் ஏற்ற இறக்கங்கள் பொருட்படுத்தப் படாத அளவுக்குக் குறைவாக இருக்கும். ஒப்பீட்டு அடிப்படையி லான வேறுபாடுகளில் அக்கறை காட்டுபவருக்கு அத்தகைய படம் தவருன கருத்தினைத் தோற்றுவிக்கும். 2.17 படத்தில் காட்டப்பட் டிருப்பதுபோல வீத அளவுத் திட்டத்தில் விவரங்கள் குறிக்கப்படும் போதுதான் உண்மை உருவம் தெளிவடையும். அளவுத் திட்டத் தின் கீழ்முனையிலும்கூட இயக்கங்கள் தெளிவாகக் காணப்படும். பல பகுதிகளுக்கும் செய்யப்பட்ட ஏற்றுமதிகளின் அளவில் ஏற்படும் மாறுதல்களை ஒப்பீட்டு அடிப்படையில் தீர்மானிக்க முடியும். அள விலே அதிக மாற்றத்தினைப் பெற்றுள்ள தொடர்வரிசைகளை ஒப்பிடு வதற்கு, வீத முறையில் கோடிட்ட அமைப்புப் பலவகையிலும் சிறந்து விளங்குகிறது.

லாகிருத முறையில் கோடுகள் வரையப்பட்ட வரைதாளைப் பயன்படுத்துவதன் சிறப்புத் தன்மைகளை 2.17 படத்தில் தரப் பட்டுள்ள அளவைத் திட்டங்கள் காட்டுகின்றன. வளர்ச்சியின் அளவுத் திட்டத்தைப் (scale of increase) பயன்படுத்தி, கொடுக் கப்பட்ட தொடர் வரிசையில் எந்த இரண்டு தேதிகளுக்கிடையே ஏற்பட்ட வளர்ச்சிகளையும் கணிசமான அளவுக்குத் திருத்தமாக அளந்து காணலாம். ஒரு வரைபடத்தில், குத்துக்கோட்டு வழியே உள்ள தூரம்— படத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும்—ஒரு மாருத சதவீத அதிகரிப்பைக் காட்டுகிறது என்பதனை மீண்டும் நினைவூட்டுகிருேம். அதாவது, குத்துக்கோட்டு வழியே அளக்கும் போது, 1-க்கும் 10-க்கும் இடையே உள்ள தூரம் 100-க்கும் 1,000க்கும் இடையே உள்ள தூரத்தை ஒத்திருக்கும். எந்தக் குத்து தூரத்தை அளந்தாலும், அதே அளவு தூரத்தைக் கீழி ருந்து மேலாக, வளர்ச்சி அளவுத் திட்டத்தின் வழியே அளந்து பார்த்து, சதவீத அதிகரிப்பைத் தீர்மானித்துக் கொள்ளலாம். எடுத்துக்காட்டாக ஐரோப்பிய இறக்குமதிகள் 1939-லிருந்து

1941 வரை அடைந்த அதிகரிப்பின் அளவினை அறியவேண்டுமானால், இவ்விரண்டு ஆண்டுகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள குத்து தூரத்தை அளக்கிறோம். அதே தூரத்தை



2.18. படம்.

1944-54 காலகட்டத்தில் அமெரிக்காவில் பண்ணையில் அமையாத புதிய குடியிருப்புகள்—ஒழுங்கான வளர்ச்சி வீதத்தை வரையரை செய்யும் குடியிருப்புகளுடன்.*

* ஆதாரம் யு.எஸ். பீரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டேடிஸ்டிக்ஸ் (U.S. Bureau of Labour Statistics).

அளவுத் திட்டத்தின் வழியே அமைத்தால், நாற்பது சதவீதத்துக்குச் சற்று மேலான அதிகரிப்பினைக் காட்டுகிறது என்பதைத் தெரிந்துகொள்கிறோம்.

குறைபாட்டின் அளவுத் திட்டத்தையும் (scale of decrease) அதே முறையில் பயன்படுத்தலாம். இரண்டு புள்ளிகளுக்கும் இடையேயுள்ள குத்து தூரம் அளக்கப்படுகிறது. மேலிருந்து கீழாக அதே தூரத்தை அளவுத் திட்டத்தில் அமைத்து, சதவீதக் குறைபாட்டினைக் கண்டறிகிறோம். வெவ்வேறு அளவுத் திட்டங்களை எந்தெந்த திக்குகளில் படிப்பது என்பதனை அம்புக்குறிகள் காட்டுகின்றன.

ஒரு குறிப்பிட்ட சமயத்தில் ஒரு தொடர்வரிசைக்கும், மற்றொன்றிற்குமுள்ள சதவீத உறவினை ஒப்புமை அளவுத்

திட்டத்தின் (scale of comparison) மூலம் கண்டுகொள்ளலாம். எடுத்துக்காட்டாக 1951-ல் வட அமெரிக்காவின் வட பகுதிக்கு நடைபெற்ற ஏற்றுமதிகளுக்கும், லத்தீன் அமெரிக்காவுக்கு நடைபெற்ற ஏற்றுமதிகளுக்குமுள்ள சதவீத உறவினை நாம் காண விரும்பலாம். குறிப்பிட்ட இரு புள்ளிகளுக்கும் இடையேயுள்ள குத்துதூரம் அளக்கப்படுகிறது. திட்டத்தில் அதே தூரம் மேலிருந்து கீழாக அமைக்கப்படுகிறது. இதிலிருந்து லத்தீன் அமெரிக்காவுக்கு அந்த ஆண்டில் அனுப்பப்பட்ட ஏற்றுமதிகளில் எழுபது சதவீதமே வட அமெரிக்காவின் வட பகுதிக்கு அனுப்பப்பட்டது என்பதைக் கண்டுகொள்கிறோம்.

அளவுத் திட்டத்தின் இடைவெளிகளுக்கு இடையே அமைந்துள்ள வீதக் கோடுகளைப் பயன்படுத்தி, மேற்கூறிய வகை அளவுத் திட்டங்களை வேண்டியவாறு அமைத்துக் கொள்ளலாம். ஒரு தொடரைச் சேர்ந்த வரைபடங்களை ஒரே வகையான அரை லாகிருத வரைதாளில் அமைக்கும்போது, அத்தகைய அளவுத் திட்டங்களை, நிலையான முறையில், சிறப்பாகக் கோடிட்டு அமைத்துக் கொள்வது வசதியானது.

ஒரு கணிசமான கால இடைவெளியில் ஏற்பட்ட வளர்ச்சி (அல்லது குறைபாடு) வீதங்களைப்பற்றி நாம் அக்கறை காட்டும்போது, வீத வரைபடமே மிகவும் ஏற்றது. அத்தகைய சமயத்தில், வரைபடத்தில் மூலைவிட்ட நேர்கோடுகளை (diagonal lines) வரைந்து அவை ஒரே சீரான வளர்ச்சி வீதங்களைக் குறிப்பதாக எடுத்துக் கொள்வது நல்லது. இவைகள் யாவும் ஒரே மூலத்தினின்று கதிர்களாக அமையும். 2.18 படத்தில் இச் செயல்முறை விளக்கப்பட்டுள்ளது. வரையப்பட்ட மூலைவிட்டக் கோடுகளில் ஒவ்வொன்றும் ஒரே சீரான வருடாந்திர வீதம் ஒன்றினால் ஏற்படும் மாற்றங்களைத் தனித்தனியே குறிப்பிடுகிறது. வரைபடத்தைப் பயன்படுத்துவோர், இக் கோடுகளின்மூலம் குறிப்பிட்ட தொடர்வரிசையில் எந்த இரு ஆண்டுகளுக்கு இடையே ஏற்படும் வளர்ச்சி வீதம் பற்றியும் தோராயமாக எளிதில் அறிந்து கொள்ளலாம்.

அரை லாகிருதக் கோடுகளாலான வரைபடத்தை அமைப்பதன் முக்கியமான நன்மைகளைத் தொகுத்துச் சுருக்கமாகப் பின்வருமாறு கூறலாம்:

1. அடுக்கு (exponential) வகையைச் சேர்ந்த வளைகோடு அரை லாகிருத வரைதாளில் நேர்கோடாகக் குறிக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, கொடுக்கப்பட்ட மூலதனம் கூட்டு வட்டியினால் வளர்

வதைக் குறிக்கின்ற வளைகோட்டை அரை லாகிருத வரைதாளில் வரையும்போது நேர்கோட்டு உருவத்தைப் பெறுகிறது.

2. வளர்ச்சி வீதமோ, குறைபாடு வீதமோ மாறிலியாக இருக்குமானால், வரைபடத்தில் நேர்கோடே கிடைக்கும்.

3. ஒப்பீட்டு அடிப்படையில் சமமான மாற்றங்கள், சமமான வீதங்களால் வளர்கிற, அல்லது குறைவுபடுகிற இருதொடர் வரிசைகள் இணைகோடுகளால் குறிக்கப்படும்.

4. இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தொடர் வரிசைகளில் வளர்ச்சி விகிதங்களை ஒப்பிடுவதற்கு, குறிக்கப்பட்ட கோடுகளின் சரிவுகளை ஒப்பிடவேண்டும்.

5. தனித்த அளவைகளை அப்படியே குறிப்பதற்கு, அரை லாகிருத வரைகோடுகள் அமைப்பு துணை செய்கிறது. ஒப்பீட்டு அடிப்படை மாற்றங்களை (relative changes) ஒப்பு நோக்கவும் அரை லாகிருத அமைப்பு உதவுகிறது.

6. அரை லாகிருத வரைபடத்தினைப் பயன்படுத்தி, தனிக் குறிப்புகளின் அளவைகளில் பெரும் அளவுக்கு வேற்றுமையுடைய இரண்டு தொடர்வரிசைகளை ஒப்பிடுவது இயலும்.

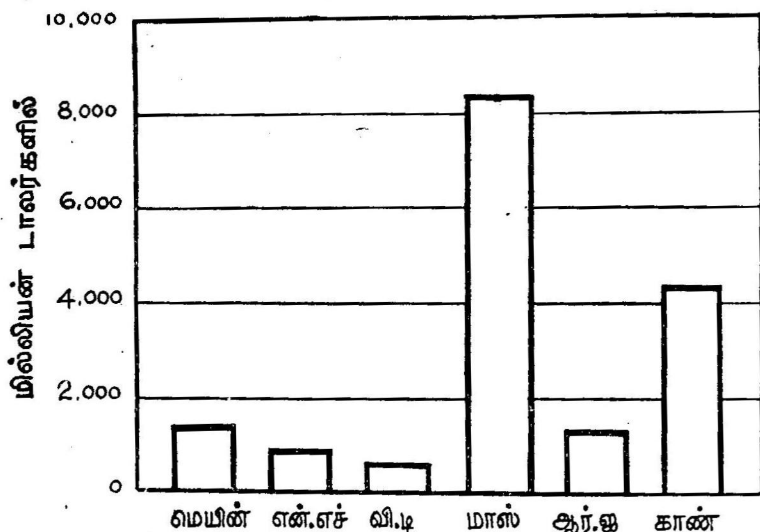
7. மாற்றங்களின் சதவீதங்கள், வரைபடத்திலிருந்து நேரடியாகக் கண்டுபிடித்து, அவற்றிலிருந்து அளவுகளுக்கு இடையேயுள்ள சதவீத உறவுகளைத் தீர்மானிக்கலாம்.

அளவுகளையும் ஒப்பீட்டு அடிப்படை மதிப்புகளையும் ஒப்பிடுவதற்குப் பட்டை விளக்கப் படங்களைப் பயன்படுத்தல்

தனித்த வேறுபாடுகளை (absolute differences) மட்டும் அறிவது நோக்கமானால், மொத்த மதிப்புகளை ஒப்பிடும் சாதாரண பத்தி விளக்கப் படம் (column diagram) போதுமானது. 1952ஆம் ஆண்டில் நியூ இங்கிலாந்து மாநிலங்கள் ஆறில் (New England States) தனிப்பட்டோர்க்குக் கிடைத்த மொத்த வருமானம் 2.19 படத்தில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. இப் படத்தில் வருமானங்களிலுள்ள வேறுபாடுகளை எளிதில் காண முடிகிறது. மேற் சொன்ன எடுத்துக்காட்டில் கண்டபடி பட்டைகளைச் செங்குத்தாக வரையலாம். அல்லது 2.20 படத்தில் கண்டபடி படுக்கையாகவும் வரையலாம். பின்னர்க் கூறிய படம், 1950-ல் அமெரிக்காவின் மக்கள் தொகைக்கு ஏற்ப, முக்கியமான பத்து நகரங்களின் தரத்தைக் காட்டுகிறது. படம் வரைபவர் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களையும், அதற்கிசைந்த பட்டைகளையும் சேர்த்துக் காட்ட விரும்பினால் படுக்கையாக வரைவது மிகவும் பயனுடையதாக இருக்கும்.

குறிப்பிட்ட காலத்திலும் அல்லது தேதிகளிலும் உருவான தொடர்வரிசைகளின் மதிப்புகள் பலவற்றையும் தொடர்புபடுத்தி ஒப்பு நோக்குவதற்கு, பட்டைகள் மிகச் சிறப்பாக உதவும். 2.21 படத்தில் 1939-ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு, 1954 அக்டோபரில் ஆறு பொருள்களின் விலை அமைப்பு காட்டப்பட்டுள்ளது. வேறுபாடு மிகவும் பரவலாக இருப்பதை இந்த அமைப்புமுறை நன்கு காட்டுகிறது.

அடுத்த அத்தியாயத்தில் அலைவுப் பரவல்களைப் பட்டை விளக்கப் படங்களாக அமைப்பதுபற்றி மேலும் சில எடுத்துக் காட்டுகள் தரப்பட்டுள்ளன. சிலவகைப்பட்ட விவரங்களைக் கையாளும்போது, சாதாரணப் பட்டைவிளக்கப் படத்திலிருந்து அலைவுப் பலகோணமும், அலைவு வளைகோடும் எங்ஙனம் பிறக்



உ.19. படம் 1952 ல், நியு இங்கிலாந்து மா நிலங்களில் தனிப்பட்டோர் பெற்ற மொத்த வருமானம்

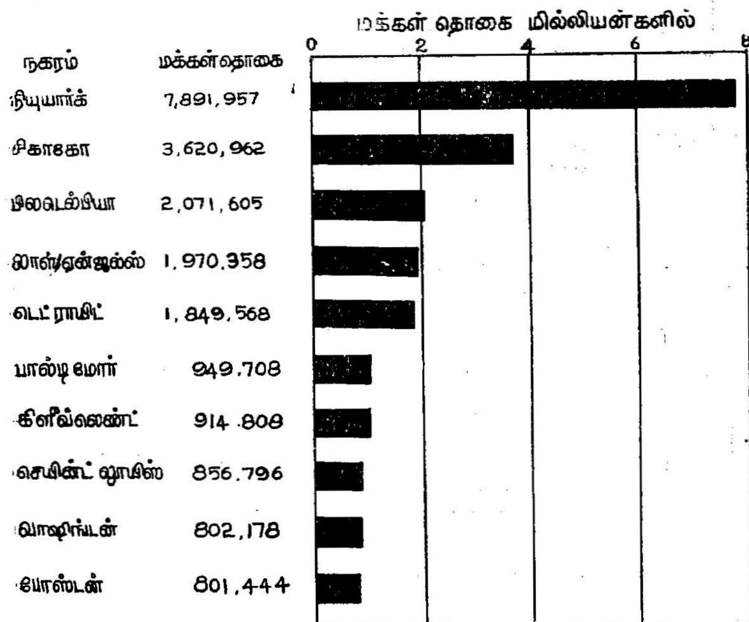
* ஆதாரம்: யு. எஸ். டிபார்ட்மென்ட் ஆஃப் காமெர்ஸ்.

கின்றன என்பது அங்கே விளக்கப்பட்டுள்ளது. வரைபட வகைகளில் அத்தகைய அலைவு வளைகோடுகள் மிகுந்த முக்கிய முள்ளவை. எனவே, அவற்றைப் பின்னர் விரிவாகக் காண்போம்.

உட்பிரிவுகளான பாகங்களை அமைத்துக் காட்டல்

கொடுக்கப்பட்ட மொத்த அமைப்பின் உட்பிரிவுகளான உறுப்புகளை வெளிக்காட்டுவதற்குப் பட்டைவிளக்கப் படங்கள் மிகவும்

ஏற்றன. 2.22 படத்தில் கண்டபடி இத்தகைய உறுப்புகளைத் தனித்த மதிப்புகளாக அமைக்கலாம். இப் படம் 1948-லிருந்து 1953 வரை இடைப்பட்ட ஆறு ஆண்டுக் காலத்தில், அமெரிக்காவில் மாநில அரசுகள் தலத்துறை அரசுகள் ஆகியவற்றின் முதலீட்டு நிதியின் மொத்த அளவைக் காட்டுகின்றது. அதோடு இதை இருவகையாகப் பிரித்து, இந்த நிதிகள் எந்தெந்த வகையாகக் கிடைத்தன, எந்தெந்த இனங்களுக்குச் செலவு செய்யப்பட்டன என்றும் பிரித்துக்காட்டப்

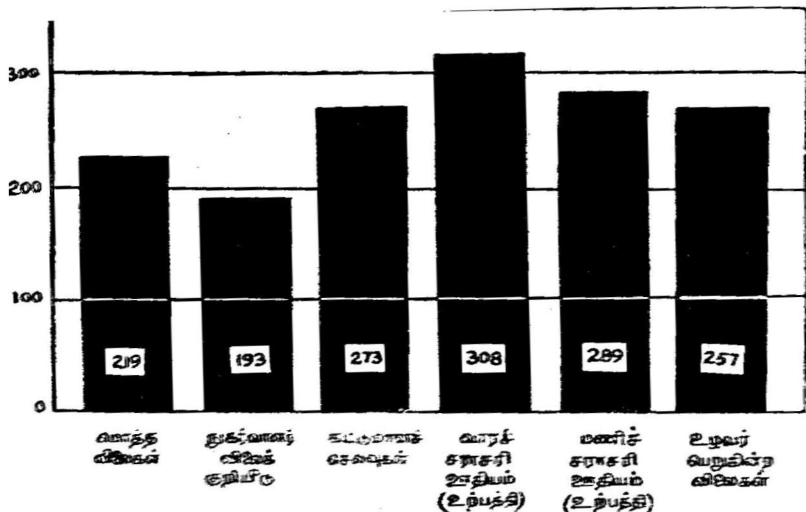


2.20. படம்.

1950, ஏப்ரல் 1-ந்தேதி இருந்தபடி மக்கள் தொகைக்கேற்ப முக்கியமான பத்து நகர்களை வரிசைப்படுத்தியது.*

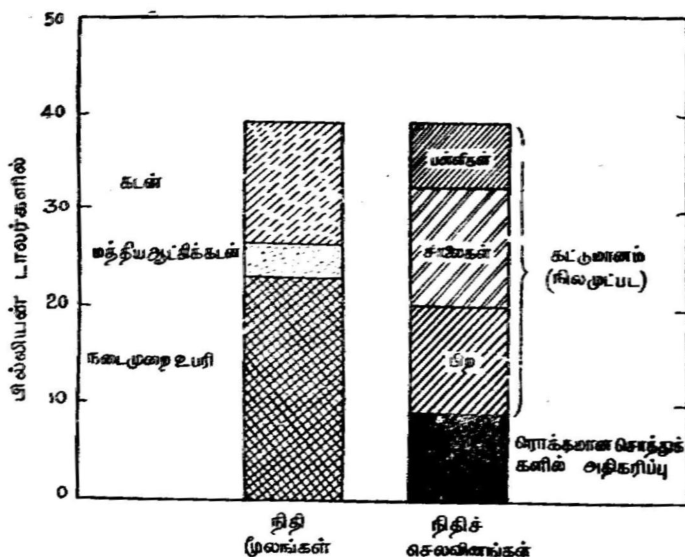
* ஆதாரம்: பீரோ ஆஃப் சென்சஸ், யு.எஸ். டிபார்ட்மெண்ட் ஆஃப் காமெர்ஸ் (1953-54-ல் நேஷனல் இண்டஸ்ட்ரியல் கான்ஃபெரன்ஸ் போர்ட் வெளியிட்ட எகனுமிக் ஆனிவர்ஸில் வெளிவந்தபடி).

பட்டுள்ளது. 2.23 படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள மற்றொரு வகை விளக்கப்படத்தில் கொடுக்கப்பட்ட தேதியில் அல்லது வெவ்வேறு சமயங்களில் மொத்த அளவிலிருந்து உறுப்புகள் எந்த சத வீதத்தில் பகிர்வு பெற்றுள்ளன என்பது காட்டப்பட்டுள்ளது. 1870-லிருந்து 1950 வரையான காலத்தில், அமெரிக்காவில் வேலைச் சக்தியின் (work force) தொழில் கட்டுக்கோப்பின் (Industrial Composition) மாற்றத்தினை இப் படம் காட்டுகிறது.



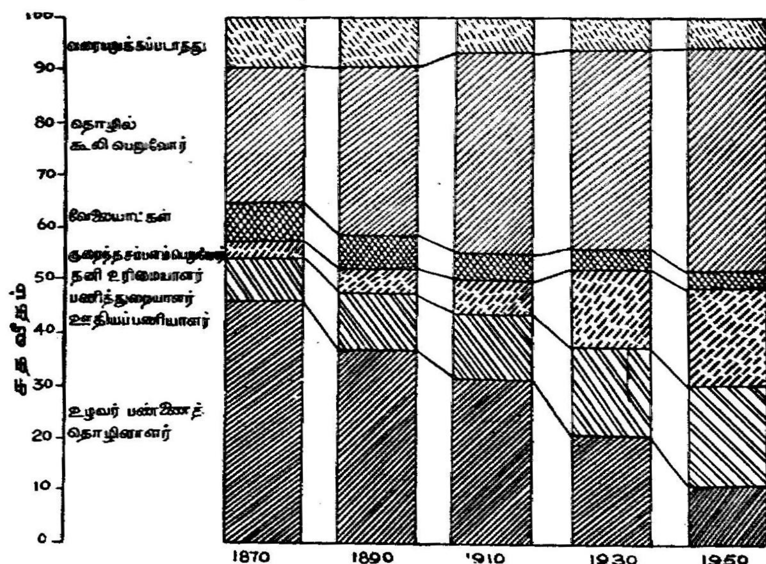
2.21. படம். 1954, நவம்பர் மாதத்தில் விலைக்கட்டுக் கோப்பு உறுப்புகளிடையேயுள்ள உறவுகள். (1939 = 100).

* ஆதாரம்: யு.எஸ். பீரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ், யு.எஸ். டிபார்ட்மென்ட் ஆஃப் காமெர்ஸ், யு. எஸ். டிபார்ட்மென்ட் ஆஃப் அக்ரிகல்சர், Engineering News Record.



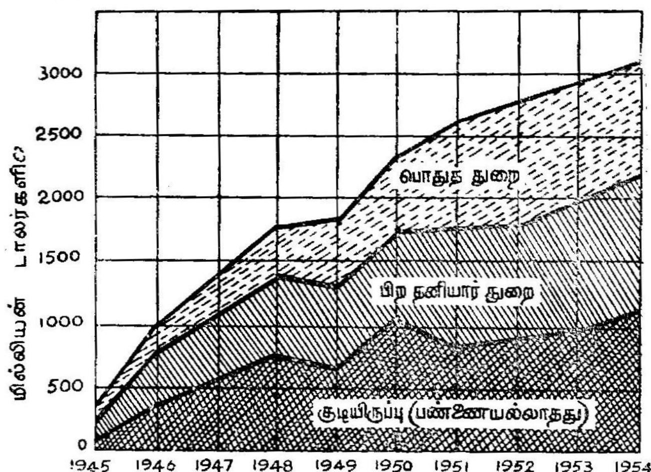
2.22 படம். **1948—1953** காலகட்டத்தில், மாநில, தலத்துறை ஆட்சிகளின் மொத்த நிதி மூலங்களும், நிதி முதலீடுகளும்*

* ஆதாரம்: ஆபீஸ் ஆஃப் பிஸினஸ் எகனமிக்ஸ், யு.எஸ். டிபார்ட்மென்ட் ஆஃப் காமெர்ஸ். இந்த விளக்கப்படம் எடுக்கப்பட்ட நூலான எச். டி. ஆஸ்பார்னும் (H. D. Osborne) ஜெ. ஏ. கார்மெனும் (J. A. Garman) எழுதிய சர்வே ஆஃப் கரன்ட் பிஸினஸ், (Survey of Current Business) (அக்டோபர் 1954-ல்) '1953-ல் பொதுத்துறை, தனியார்துறை கடன்கள்' எனும் பகுதியில் மேலே காணப்படும் சொற்களுக்கு விளக்கம் தரப்பட்டுள்ளன.



2.23 படம். **1870—1950** காலகட்டத்தில் அமெரிக்காவில் வேலைச் சக்தியின் மாறுபடும் தொழில் கட்டுக்கோப்பு மக்கட்கணிப்பு செய்யப்படும் ஐந்தாண்டுகளுக்கு ஒவ்வொருமுறை சதவீதப் பரவல். *

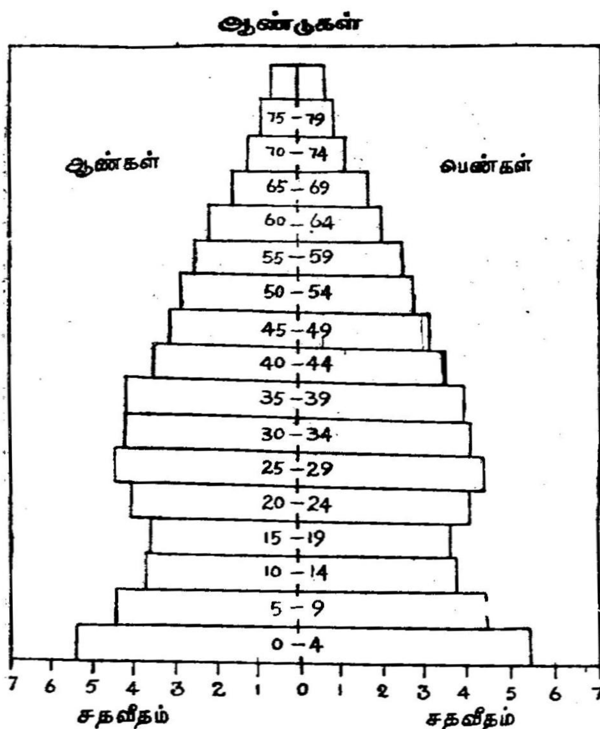
* *ஆதாரம்:* Journal of the American Statistical Association ஜூன் 1954 இதழில், டில்மன். எம். சாஜ் (Tillman M. Sogge) *என்பார் எழுதிய '1850 விருந்து 1950 வரை அமெரிக்காவில் தொழில் வர்க்கத்தினர்' என்ற கட்டுரை; இப் படத்தில் 1870-1930 வரை மொத்த ஆதாயப் பணியாளரை மொத்தமாகக் கொண்டு குறிக்கப்பட்டுள்ள சதவீதங்கள் உருவாக்கப்பட்டன. 1950-ல் நாட்டிலுள்ள தொழிற்சக்தி முழுவதுமே மொத்தமாகக் கருதப்பட்டது.*



2.24 படம். **1945—1954** காலகட்டத்தில், மாத சராசரிகளாகப் புதிய கட்டுமானங்களுக்காக அமெரிக்காவில் செலவு—மூன்று பகுதிகளாகத் தரப்பட்டுள்ளன.*

* *ஆதாரம்: பல மத்திய ஆட்சி நிறுவனங்கள், எகனமிக் இன்டிகேட்டரில்* (Economic Indicators) *ஜாயின்ட் கமிட்டி அன் தி எகனமிக் ரிப்போர்ட்டரால் பதிப்பிக்கப்பட்டது.*

மாற்றுநேர வேலை (shift), அதிகநேர வேலை (over-time) ஆகியவை தனியாகவும், ஒரு பகுதியாகவும் மொத்த நேரத்தில் எந்த அளவுக்கு அமைந்துள்ளன என்பதை, சாதாரண நேர் கோட்டுப் படத்தைச் சற்று மாற்றி அமைப்பதன்மூலம் காட்டலாம்; இரண்டாவது உலகப் போர் முடிந்து அடுத்த ஒன்பது ஆண்டுகளில் அமெரிக்க நாட்டில் புதிய கட்டடங்கள் விரைந்து உருவாகின.



2.25. படம்.

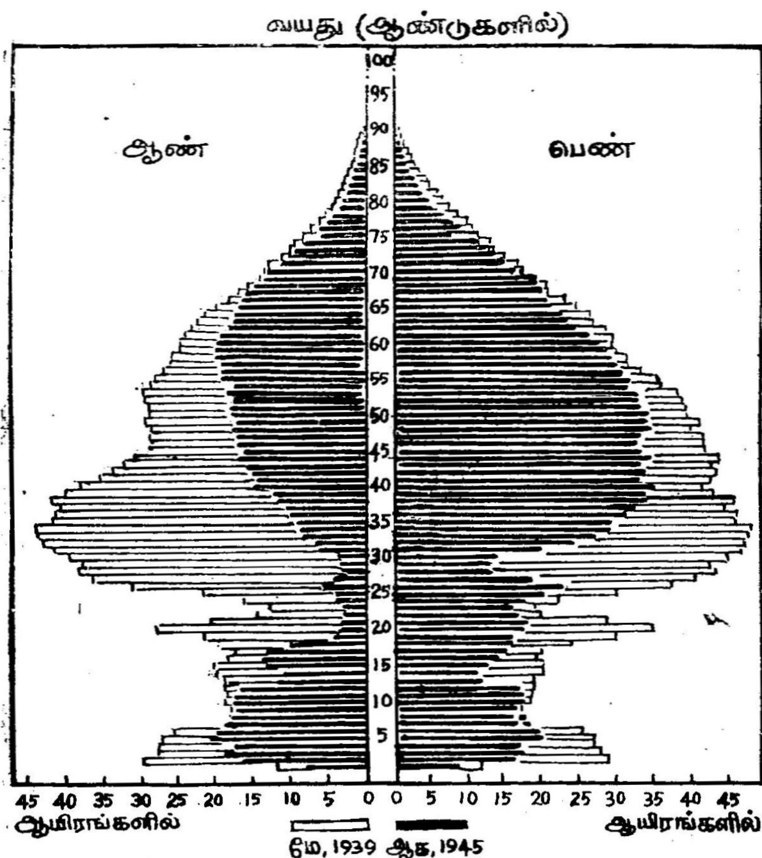
வயது, பால் ஆகியவற்றின் சதவீதங்களில், 1950-ல், அமெரிக்காவில் மக்கள் தொகைக் கட்டுக்கோப்பு. *

* ஆதாரம்: பீரோ ஆஃப் சென்சஸ், யு.எஸ். டிபார்ட்மென்ட் ஆஃப் காமெர்ஸ்.

மொத்த வளர்ச்சியைப் பல துறைக்கேற்ப விரித்துப் பார்க்கையில் வளர்ச்சி வீதம் எல்லாத் துறைகளிலும் ஒரே சீராக இல்லை. இதனை 2.24 படத்தில் வரைபடமாக அமைத்துள்ளோம்.

மக்கள் தொகை அமைப்பினைப் படமாக அமைத்தல்

மக்கள் தொகையின் வயதுக் கட்டுக்கோப்பைப் பாலுக்கேற்ப அமைத்துக் காட்டுவதற்கு ஒரு தனிப்பட்ட வகையான வரைபடம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. 2.25 படத்தில், 1950-ல் அமெரிக்காவில்



2.26. படம்.

1939, 1945 ஆகிய ஆண்டுகளில் பெர்லின் மக்கள் தொகையின் கட்டுக்கோப்பு, வயது, பால் ஆகியவற்றுக்கேற்ப வகுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆதாரம்: Statistische Praxis, Monatszeitschrift des Statistischen Zentralamts, *பெர்லின், அக்டோபர் 1946.*

மக்கள் தொகையின் பண்புகள் காட்டப்பட்டுள்ளன. (85 வயது ஆனவரும் அதற்கு மூத்தவரும் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ளப்பட

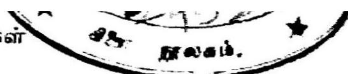
வில்லை.) காலத்தோடு இப் படங்களின் அமைப்பும் மாறுபடுகிறது; வயது அமைப்புக்கேற்பவும் மாறுபடுகிறது. ஆனால், பொதுவாக இந்த மாற்றங்கள் மெதுவாக நடைபெறுகின்றன. 2.26 படத்தில் பாலுக்கேற்பவும், வயதுக் கேற்பவும் அமைப்புகள் மிகுந்து மாறுபடுவதைக் காட்டும் ஒரு படம் தரப்பட்டுள்ளது. 1939-லிருந்து 1945-வரை ஆகிய குறுகிய காலமான ஆறு ஆண்டுகளில் போரின் கொடுமையால் பெர்லின் மக்கள்தொகை அடைந்த மாற்றத்தையே இப்படம் நாடக உருவத்தால் வெளியிடுகிறது.

வரைபடம் அமைப்பதன் முறைகள் பற்றிய ஒரு குறிப்பு

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகள் யாவும் கொடுக்கப்பட்ட குறிப்புகளை வரைபடமாக அமைப்பதற்குப் பல முறைகளை வெளியிட்டன. எனினும் வரைபடம் அமைக்கும் கலையைப் பற்றிய நுணுக்கங்கள் இன்னும் பல உண்டு. கடந்த பத்தாண்டு காலத்தில் தெளிவாகவும், கவர்ச்சியாகவும், உண்மையிலிருந்து பிறழாமலும் படத்தினை அமைக்கும் முறைகள் வளர்ச்சி அடைந்துள்ளன. படம் அமைப்பதற்குப் பல விதிமுறைகள் வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளன. இக் குறிப்புகள் யாவற்றையும் இங்கே விரிவாகக் கூறுதல் இயலாது; எனினும், காலத் தொடர்வரிசையை வரைபடமாக அமைப்பதற்கு மேற்கொள்ளப்பட வேண்டிய விதிமுறைகளைத் தொகுத்துக் கூறுதல், வரைபடம் அமைக்கப் பயிலுவோர்க்கு உதவியாயிருக்கும்.

1. படப்பரப்பு (Grids) சரியான விகிதத்தில் இருந்தால்தான், உண்மை சிதையாது வெளியாகும் (படப்பரப்பு என்பது அச்சுகளுக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடுகளால் இடைப்பட்ட பரப்பினை அல்லது இடத்தினைக் குறிக்கும் ஒரு சொல்). கண்டறிந்த விவரங்களைப் படமாகப் பயன்படுத்துகின்ற x அளவுத் திட்டத்துக்கும் (காலம்), y அளவுத்திட்டத்துக்கும் (அளவு) உள்ள தொடர்புதான், குறிக்கப்படும் வளைகோட்டுக்கு வடிவம் தருகிறது; காண்போர் உள்ளத்திலும் தொடர்புபற்றி ஒரு கருத்தினைத் தோற்றுவிக்கிறது. இது வெளிப்படையாகப் புலனாகும் உண்மையெனினும் மீண்டும் நினைவுகூரத்தக்கதோர் உண்மை.

2. அளவுத் திட்டமானது 0 மதிப்பையோ, அடிப்படையான ஆதாரப் புள்ளியினையோ பொதுவாகக் கொண்டிருக்கவேண்டும். 100 என்று கொடுக்கப்பட்ட அடிப்படையினைச் சார்ந்து மதிப்புகள் குறிப்பிடப்படுமானால் 100 என்ற மதிப்பு இங்கே அடிப்படைப் புள்ளியாகும்.



3. 0 மதிப்போ, அடிப்படைப் புள்ளியோ (point of reference) குறிக்காது விடப்பட்டிருக்குமானுல், அந்த உண்மையை நன்கு தெரியுமாறு குறிப்பிட்டுவிடவேண்டும். வரைபடப் பரப்பின் அடியில் நெளிகோடு ஒன்று வரைந்தோ, ஓர் ஓரத்திலே நெளி வளைவுடைய நேர்கோடு ஒன்று வரைந்தோ, குறிப்பிடாது விட்டுப் போன பகுதியை உணர்த்தவேண்டும்.

4. மட்ட அச்சு, சுழிக்கோடு, அல்லது மற்ற ஆதாரக்கோடுகள், இவற்றில் எதனை ஒப்பு நோக்குவதற்கு அடிப்படையாகப் பயன் படுத்துகிருேமோ, அதனைத் தெளிவாகக் குறிப்பிட்டுவிடவேண்டும்.

5. வரைபடத்தைப் படிப்பதற்குத் துணையாகத் தேவைப்படுகின்ற ஆயக்கோடுகளை மட்டுமே படத்தில் காட்டவேண்டும்.

6. படத்தின் பின்னணியாக வரையப்பட்டிருக்கும் வரைகோடுகளி லிருந்து நன்கு வேறுபடும் வகையில், வளைகோடுகளை வரைய வேண்டும். அப்படி வளைகோடுகள் தெளிவாகவும் அழுத்த மாகவும், இருந்தால்தான் படிப்போரது கவனத்தை உடனே ஈர்த்து, நிலையான உருவகத்தை மனத்தில் தோற்றுவிக்கும்.

7. படுக்கை வரைகோடுகளின் (horizontal rulings) மதிப்புகளைத் தெளிவாக உணர்த்தும் வகையில் (y அச்சில்) தரப்பட்டுள்ள அளவைகளை எண்களால் தெளிவாகக் குறிக்கவேண்டும்.

8. அளவுத்திட்ட அலகுகளை வேறு எவ்வகையாலும் குறிப்பிடாத போது, அளவுத்திட்ட எண்களையொட்டி ஏற்ற தலைப்புகளையும் தருவது அவசியம்.

9. வளைகோட்டில் குறிக்கப்பட்டுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும், அவற்றுக்கு இசைந்த காலமதிப்புகளை எளிதில் கண்டறிவதற்கு வசதியாக அளவுத்திட்டத்தில் கால அளவைத்திட்டம் பற்றிய குறிப்புகள் இருக்கவேண்டும்.

10. வரைபடத்தில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட வளைகோடுகள் இருக்கும் போது ஒவ்வொன்றையும் தனித்தனியே பொருத்தமான தலைப்பி ஞலோ, குறிப்பிஞலோ அடையாளம் காட்ட வேண்டும்.

11. கூடியவரையில் வரைபடத்தின் தலைப்புத் தெளிவாகவும், முழுமை உடையதாகவும் அமையவேண்டும். மூலத்தலைப்பு, வரைபடம் எதனைப்பற்றியது என்பதனை உடனே உணர்த்துவதாக இருக்கவேண்டும். மூலத்தலைப்பின் நிறைவுறுப்பாகவோ

(complement), பின்னொட்டாகவோ (supplement) அமைகின்ற விவரங்கள் துணைத்தலைப்பில் தரப்படவேண்டும்.[5]

துணை நூல்கள்

1. Allen, R. G. D. Mathematical Analysis for Economists, Chaps. 1, 2, 3, 9.
2. Committee on Graphics, 'A Guide for Preparing Technical Illustrations for Publication and Projection,' American Standards Association.
3. Committee on Standards for Graphic Presentation,' 'Time Series Charts, A Manual of Design and Construction,' American Standards Association.
4. Croxton, F. E. and Cowden, D. J., Applied General Statistics, Chaps. 4-6.
5. Federal Reserve System, Board of Governors, Charts on Money, Bank Credit, Money Rates and Business, Washington, D. C. (Monthly).
6. Fowler, C. B., Griffin, J. I., Cohen, J. B., Cropsey, J., Greenwald, W. I. and Sethur, F., Economic Handbook: A Visual Survey.
7. Goulden, C. H., Methods of Statistical Analysis, 2nd ed., Chap. 1.
8. Livingston, J. A., 'Charts Should Tell a Story,' Journal of the American Statistical Association, Sept. 1945.
9. Lutz, R. R., Graphic Presentation Simplified.

[5] வரைபடத்தினை அமைப்பதில் கையாளப்படவேண்டிய கொள்கைகள் பற்றியும், செயல் முறைகள்பற்றியும் விரிவான விளக்கம் காண விரும்புவோர் நியூயார்க் நகர அமெரிக்கன் சொசைட்டி ஆஃப் மெகானிக்கல் இன்ஜினியர்ஸ் (American Society of Mechanical Engineers) அவர்களால் பதிபிக்கப்பட்டதும், கமிட்டி ஆன் ஸ்டாண்டர்ட்ஸ் ஃபார் கிராபிக் பிரஸன்டேஷன் (Committee on Standards for Graphic Presentation) அவர்களால் தயாரிக்கப்பட்டதுமான காலத் தொடர் வரிசை வரைபடங்கள் (Time Series Charts) என்ற விவரமான நூலில் விளக்கம் கண்டுகொள்ளலாம். இக் குறிப்புகள் அமெரிக்கன் ஸ்டாண்டர்ட்ஸ் அஸோஸியேஷனுல் (American Standards Association) ஏற்றுக்கொள்ளப் பட்டது. மேலும், பின்வரும் துணைக் குறிப்புகளையும் பார்க்கவும். மட்ஜட் (Mudget து. நா. ப. 114, ஸ்மார்ட், ஆர்னுல்ட் (Smart and Arnold) து. நா. ப. 144.

கமிட்டி ஆன் ஸ்டாண்டர்ட்ஸ் ஃபார் கிராபிக் பிரஸன்டேஷன் அவர்களால் செய்யப்பட்ட பரிந்துரைகளின் அடிப்படையின்மேல் தரப்பட்டுள்ள 11 கருத்துகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மேற்கூறிய பரிந்துரைகளை, இடத்துக்கேற்ப, சொற்களில் ஒரு சில மாற்றங்கள் செய்து தந்துள்ளோம்.

10. Mudgett, B. D., Statistical Tables and Charts.

11. Riggleman, J. R. and Frisbee, I. N. Business Statistics, 3rd ed., Chaps. 5, 6.

12. Smart, L. E. and Arnold, S., Practical Rules for Graphic Presentation.

13. Spear, Mary E., Charting Statistics.

14. Spurr. W. A., Kellogg, L. S. and Smith, J. H., Business and Economic Statistics, Chaps. 7-8.

15. Tintner, G., Mathematics and Statistics for Economists, Chaps. 1, 2.

16. Walker, Helen M., Mathematics Essential for Elementary Statistics, 2nd ed.

இந்த அத்தியாய முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணைநூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரும் பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டும், நூலின் (இரண்டாம் பாக) இறுதியில் உள்ள துணைநூல் பட்டியலில் காணலாம்.

3. புள்ளி விவரங்களின் ஒழுங்கமைப்பு : அலைவுப் பரவல்கள்

ஆய்வாளர், கண்டறிந்த குறிப்புகளைச் சேர்த்து மாதிரி (sample) ஒன்றை வைத்திருக்கிறார்; இந்நிலையில் இருந்து துவங்கி புள்ளி விவர ஆய்வு முறைகள் பற்றி முறையாக ஆராய்வோம். இக் கண்டறிந்த குறிப்புகள் யாவும் ஓர் அளவையைப் பற்றிய பல எண் மதிப்புகள் என எடுத்துக்கொள்ளுவோம் ; அதாவது ஒரே மாறியைப் பற்றி (variable) ஆராய்வதாக வைத்துக்கொள்ளுவோம். விவரங்களை ஆய்வாளரே முதன்முறையாகத் தொகுத்திருக்கலாம்.[1] அல்லது முதல் நிலை அல்லது பிறநிலையாக, பிறர் தொகுத்தவற்றிலிருந்து, விவரங்கள் கிடைத்திருக்கலாம். கிடைத்துள்ள விவரங்களின் அடிப்படையில் சோதனைகளையும், பொதுமை முடிவுகளையும் (generalization) செய்வதற்கு முன்னால் குறிப்புகளை ஒழுங்குபடுத்துவது அவசியம்.

அடிப்படைக் கருத்துகளும் செயல் முறைகளும்

ஆரம்பத்தில் கால ஒழுங்கிற்கேற்ப அமைக்கப்பட்ட குறிப்புகளை ஆராய்வதனால் எழுகின்ற சிக்கல்களையும், அவ்வாறு ஒழுங்கு செய்யப்படாத குறிப்புகள் பற்றிய சிக்கல்களையும், அல்லது கால ஒழுங்கு தேவையில்லாத சிக்கல்களையும் குறித்து, வேறுபடுத்தித் தெரிந்து கொள்ளவேண்டும். கால வரையறையையொட்டி அமைந்த தொடரினை ஆராய்வதன் நோக்கம், மாறியில் காலத்திற்கேற்ப ஏற்படும் மாறுதல்களை அறிவதே. எடுத்துக்காட்டாக, பல ஆண்டுகளில் விற்பனையிலேற்படும் மாற்றங்களைப் பற்றியோ, நிலக்கீலார்ந்த கரி (bituminous coal) உற்பத்தியில் ஏற்படும் ஏற்றத் தாழ்வுகளைப்பற்றியோ, மொத்த விலைவாசிகளில் ஏற்படும்

[1] மாதிரியைத் தொகுப்பதற்கான களச் செயல் முறைகளையும் மாதிரிக் கோட்பாடுகள் சிலவற்றையும் 19ஆம் அத்தியாயத்தில் காண்போம்.

மாறுதல்கள் பற்றியோ, ஆண்டுக்காண்டு தேசீய வருமானம் மாறுபடும் இயக்கம் பற்றியோ ஆராய நேரலாம். கொடுக்கப்பட்ட ஒரு காலத்தில் வருமான பரவல்பற்றி ஆராய்வது முந்தியவற்றிலிருந்து முற்றிலும் வேறுபட்ட வகையான சிக்கல்; இங்கே, அமெரிக்க நாட்டில், ஒவ்வொரு வருமானப் பிரிவுகளிடையேயும் எத்தனை பேர் அமைந்துள்ளனர் என்பதனைக் கண்டறிவது பிரச்சினை. அதாவது ஒவ்வொரு மாறியின் மதிப்பும் எத்தனை தடவை திரும்பத்திரும்ப வருகிறது; எந்த எந்தப் பிரிவுகளில் அடங்குகின்றன; மதிப்புகள் எவ்வாறு பரவலாக அமைந்துள்ளன — இவற்றை அறிவதே புள்ளி விவரங்களை ஒழுங்குபடுத்தலின் பொதுவான சிக்கல்களாகும். இவ்விதமாகப் புள்ளி விவரத்திரளை ஒழுங்குபடுத்தினால் அலைவுத் தொடர் (Frequency Series) கிடைக்கிறது. இது காலத் தொடரிலிருந்து (Time or Historical Series) மாறுபட்டது. இந்த இருவகைப் புள்ளி விவரத்திரளுக்கும் அடிப்படை வேறுதலால் இவற்றிற்குரிய செயல் முறைகள் தனித்தனியே ஆராயப்படும். இப் பகுதியில் காலத்தோடு சேராத புள்ளிவிவரத்திரளை ஒழுங்குபடுத்தி வகைப் படுத்துவதைப் பார்ப்போம். புள்ளிவிவர வர்ணனைக்கும், புள்ளி விவர உய்த்துணர்வுக்குமுள்ள வேறுபாட்டைப்பற்றி முதல் அத்தியாயத்தில் கூறியதை நினைவுகூர வேண்டும். இந்த அத்தியாயத்திலும், அடுத்த இரு அத்தியாயங்களிலும், வர்ணனைபற்றிய சிக்கல்களையே ஆராய்வோம். எனினும், வர்ணனை முறைகள் புள்ளியியலின் உயிர்நாடியான உய்த்துணர்வுகளைச் செய்வதற்கு எவ்விதம் துணைசெய்கின்றன என்பதனை நினைவில் கொள்ளவேண்டும். புள்ளிவிவர உய்த்துணர்வுபற்றி ஆறும் அத்தியாயத்தில் விளக்கத் துவங்குவோம். வர்ணனைகட்கும், உய்த்துணர்வுக்குமுள்ள சிறிய நடைமுறை வேறுபாட்டை இங்குக் கவனிக்க வேண்டியிருக்கிறது; ஏனெனில், இது பின்னர் நாம் பயன்படுத்தவிருக்கும் புள்ளி விவர மொழிக்கும், குறியீடுகளுக்கும் தொடர்புடையதாக இருக்கிறது. மாதிரியினின்று பெறுகின்ற அளவையை மாதிரி அளவை (statistic) என்போம். மாதிரி அளவை, மாதிரியின் ஒரு பண்பை அளவால் விளக்குவதால், அதுவே தனித்து பயனுடையதாக இருக்கிறது. மேலும், பல சமயங்களில் முழுமைத் தொகுதியில் அதே போன்ற அளவையினை மதிப்பீடு செய்வதற்கும் அது பயனாகிறது. இந்த அளவையை முழுமைத் தொகுதி அளவை (Parameter) என்போம். (சில விதிவிலக்குகள் இருந்தாலுங்கூட) மாதிரி அளவைகளை இலத்தீன் எழுத்துகளாலும், முழுமைத் தொகுதி அளவைகளை கிரேக்க எழுத்துகளாலும் குறிப்பது பயனுள்ள ஒரு விதியாகும்.

தொகுக்கப்படாத விவரங்கள்: ஆய்வாளரிடம் ஒழுங்கு செய்யப்படாத கண்டறிந்த விவரங்களின் திரள் ஒன்று இருக்கிறது.

குடும்ப சேமிப்பு பற்றிய குறிப்புகளிலிருந்து தொகுக்கப்பட்டவை, அல்லது விற்பனை அறிக்கைகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை, அல்லது விலைமதிப்புப் புள்ளிகளிலிருந்து சேகரித்து எடுக்கப்பட்டவை என்று ஏதோ ஒரு திரள் ஒழுங்காகக் கட்டுக்கோப்புடன் உருப்பெறாத நிலையில் ஆய்வாளரிடம் இருக்கிறது. முன்னரே தொகுக்கப்பட்ட விவரமாக இருந்து, அது பட்டியல்வடிவில் தொகுக்கப்பட்டிருப்பினுங் கூட, ஆய்வாளர் மேற்கொண்டிருக்கும் ஆய்விற்குப் பொருத்தமில்லாத வகையில் அமைந்திருக்கலாம். ஆய்வாளர் தாம் மேற்கொண்டுள்ள வகையில் சிறப்புத்தன்மைகள் நன்கு புலனாகும் வகையில் விவரங்களை ஒழுங்குபடுத்தவேண்டும்; ஒத்துள்ள பிற விவரங்களோடு தொடர்புபடுத்தி ஒப்புமை காண்பதற்கு வசதியாகவும், மேற்கொண்டு ஆய்வுகள் செய்வதற்கேற்ற முறையிலும் விவரங்களை ஒழுங்காக அமைத்துக்கொள்ளவேண்டும். கண்டறிந்ததன் பயனாகக் கிடைக்கின்ற விவரங்களைக்கொண்டு உய்த்துணர்வு காண்பதற்

220 ஆலைத் தொழிலாளர்களின் வார வருமானங்கள்

$49.85	$59.85	$44.40	$57.10	$44.70	$48.80	$44.55	$50.10
48.65	50.50	53.80	51.05	46.85	46.20	47.40	48.30
50.55	48.40	50.40	45.10	48.50	52.05	55.10	43.85
50.10	51.65	55.40	50.30	45.65	45.55	46.65	51.75
53.20	60.50	48.35	48.50	46.20	52.05	52.70	51.20
47.55	42.50	52.65	45.30	58.60	67.60	49.55	48.25
51.45	46.05	46.95	46.40	49.25	47.95	41.05	47.40
45.30	48.65	50.15	51.35	50.05	49.95	49.05	46.65
49.20	50.45	56.90	49.55	52.85	45.40	45.25	49.00
49.60	54.50	50.45	45.85	46.70	50.65	51.30	61.25
52.25	54.10	50.20	51.25	49.25	47.35	59.95	56.40
50.35	50.60	49.45	58.15	39.55	47.85	49.55	48.70
45.55	55.65	43.30	47.70	47.10	51.55	53.00	38.80
52.00	49.65	48.65	52.60	45.85	54.70	44.10	53.65
48.10	45.00	52.95	51.25	50.15	50.80	51.65	56.70
45.45	50.70	40.40	50.30	48.60	51.85	49.75	51.10
50.00	46.60	47.60	53.10	51 25	50.70	63.85	62.10
55.70	55.25	52.30	41.85	50.55	51.95	49.45	48.35
42.20	50.25	47.00	55.95	48.15	50.75	47.70	52.30
53.45	46.45	49.15	58.95	46.30	53.55	55.30	48.10
64.75	53.35	64.05	49.40	51.90	52.70	49.65	49.70
48.55	48.70	48.45	51.70	59.30	50.95	46.35	46.95
51.70	47.30	54.70	49.30	50.40	44.40	51.10	49.85
54.45	49.75	43.60	44.85	44.75	45.70	49.40	48.45
49.45	50.70	46.50	50.00	52.40	57.30	44.25	49.50
45.75	46.45	40.10	54.65	47.70	49.65	47.75	49.00
61.90	52.90	57.30	57.75	60.40	46.15	47.15	49.60
46.80	50.85	42.95	51.95				

காகச் சோதனைகள் செய்வதற்கும், பொதுமையான முடிவுகளைச் செய்வதற்கும் முன்னராகவே, விவரங்களை முறைப்படுத்தி கட்டுக்கோப்புடன் அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

தொகுக்கப்படாத நிலையிலுள்ள புள்ளிவிவரங்களுக்கு எடுத்துக்காட்டாக, நெசவுத் தொழிற்சாலை ஒன்றில் துண்டு வேலைகளில் (piece work) ஈடுபட்டிருக்கும் 220 நபர்களின் வார ஊதியங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.

வரிசை (array): கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை அதன் அளவுக்கேற்ப வரிசைப்படுத்துவது விவரங்களை இணைசேர்ந்து அமைப்பதற்கு முதல்படி. இதனுல் பரவலின் வீச்சையும், அதன் அமைப்பையும் தெளிவாகப் புரிந்துகொண்டு மேற்கொண்டு ஒழுங்குபடுத்துவதற்கு முனையலாம். அப்படிச் செய்தால் அடுத்த பக்கத்திலுள்ளதுபோன்ற வரிசை கிடைக்கும்.

அலைவுப் பட்டியலின் அமைப்பு

பொதுப் பண்புகள்

முன்னிலும் செம்மைப்படுத்தி, மேற்கொண்டு ஆய்வதற்கு வசதியாக, விவரங்களை வரிசையாகத் தந்தபோதுகூட, விவரங்களின் முழுச் சிறப்பையும் நம்மால் அப்படியே புரிந்துகொள்ள இயலாது. ஆலை மேலாளர், குறைந்த வார ஊதியம் $38·80 என்பதையும், மிகுந்த ஊதியம் $67·60 என்பதையும், பெரும்பாலான தொழிலாளர்கள் $46-விருந்து $53 வரை ஊதியம் பெற்றனர் என்பதையுமே தெரிந்துகொள்ளலாம். விவரங்களைப் பற்றிய தெளிவற்ற ஒரு சிறு குறிப்பாகவே இது இருக்கிறது. இதனைத் தொகுத்து அமைத்தால் அதாவது, ஒரே வரம்புக்குட்பட்டு ஊதியம் பெறும் நபர்களையெல்லாம் பொதுவான பிரிவில் அமைத்தால், ஊதியத்தின் பரவலை, எளிமையாக, கட்டுக்கோப்பாகத் தரலாம். இதுபோல ஒவ்வொரு பிரிவின் வீச்சையும் பிரிவு இடைவெளி (class interval) $5 ஆக எடுத்துக்கொண்டு பாகுபாடு செய்திருப்பதை 3-1 பட்டியல் காட்டுகிறது.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் சுருங்கிய பொழிப்பாக இப்பட்டியல் அமைகிறது. இப் பொழிப்பில் ஊதியங்களின் தோராய வீச்சு தெரியவருவதுடன், 220 தொழிலாளரது ஊதியம் இவ் வீச்சுக்குள் எங்ஙனம் பரவலாக அமைந்துள்ளது என்பதும் தெரிகிறது. முதலிலே விளக்கமாக இருந்த பல விவரங்களை இப்பொழுது இழந்து

வரிசை: 220 நெசவாலைத் தொழிலாளர்களது வார ஊதியங்கள்

$38.80	$45.55	$47.35	$48.70	$49.85	$50.75	$52.25	$55.30
39.55	45.65	47.40	48.70	49.85	50.80	52.30	55.40
40.10	45.70	47 40	48.80	49.95	50.85	52.30	55.65
40.40	45.75	47.55	49.00	50.00	50.95	52.40	55.70
41.05	45.85	47.60	49.00	50.00	51.05	52.60	55.95
41.85	45.85	47.70	49.05	50.05	51.10	52.65	56 40
42.20	46.05	47.70	49.15	50.10	51.10	52.70	56.70
42.50	46.15	47.70	49.20	50.10	51.20	52.70	56.90
42.95	46.20	47.75	49.25	50.15	51.25	52.85	57.10
43.30	46.20	47.85	49.25	50.15	51.25	52.90	57.30
43.60	46.30	47.95	49.30	50.20	51.25	52.95	57.30
43.85	46.35	48.10	49.40	50.25	51.30	53.00	57.75
44.10	46.40	48.10	49.40	50.30	51.35	53.10	58.15
44.25	46.45	48.15	49.45	50.30	51.45	53.20	58.60
44.40	46.45	48.25	49.45	50.35	51.55	53.35	58.95
44.40	46.50	48.30	49.45	50.40	51.65	53.45	59.30
44.55	46.60	48.35	49.50	50.40	51.65	53.55	59 85
44.70	46.65	48.35	49.55	50.45	51.70	53.65	59.95
44.75	46.65	48.40	49.55	50.45	51.70	53.80	60.40
44.85	46.70	48.45	49.55	50.50	51.75	54.10	60.50
45.00	46.80	48.45	49.60	50.55	51.85	54.45	61.25
45.10	46.85	48.50	49.60	50.55	51.90	54.50	61.90
45.25	46.95	48.50	49.65	50.60	51.95	54.65	62.10
45.30	46.95	48.55	49.65	50.65	51.95	54.70	63.85
45.30	47.00	48.60	49.65	50.70	52.00	54.70	64.05
45.40	47.10	48.65	49.70	50.70	52.05	55.10	64.75
45.45	47.15	48.65	49.75	50.70	52.05	55.25	67.60
45.55	47.30	48.65	49.75				

விட்டதைக் கவனிக்கவும். இப் பட்டியலிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட வாரத்தில் $43-லிருந்து $48 வரை (48 வரை, 48-ச் சேர்த்தல்ல) ஊதியம் ஈட்டியவர் 53 பேர்கள் என்று தெரியும். ஆனால், இந்த $5 வீச்சுக்குள் 58 தொழிலாளர்களது ஊதியங்கள் எங்ஙனம் பரவியிருந்தன என்பது தெரியாது. அட்டவணையிலுள்ள குறிப்புகளிலிருந்து எல்லோரும் சரியாக $43 ஊதியம் பெற்றிருக்கலாமெனத் தெரிந்து கொள்ளலாம். பாகுபாடு செய்வதற்காகத் தொகுக்கும்போதும், எளிமைப்படுத்தும்போதும் விவரங்களை இழந்தே தீரவேண்டியிருக்கிறது.

பிரிவு இடைவெளியின் அளவைக் (size) குறைத்தால் விவரங்களை இழப்பது குறையும். ஆனால், பிரிவுகளை அதிகப்படுத்தினால் பட்டியலின் எளிமை குறைந்து, புரிந்துகொள்வதற்கு இடையூறு ஏற்படுகிறது. 3-2, 3-3, 3-4 பட்டியல்கள், ஒரே விவரத்தை

முறையே $3, $2, $1 இடைவெளிகளாகக் கொண்டு பாகுபாடு செய்திருப்பதைக் காட்டுகின்றன.

பட்டியல் 3-1

தொழிலாளர்களது அலைவுப் பரவல்

(வார வருமானத்தின் அடிப்படையில் பாகுபாடு செய்யப்பட்டது; பிரிவு இடைவெளி = $5)

வார ஊதியம்	குறிப்பிட்ட ஊதியம் பெறுவோர் எண்ணிக்கை (அலைவு)
$38.00 முதல் $42.99	9
43.00 முதல் 47.99	58
48.00 முதல் 52.99	110
53.00 முதல் 57.99	28
58·00 முதல் 62.99	11
63.00 முதல் 67.99	4
	220

இந் நான்கு பட்டியல்களும் ஒரே விவரத்தை நான்கு வகையாகச் சுருக்கியுள்ளதைக் காட்டுகின்றன. 3-1, 3-2, 3-3 பட்டியல்கள் பொதுப் பண்புகளை வெளியிடுகின்றன. முனைக்கோடி வகுப்புகளில் அலைவுகள் குறைந்த அளவில் இருக்கும் என்பதும், மையத்தை நோக்கிச் செல்லச்செல்லப் பரவல்களில் அலைவுகள் கிட்டத்தட்ட சீராக வளரும் என்பதும் தெரிய வருகிறது. பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக அதிகமாக இந் நியதியிலிருந்து வேறுபடுவதும் அதிகமாகிறது. 3-4 பட்டியலின் $1 இடைவெளியுள்ள 30 பிரிவுகள் இருக்கின்றன. இப் பட்டியலில் குறிப்புகளின் பரவல் சமச்சீரின்றி ஒழுங்கற்று இருக்கிறது. மற்றப் பட்டியல்களின் கட்டுக்கோப்புகள் ஒழுங்காகவும், சீருடனும் இருக்கின்றன. ஒவ்வொரு பட்டியலும் கூலிபற்றிய விவரங்களைச் சுருக்கமாகவும் எளிமையாகவும் தருகின்றன. விவரங்களின் திரளை ஒருசேர ஆராய முயன்று குழப்பமடைவதைவிட, இப் பட்டியல்களைப் படித்தறிந்து ஆலையில் தொழிலாளர்களது வார ஊதியத்தின் பரவலையும், அளவையும் தெரிந்துகொள்ளலாம். விவரங்களை இது போன்று ஒழுங்குபடுத்தி அமைப்பதை அலைவுப் பரவல் (frequency distribution) என்கிறோம். இது ஒரு காரணப் பெயர். ஏனெனில், மாறி ஒன்று பெறுகின்ற மதிப்புகள் அதன் வீச்சிலே எங்ஙனம் பரவலாக அமைந்துள்ளன என்பதை, அலைவுப் பரவல் சுருக்கமாக வெளியிடுகிறது.

தொழிலாளர்களது அலைவுப் பரவல்

(வார வருமானத்தின் அடிப்படையில் பாகுபாடு செய்யப்பட்டது)

பட்டியல் 3-2

(பிரிவு இடைவெளி=$3)

வார ஊதியம்			தொகை
$38.00	முதல்	$40.99	4
41.00	முதல்	43.99	8
44.00	முதல்	46.99	40
47.00	முதல்	49.99	63
50.00	முதல்	52.99	62
53.00	முதல்	55.99	21
56.00	முதல்	58.99	10
59.00	முதல்	61.99	7
62.00	முதல்	64.99	4
65.00	முதல்	67.99	1
			220

பட்டியல் 3-3

(பிரிவு இடைவெளி=$2)

வார ஊதியம்			தொகை
$38.00	முதல்	$39.99	2
40.00	முதல்	41.99	4
42.00	முதல்	43.99	6
44.00	முதல்	45.99	22
46.00	முதல்	47.99	33
48.00	முதல்	49.99	48
50.00	முதல்	51.99	48
52.00	முதல்	53.99	22
54.00	முதல்	55.99	13
56.00	முதல்	57.99	7
58.00	முதல்	59.99	6
60.00	முதல்	61.99	4
62.00	முதல்	63.99	2
64.00	முதல்	65.99	2
66.00	முதல்	67.99	1
			220

பட்டியல் 3-4

(பிரிவு இடைவெளி=$1)

வார ஊதியம்			தொகை
$38.00	முதல்	$38.99	1
39.00	முதல்	39.99	1
40.00	முதல்	40.99	2
41.00	முதல்	41.99	2
42.00	முதல்	42.99	3
43.00	முதல்	43.99	3
44.00	முதல்	44.99	8
45.00	முதல்	45.99	14
46.00	முதல்	46.99	18
47.00	முதல்	47.99	15
48.00	முதல்	48.99	20
49.00	முதல்	49.99	28
50.00	முதல்	50.99	28
51.00	முதல்	51.99	20
52.00	முதல்	52.99	14
53.00	முதல்	53.99	8
54.00	முதல்	54.99	6
55.00	முதல்	55.99	7
56.00	முதல்	56.99	3
57.00	முதல்	57.99	4
58.00	முதல்	58.99	3
59.00	முதல்	59.99	3
60.00	முதல்	60.99	2
61.00	முதல்	61.99	2
62.00	முதல்	62.99	1
63.00	முதல்	63.99	1
64.00	முதல்	64.99	2
65.00	முதல்	65.99	0
66.00	முதல்	66.99	0
67.00	முதல்	67.99	1
			220

அத்தகைய பட்டியல் அமைப்பதே மேற்கண்ட வகையைச் சார்ந்த அளவின விவரங்களை ஒழுங்குபடுத்தி ஆய்வதற்கு முதற் படியாகும்.

இதுவரை கூறிய பொது முன்னுரையில் அலேவுப் பரவலே அமைப்பதுபற்றிய பல பொதுவான விவரங்களே விரித்து உரைக்க வில்லே. இப்போது அவற்றைச் சுருக்கமாகக் கூறுவோம்.

முன்னர் செய்ததுபோல விவரங்களே அளவுக்கேற்ப வரிசைப் படுத்தவேண்டியது பட்டியல் அமைப்பதற்குத் தேவையானதன்று. விவரங்களேப் பார்த்த அளவிலேயே உச்சவரம்பினேயும், கீழ் வரம்பினேயும் தெரிந்துகொண்டு, எத்தனே பிரிவுகள் தேவைப்படு கின்றன என்பதனேயும் வரையறை செய்துகொண்டால், பிரிவு இடை வெளிகளே வெற்றுத்தாளில் குறித்துக்கொண்டு நேரடியாகப் பட்டியல் அமைக்கத் துவங்கிவிடலாம். ஒவ்வொரு பிரிவிலும் எத்தனேக் குறிப்புகள் அடங்குகின்றன என்பதனேச் சரிபார்க்கும் (tally) குறிகளேக் கையாண்டு, கணக்கெடுத்துக் கொள்ளலாம். இச்செயல் முறை முடிந்தவுடன் அலேவு எண்களேக் கணக்கிட்டு, கூடுதல்களே மேற்கண்டபடி பட்டியல் அமைப்பில் தந்துவிடலாம். மேலே தரப்பட்டுள்ள இந்த எளிய செயல்முறையில்கூட, பல முக்கியமான செய்திகள் குறித்து முன்கூட்டியே முடிவு செய்யவேண்டி யிருக்கிறது.

பிரிவு இடைவெளியின் அளவு (Size of Class Interval)

எந்த அளவிற்குப் பிரிவு இடைவெளிகளே எடுத்துக் கொள்வது (எத்தனே எண்ணிக்கை பிரிவுகளே எடுத்துக்கொள்வது என்று முடிவு செய்வதற்கு இது சமம்) என்று முடிவு கட்டுவதற்கு மனத்தில் கொள்ளவேண்டிய அடிப்படையான கருத்து ஒன்றுண்டு.

அதாவது எல்லாப் பிரிவுகளிலும் குறிப்புகள் ஒரே சீராகப் பரவி அமைந்திருக்குமாறு பிரிவுகளே அமைத்தல் வேண்டும். ஏனெனில், பின்னர் அலேவுப் பட்டியலே ஆராய்வதற்கும், ஒவ்வொரு பிரிவின் மையப் புள்ளியையே—பிரிவுப் புள்ளி (class mark) அப் பிரிவி லடங்கும் மதிப்புகளுக்கெல்லாம் பிரதிநிதியாக எடுத்துக்கொள்ளப் போகிறோம். சான்ருக, பட்டியல் 3-3ல் $46-லிருந்து $48 வரை 33 குறிப்புகள் இருப்பதைக் காண்கிறோம். இப் பட்டியலுக்குக் கணிப்புகள் செய்கையில் இக் குறிப்புகள் யாவும், அப் பிரிவின் மைய மதிப்பான $47ஆல் குறிப்பிடப்படுவதாகப் புனேந்துகொள்ளப் போகிறோம். பெரும்பாலான சமயங்களில் இப் புனேவைப் பொருத்த முடையதெனக் கூறமுடியாது. மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில்கூட மூலக் குறிப்புகளேப் பார்ப்போமாளுல், புனேவு சரியானதல்ல என்று தெரியவரும். மூல எண்களில் ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒரு பிரிவை அமைக்கும்போது, முற்றிலும் திருத்தமான கணிப்பு கிடைக்கும்.

ஆனால், நமக்குச் சுருக்கம் தேவையாக இருப்பதால், பிற நிபந்தனைகளையும் மீறாமல், அதிகப் பிழையும் நேராமல், பிரிவுகளை ஏற்பாடு செய்யவேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை நோக்க, பிரிவு இடைவெளி மிக விரிவாக இருப்பதற்குப் பட்டியல் 3-1 ஓர் எடுத்துக்காட்டாக இருக்கிறது.

மேற்கூறிய நிபந்தனை அதிகப் பிரிவுகள் தேவை என்பதை வலியுறுத்துகிறது. ஆனால், இதனோடு முரண்பட்ட இரண்டாவது நிபந்தனையொன்று உள்ளது. அதாவது, அலைவு எண்கள் முறையாகவும், வரிசையாகவும் அமையுமாறு பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை இருக்கவேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை நோக்கப் பாகுபாடு மிகவும் குறுகியதாக இருக்குமானால், இம்முறையில் ஒழுங்கினை எதிர்பார்க்கமுடியாது; கட்டுக்கோப்பும் ஒழுங்குமில்லாத பட்டியலே கிடைக்கும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை எளிதில் கையாள்வதற்கு வசதியாகவும், அவற்றின் சிறப்புகளை உடனடியாக உணர்ந்துகொள்வதற்கு ஏற்றதாகவும் இருக்குமாறு, பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையை வரையறை செய்யவேண்டும்.

எச். ஏ. ஸ்டூர்ஜ் (H. A. Sturges) என்பவர் (ஆறுவது அத்தியாயத்தில் பார்க்க) பொருத்தமான பிரிவு இடைவெளியைத் தோராயமாகத் தேர்ந்தெடுக்க செயல்முறை ஒன்றைக் கூறியுள்ளார். கொடுக்கப்பட்ட N விவரங்களின் வீச்சு (range) (சிறிய குறிப்புக்கும் பெரிய குறிப்புக்குமுள்ள வேறுபாடு) தெரிந்திருந்தால், i என்ற பொருத்தமான பிரிவு இடைவெளியைப் பின்வரும் வாய்பாட்டின் துணைகொண்டு தோராயமாகக் காணலாம் :

$$i = \frac{\text{வீச்சு}}{1 + 3.322 \log N}$$

இம் முறையினால் கிடைக்கின்ற மதிப்பு ஒரு சமயம் பின்ன மதிப்பாக இருப்பின் அப்படியே நடைமுறையில் பயன்படுத்த முடியாது. எனவே, அதற்கு அடுத்த நெருங்கிய முழு எண்ணைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்[2]. முன்னர்க் கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டில் வீச்சு \$28·80, N, 220. ஆகையால் இவ் வாய்பாட்டின்படி \$3·28 அளவுள்ள பிரிவு இடைவெளியைப் பயன்படுத்தவேண்டும். எனவே, இதற்கு நெருங்

[2] ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் (binomial co-efficients) தொடரால், 2-ன் படிகளாக அமைந்த எண்களுக்கெல்லாம், ஏற்ற பிரிவுகளில் பரவல் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது என்ற புனைவின் அடிப்படையில் இவ் வாய்பாடு உருவானது. ஆறும் அத்தியாயத்தில் ஈருறுப்பு விரிவுக் கோவையின் உறுப்புகளுக்கும், அலைவுப் பரவல்களுக்குமுள்ள உறவு தரப்பட்டுள்ளது.

கிய முழு எண்ணான $3-ஐப் பயன்படுத்துவதே எல்லா வகையிலும் நல்லது. இப் பிரிவு இடைவெளியைக்கொண்டு அமைக்கப்படுகிற 3-2 பட்டியல், நமது நிபந்தனைகட்கு எல்லாம் இணங்கி வருவதைக் காணலாம்.

பிரிவு எல்லைகளுக்கு இடங்காணல் (Location of Class Limits)

பட்டியல் அமைத்தலை எளிதுபடுத்தவும், பின்னர், கணிப்புகளை வசதியாகச் செய்யவும், பிரிவு எல்லைகளுக்கு இடம் காணுதல் மிகவும் முக்கியமானது. பிரிவு எல்லைகளோடு பிரிவு இடைவெளியும் முழு எண்ணாக இருக்கும்போது பட்டியல் அமைப்பது மிக எளிது. பிரிவு களின் மைய மதிப்புகள் முழு எண்ணாக இருக்கும்போது சராசரி முதலான புள்ளிவிவர அளவைகளைக் கணிப்பது எளிதாக இருக் கிறது.

சில வகையான விவரங்களில் அளவுத்திட்டத்தில் சில மதிப்புகளை யொட்டி குவிப்பு ஏற்படுவதைக் காணலாம். 1946ஆம் ஆண்டு நவம்பர் 20ஆம் தேதி மாதிரியாக எடுக்கப்பட்ட ஃபெடரல் ரிசர்வ் சிஸ்டத்தோடு (Federal Reserve System) தொடர்புடைய உறுப்பினர்களான பாங்கிகளின் கணக்கில், தொழில் சம்பந்தமாகத் தரப்பட்டுள்ள கடனைப் பற்றிய பின்வரும் புள்ளிவிவரங்களைக் கொண்டு இதனை விளக்குவோம். வட்டி வீதத்திற்கேற்ப கடன்கள் பரவலாக அமைந்துள்ளன.

வட்டி வீதம் (ஆண்டுச் சதவீதம்)	கடன்களின் எண்ணிக்கை (ஆயிரத்தில்)
2.1 முதல் 2.9	13.7
3.0	34 8
3.1 முதல் 3.9	13.2
4.0	117.2
4.1 முதல் 4.9	26.6
5.0	141.1
5.1 முதல் 5.9	3.6

இங்கே முழு எண்களைச் சார்ந்து குவிப்பு இருப்பதைக் காணலாம். அதோடு ஒவ்வோர் அரை சதவீதத்தைச் சார்ந்தும் துணைமையமான குவிப்புகளைக் காணலாம். அளவுகளை இவ்விதம் பாகுபாடு செய்யும்போது எல்லாப் பிரிவுகளிலும் குறிப்புகளின் குவிப்பு மையப் புள்ளிகளை யொட்டி அமையுமாறு பிரிவு எல்லைகளை இடம் கண்டு அமைக்க வேண்டும். ஏனெனில், அலைவுப் பட்டியலின் அடிப்படையாகக் கொண்டு செய்யப்படும் கணிப்புகளில், ஒவ்வொரு பிரிவிலுமுள்ள குறிப்புகள் யாவும் அப் பிரிவின் மையத்தில் குவிந்திருப்பதாகப் புனைந்துகொள்ளுகிறோம். எனவே, மேலே குறிப்பிடப்பட்ட வகையைப் போன்ற குறிப்புகளைப் பாகுபாடு செய்வதற்கு ஒவ்வொரு

பிரிவு இடைவெளியையும் அரை சதவீதமாக எடுத்துக்கொண்டால் $1\frac{3}{4}$-லிலிருந்து $2\frac{1}{4}$ வரை ($1\frac{3}{4}$ஐ இதில் சேர்க்கக்கூடாது), $2\frac{1}{4}$-லிலிருந்து $2\frac{3}{4}$-வரை, $2\frac{3}{4}$லிலிருந்து $3\frac{1}{4}$ வரை இவ்விதமாகப் பிரிவுகளை அமைப்பதே 2-விருந்து $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$-லிருந்து 3 என்பன போன்று அமைப்பதைவிடச் சிறப்புடையது.

கண்டறிந்த குறிப்புகளின் திருத்தமும் (Accuracy of observations), **பிரிவுகளை வரையறைசெய்தலும்** (definition of classes): அலைவுப் பட்டியலை அமைக்கும்போது பிரிவுகளைச் சரிவர வரையறை செய்யவேண்டியது இன்றியமையாதது. அவைகளின் வீச்சு குறித்தோ, எந்தக் குறிப்பு எப்பிரிவில் அமையவேண்டும் என்பது குறித்தோ, எவ்விதமான ஐயப்பாடும் இருக்கக்கூடாது. பின்வரும் பட்டியல் அமைப்பை ஒத்த அமைப்புகளைச் சில சமயங்களில் காண்கிறோம் :

பிரிவு இடைவெளி	அலைவு
0-லிருந்து 10 வரை	3
10-லிருந்து 20 வரை	8
20-லிருந்து 30 வரை	15
30-லிருந்து 40 வரை	6
40-லிருந்து 50 வரை	2

வேறு விளக்கங்கள் இல்லாத நிலையில் 10 என்ற குறிப்பு முதல் பிரிவில் இடம் பெறுமா அல்லது இரண்டாவது பிரிவில் இடம் பெறுமா என்ற கேள்வி பிறக்கிறது. இந்த ஐயப்பாட்டிற்கு இடமின்றிப் பின்வரும் முறை போன்று ஒவ்வொரு பிரிவின் வீச்சையும் தெளிவாக வரையறை செய்துவிடுவது விரும்பத்தக்கது.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவு
0-லிருந்து 9·9 வரை	3
10-லிருந்து 19·9 வரை	8
20-லிருந்து 29·9 வரை	15
30-லிருந்து 39·9 வரை	6
40-லிருந்து 49·9 வரை	2

முன் கூறிய குறைபாடு இம் முறையினால் நீங்குகிறது. ஆனால், பத்திலொன்றுக்குத் திருத்தமாகக் குறிப்புகள் அமையும்போதுதான் இது சரியாக இருக்கும்; ஒன்றுக்குத் திருத்தமான குறிப்புகள் அமையுமானால் (அதாவது 10 என்ற மதிப்பாகக் குறிக்கப்பட்டது உண்மையில் 9·5க்கும் 10·5க்கும் நடுவில் அமையுமானால்) பிரிவு வீச்சினை மாற்றி அமைத்துவிட்டதனால் மட்டும் இந்தக் குறிப்பையும் பிரிவு எல்லைக்குள் அடக்கிவிட்டதாகாது. அத்தகைய சமயத்தில் பிரிவு எல்லையில் அமையும் ஒரு குறிப்பினை இரண்டாக்கி ஒவ்வொரு பாதியையும் அடுத்தடுத்த ஒவ்வொரு பிரிவிலும் சேர்த்து விடுகிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட குறிப்புகளின் மூல மதிப்புகளைவிட, அடுத்த ஸ்தானத்திற்கோ அல்லது குறைவுபட்ட பின்னத்துக்கோ திருத்தமாகப் பிரிவு எல்லைகளை அமைக்கவேண்டும் என்ற தத்துவத்தை யூலும், கெண்டாலும் (Yule and Kendall) கூறியுள்ளார்கள். முந்தைய எடுத்துக்காட்டில் குறிப்புகள் பத்திலொன்றுக்குத் திருத்தமாக இருக்குமானால் 9·9 என்று குறிக்கப்பட்ட மதிப்பு உண்மையிலேயே 9·85-க்கும் 9·95-க்கும் இடையில் இருக்கிறது என்பது பொருள். எனவே, இங்கே பிரிவுகளைச் சரிவர வர்ணிக்கவேண்டுமானால் இடைவெளிகளை 0-விருந்து 9·95 வரை, 9·95-லிருந்து 19·95 வரை என்பதுபோல அமைக்கவேண்டும். பாகுபாடு செய்யப்படவேண்டிய குறிப்புகள் முதலாவது தசம ஸ்தானத்திற்கு மட்டுமே திருத்தமாகத் தரப்பட்டிருப்பதால், பிரிவு எல்லைகள் ஒன்றின்மேல் ஒன்று படிந்திருப்பதுபோலக் காணப்படினும், ஐயம் எழுவதற்கு இடமில்லை. இவ்விதமாகப் பிரிவு எல்லைகளை அமைக்கும்போது மையப் புள்ளிகளின் மதிப்புகள் அல்லது பிரிவுக்குறிகள் (class marks) 4·95, 14·95 முதலியன ஆகும். பட்டியலை அமைத்துப் பயன்படுத்தும்போது பிரிவு எல்லைகளின் உண்மைப் பொருளை மனத்தில் கொள்ளவேண்டும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள குறிப்புகளின் திருத்தத்திற்கேற்ப பிரிவு எல்லைகளை வரையறை செய்யவேண்டும். அதோடு தொடர்ந்து செய்ய இருக்கும் கணிப்புகள் திருத்தமாக அமைவதற்கு பிரிவுக் குறிகளைத் திட்டவட்டமாக வரையறை செய்து பயன்படுத்தவேண்டும்.

மேற்கூறியவாறு ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் இரு எல்லைகளையும் தெரிந்துகொண்டுவிட்டால், பட்டியல் அமைப்பது எளிதாகிவிடும். ஒரு பிரிவின் கீழ் எல்லையினை மட்டுமோ, மையப் புள்ளியை மட்டுமோ கொடுத்திருந்தால் பட்டியலமைக்கும்போது பிழைகள் நேர இடமுண்டு. பட்டியலையொட்டி கணிப்புகள் செய்யவேண்டியிருக்கையில் பிரிவுகளின் மையப் புள்ளிகளுக்காகத் தனியே பத்தி ஒன்றை அமைத்துக்கொள்வது நல்லது.

பிற தேவைகள் : எல்லாப் பிரிவுகளையும் ஒப்பு நோக்குவதற்கு வசதியாக, பட்டியலிலுள்ள பிரிவு இடைவெளிகள் யாவும் ஒரே அளவினதாக இருக்கவேண்டும். சில சமயங்களில் இதற்கு மாறாக வேறுபட்ட பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட பட்டியல்களும் பதிப்பிக்கப்படுவதுண்டு. அளவுத் திட்டத்தின் ஒரு பகுதியில் 5 என்ற இடை வெளியுடைய பிரிவில் அடங்கும் விவரங்களின் எண்ணிக்கையையும், அளவுத் திட்டத்தின் மற்றொரு பகுதியில் 10 என்ற வீச்சையுடைய பிரிவில் அடங்கும் விவரங்களின் எண்ணிக்கையையும் கொடுத்திருந்தால், இவ் வகுப்புகளை ஒப்பிடுதல் இயலாது. சில சமயங்களில் அளவுத் திட்டத்தின் வீச்சுகள் சிலவற்றில் அமை

கின்ற விவரங்களைக் குறித்து விளக்கம் தேவைப்படலாம். அவ்வித தேவை எழும்போது, அப் பகுதியைப்பற்றி அறிய துணைப்பட்டியல் ஒன்றையும் தனியாக அமைத்துக்கொள்வதே சிறப்பாகும். அப் போதுதான் முதல் பட்டியலின் பயன் குறைவுபடாது.

பிரிவுகளின் வீச்சுபற்றி ஐயமிருக்கக் கூடாது என்ற நிபந்தனையும் இதேபோன்று முக்கியமானது. அதாவது வீச்சுகளைத் தீர்மானிக்க முடியாதவாறு எந்தப் பிரிவும் இருக்கக்கூடாது. துண்டு வேலைகளின் (piece work) மூலம் 50 டாலரும், அதற்கு மேலும், ஊதியம்பெறும் நபர்களை ஒரு பிரிவில் '$ 50-ம் அதற்கு மேலும் என்று குறிப்பிட்டால், இப் பிரிவின் மேல்வரம்பு தெளிவற்றிருக்கிறது. பட்டியலில் இக்குறை ஏற்பட்டால், இதிலடங்கிய விவரங்களையொட்டி கணிப்புகளைச் செய்வதற்கு முட்டுக்கட்டையாக இருக்கும். புறக்கோடியாக (extreme) அமைந்துள்ள குறிப்புகள் பல இருக்கும் போது, சில சமயங்களில் இத்தகைய பிரிவுகளை ஏற்படுத்துவது தவிர்க்க முடியாது போகலாம். எனினும், இதுபோன்று செய்யும் போது 'திறந்த முனை' பிரிவுகளில் மெய்யாகவே அடங்குகின்ற குறிப்புகளின் மதிப்புகள் எவை என்பதுபற்றிப் பட்டியலின் கீழே அடிக்குறிப்பு தருதல் வேண்டும்.

3-5 பட்டியலில் முன் இரு பத்திகளிலும் சுட்டிக்காட்டப் பட்டுள்ள பிழைகள் எடுத்துக்காட்டப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 3-5

1934* ஆம் ஆண்டில் நெவாடா (Nevada), ரெனேவில் (Reno) வாடகைக்குக் குடியிருப்பு பற்றிய அலைவுப் பரவல் (வாடகை மதிப்பினையொட்டிப் பாகுபாடு செய்யப்பட்டது.)

மாத வாடகை	ஒவ்வொரு பிரிவிலும் குடியிருப்புகளின் எண்ணிக்கைகள் (அலைவு)
$10.00-க்கும் கீழ்	327
$10.00 முதல் $14.99	349
15.00 முதல் 19.99	521
20.00 முதல் 29.99	1,039
30.00 முதல் 49.99	1,075
50.00 முதல் 74.99	189
75.00 முதல் 99.99	24
$100.00-ம் அதற்கு மேலும்	9
	3,533

*வாஷிங்டன் வணிகத்துறையினர் (Department of Commerce) வெளியிட்ட ரியல் பிராபர்ட்டி இன்வென்டரி, 1934, சம்மரி அண்ட் சிக்ஸ்டிபோர் சிடிஸ் கம்பைண்ட் (Real Property Inventory, 1934 Summary and Sixty four Cities Combined) எனும் வெளியீட்டில் இருந்து எடுக்கப்பட்டது. இப்பட்டியலுக்கு, ரேனே நகரிலுள்ள 225 வாடகைக் குடியிருப்புகள் பற்றிய விவரங்கள் கிடைக்கவில்லை.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் 'திறந்த முனை' பிரிவுகள் இரண்டில் எல்லைகள் தெரியவில்லை. நடுப் பிரிவுகளின் வீச்சுகளும் மாறுபடுகின்றன. இரு பிரிவுகளுக்கு வீச்சு \$5 ஆகவும், ஒரு பிரிவுக்கு \$10 ஆகவும், மற்றும் இரு பிரிவுகளுக்கு \$25 ஆகவும் இருக்கிறது. தனிப்பட்ட சிறப்பு ஆய்வுகள் சிலவற்றிற்கு இத்தகைய அமைப்பு உதவியாய் இருப்பினுங்கூடப் புள்ளிவிவரக் கணிப்புகளுக்கு இத்தகைய பட்டியல்கள் உதவாது.

ஒரு புள்ளிவிவரப் பட்டியல் அது எதற்கென அமைக்கப்படுகிறதோ, அதற்கு ஏற்ற முறையில், ஏற்ற வடிவில் பயன்படுத்துபவர்களுக்குத் தரப்படவேண்டும். முற்கூறிய நுட்ப நிபந்தனைகளை மட்டும் பட்டியல் பூர்த்தி செய்தால் போதுமானதாகாது. கட்டுக்கோப்பான அமைப்பும், தெளிவான, ஐயப்பாடற்ற பத்தித் தலைப்புகளும், போதுமான விளக்கமுமமைந்து விளங்க வேண்டும்.

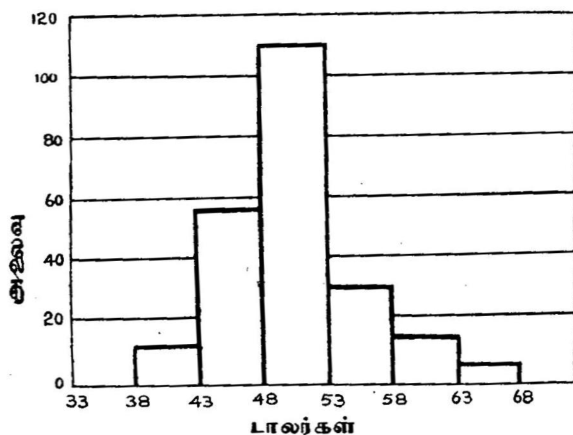
அலைவுப் பட்டியலை வரைபடமாக அமைத்துக் காட்டுதல்

மேற்கூறிய வகையைப் போன்ற அலைவுப் பட்டியல்கள், கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தைச் சுருக்கமாக வெளியிடுவதற்கும், பின்னர் செய்ய இருக்கும் ஆய்வுகளுக்குத் தேவையான அடிப்படையை உருவாக்குவதற்கும் பயன்படுகின்றன.

அவைகளைப் பட்டியல்களாக அமைப்பதோடு மட்டுமல்லாமல், முன்னர் விளக்கிய ஆயமுறையின் (coordinate system) மூலம் வரைபடமாகவும் அமைக்கலாம். வரைபட முறையைக் கையாளுகையில் அலைவுப் பரவலின் சிறப்புப் பண்புகள் தெளிவாக வெளியாகின்றன.

3-1 பட்டியலில், 220 தொழிலாளர்களது வார ஊதியங்கள் 5 டாலர் பிரிவு இடைவெளிகளில் தரப்பட்டுள்ளன. அதனை 3.1 படத்தில் வரை வடிவமாகத் தந்துள்ளோம். இப் படத்தில் x அச்சு வழியே பிரிவு இடைவெளிகளையும், y அச்சு வழியே பிரிவு அலைவுகளையும், ஏற்ற அளவுத் திட்டங்களைப் பயன்படுத்திக் குறித்துள்ளோம். மட்டாய அளவுத்திட்டத்தில் 0-விருந்து ஆரம்பிப்பதற்குப் பதிலாக, \$33லிருந்து ஆரம்பித்திருப்பதைக் கவனிக்கவும். படத்தின் எளிமை கருதி 0 விருந்து 33 வரையுள்ள அளவுத் திட்டத்தைப் புறக்கணிக்கிறோம்.

இவ்வுண்மையை மாணவர் நினைவில் கொண்டால்தான், இரண்டு மாறிகளுக்கிடையேயுமுள்ள தொடர்பினைப் பிழையின்றி



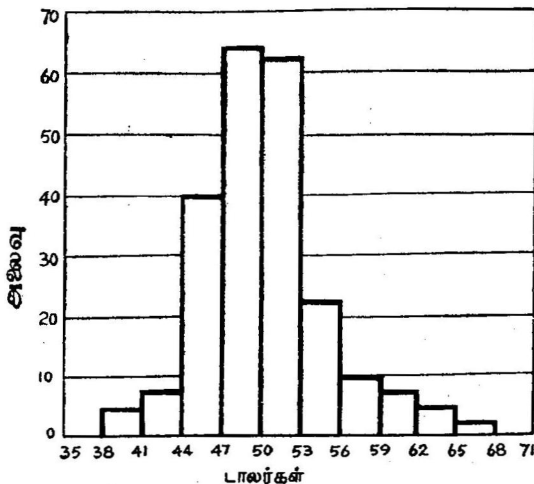
3.1. படம்.

பத்தி விளக்கப்படம்: வார ஊதிய அடிப்படையில் 220 தொழிலாளர்களைப் பாகுபாடு செய்த பரவல் (பிரிவு இடை வெளி = $5).

புரிந்துகொள்ள முடியும். மேற்படி படத்தினைப் பத்தி விளக்கப் படம் (column diagram) அல்லது அலைவெண் செவ்வகப்படம் (histogram) என்று அழைக்கிறோம். இதனை அமைப்பதற்குப் பிரிவு இடைவெளிகளின் மேல் எல்லையையும் கீழ் எல்லையையும் குறிக்கும் புள்ளிகளைச் சிறிய படுக்கைக் கோடுகளால் இணைக்க வேண்டும். இந்த விளக்கப் படத்தினைச் சரியாக ஆராயவேண்டு மானால், ஒவ்வொரு செவ்வகத்தின் பரப்பும் அதற்கிசைந்த குறிப்பு களின் எண்ணிக்கைக்குத் தக்கதாக அமைந்துள்ளன என்பதனையும், இதேபோல் மொத்தப் பரப்பு 220 குறிப்புகளைக் குறிக்கின்றன என்பதனையும் கவனிக்க வேண்டும். ஒவ்வோர் ஊதியப் பிரிவிலும் எத்தனை தொழிலாளர் அடங்கியுள்ளனர் என்பதனை ஒப்பீட்டடிப் படையில் நன்கு வெளியிடும் வகையில் அமைந்து, பரவலுக்குத் தெளிந்த ஒரு விளக்கமாக இப்படம் காட்சி தருகிறது.

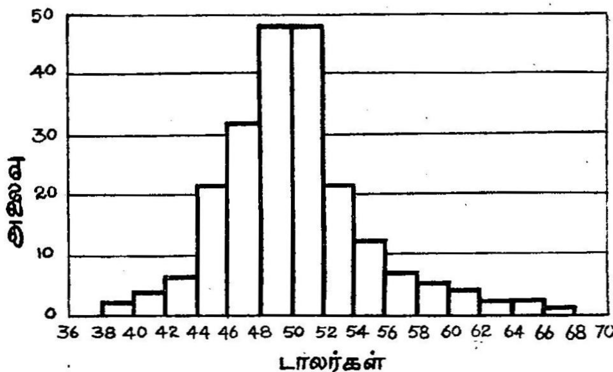
இந்த எடுத்துக்காட்டில் பிரிவுகள் பெரிதாக இருப்பதால் உண்மை சிதைந்து காணப்படுகிறது. குறிப்புகள் எங்ஙனம் பரவி யுள்ளன என்பதனைப்பற்றிய உண்மையான கருத்தினைத் தெரிந்து கொள்ள இயலாதவாறு பல விவரங்களை இழந்து விட்டோம். 3.2 படமானது, $3 பிரிவு இடை வெளிகளில் குறிப்புகளின் பரவலை

வெளியிடும் அலேவெண் செவ்வகப்படமாகும். இதில் சிறிய இடைவெளியைப் பயன்படுத்துவதால் பரவலே ஒழுங்காகவும், சமச்சீராகவும்



3.2. படம்.

பத்தி விளக்கப் படம்: 220 தொழிலாளர்களே வார ஊதிய அடிப்படையில் பாகுபாடு செய்தது (பிரிவு இடைவெளி = $3·00).

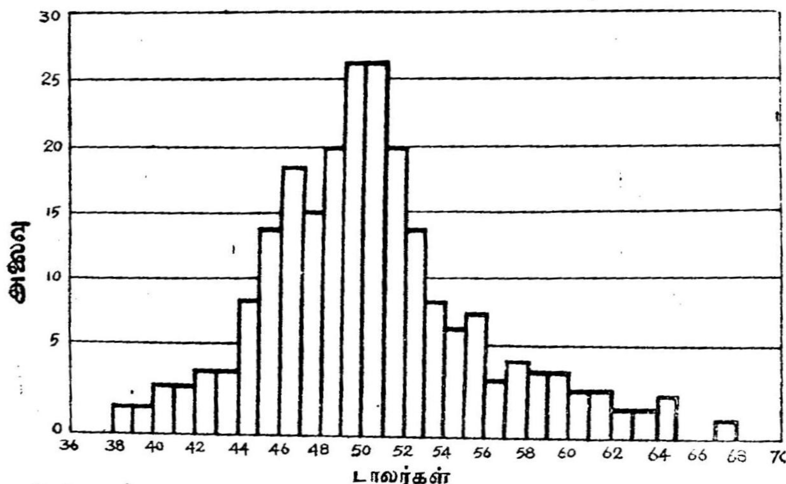


3.3. படம்.

பத்தி விளக்கப் படம்: 220 தொழிலாளர்களே வார ஊதிய அடிப்படையில் பாகுபாடு செய்தது (பிரிவு இடைவெளி = $ 2·00).

நுணுக்கமாகக் காணமுடிகிறது. இதே காட்சியை இரண்டு டாலர் பிரிவு இடைவெளியுள்ள பரவலான 3.3 படத்திலும் காண்

கிரேம். 3.4 படத்தில் ஒரு டாலர் பிரிவு இடைவெளி கொண்டு அமைக்கப்பட்ட பரவலுள்ளது. இந்த இடைவெளி கொடுக்கப்



3.4. படம்.

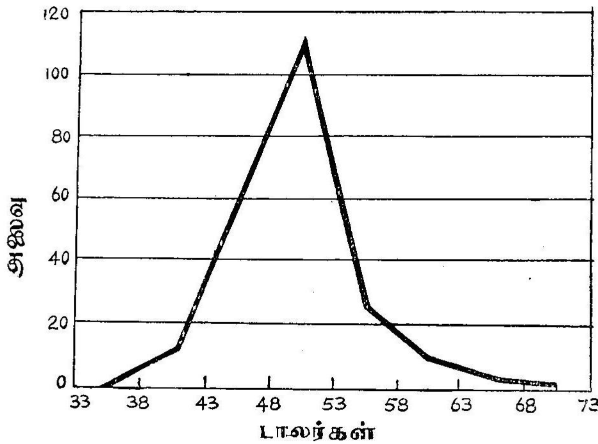
பத்தி விளக்கப் படம்: 220 தொழிலாளர்களை வார ஊதிய அடிப்படையில் பாகுபாடு செய்தது. (பிரிவு இடைவெளி = $1·00).

பட்டுள்ள விவரத்திற்கு மிகவும் குறுகியதாக இருப்பதால் ஓரளவு ஒழுங்கற்ற அமைப்பு உருவாகியுள்ளது. (இந்த நான்கு படங்களிலும் செங்குத்து அளவுத் திட்டம் ஒரே அளவாக இல்லாததால் அளவை எண்களைக் கொண்டே பிரிவு அலைவுகளை ஒப்பு நோக்கிக் காணமுடியும்.)

3.1 படம், 3.4 படம் ஆகிய அலைவெண் செவ்வகப் படத்திற்கு இசைந்த அலைவுப் பலகோணத்தை, படம் 3.5, படம் 3.6 ஆகியவற்றில் காணலாம். பிரிவு இடைவெளிகளின் மையப் புள்ளியை மட்டாயமாகவும் (abscissa), பிரிவு அலைவுகளைக் குத்தாயமாகவும் (ordinates) கொண்டு புள்ளிகளைக் குறித்து, அவற்றை ஒடிந்த கோட்டால் சேர்த்தால் இப் பலகோணம் ஒவ்வொன்றும் உருவாகும்.

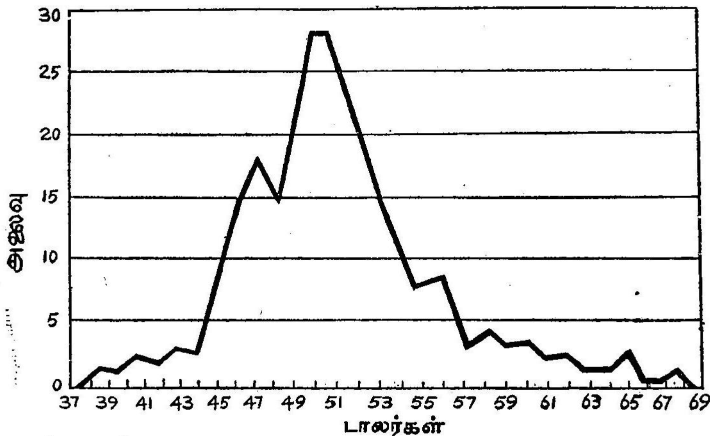
கொடுக்கப்பட்ட பிரிவுகளில், கீழ்ப்பிரிவிற்கும் கீழே ஒரு பிரிவையும், கொடுக்கப்பட்ட பிரிவுகளில் மேல் பிரிவுக்கும் அடுத்ததாக ஒரு மேல் பிரிவையும் கணக்கில் எடுத்துக்கொண்டு அவற்றிற்கு 0 என்ற அலைவைத் தந்து, இத்தகைய படங்களை முடிக்கவேண்டும். எனவே, பலகோணத்தின் இரு கோடி முடிவுகளும் புதிதாக

எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட பிரிவுகளின் மையப் புள்ளிகளில் அமைந்து, அடிக்கோட்டில் இருக்கும். அலைவுப் பலகோணத்துக்கு இடைப்பட்டு அடங்கும் பரப்பு, மொத்தக் குறிப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும். ஆனால், ஓர் இடைவெளிக்குள் அடங்கும் பரப்பை அவ்விடைவெளிக்



3.5. படம்.

அலைவு எண் செவ்வகப் படம்: 220 தொழிலாளர்களது வார ஊதிய அடிப்படையில் பாகுபாடு செய்யப்பட்ட பரவல் (பிரிவு இடைவெளி = \$5·00).



3.6. படம்.

அலைவுப் பலகோணம்: 220 தொழிலாளர்களது வார வருமான அடிப்படையில் பாகுபாடு செய்யப்பட்ட பரவல் (பிரிவு இடைவெளி = \$1·00).

குள் அடங்கும் குறிப்புகளுக்குத் தகவாக எடுத்துக்கொள்ளுவது சரி யல்ல. ஏனெனில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள பிரிவுகளின் பரவலிலுள்ள ஒழுங்கின்மை இதற்கு இடம் தராது. ஒவ்வொரு வகுப்பின் மையப் புள்ளி வழியே வரையப்பட்ட குத்துக்கோடுகளின் உயரம், வகுப்பு அலைவுகளையே குறிக்கின்றது.

வளைகோடுகளை இழைத்தல் (Smoothing of Curves)

வேறுபடும் பிரிவு இடைவெளிகளைப் பயன்படுத்தினால் நேரும் விளைவுகள்பற்றி மீண்டும் நினைவுபடுத்துகிறோம். பிரிவு இடைவெளியை குறைக்கக் குறைக்க அலைவெண் செவ்வகப் படமும், பலகோணமும் இழைந்து ஒழுங்காக அமைகின்றன. இது ஒரு குறிப்பிட்ட நிலை வரையில்தான் அமையும். இந்தக் குறிப்பிட்ட நிலையைத் தாண்டினால் விவரங்களில் விரிசல் காணப்படும். பிரிவுகள் பெரிதாக இருக்கும் போது, பிரிவு அலைவுகளில் காணப்பட்ட ஒழுங்கான மாற்றங்கள், பிரிவுகள் சிறியதாகும்போது காணப்படுவதில்லை. இவ்விதச் சிறிய ஒழுங்கற்ற பிரிவுகள், பொது விதியினின்று விலகிச் செல்வது போன்ற தோற்றத்தைத் தந்துவிடுகின்றன.

3.4 படம் இத்தகைய ஒழுங்கீனத்தைக் காட்டுகிறது. கீழ்வரம்பி லிருந்து உச்சமான $50 வரையுள்ள வேறுபட்ட ஊதியப் பிரிவுகளுக் கிடையே தொழிலாளர்களது எண்ணிக்கை உயர்ந்து, பின்னர் குறைவுபட்டு, இறுதியாக ஒரே தொழிலாளருள்ள மேல் வகுப்பான $67 லிருந்து $67·99 வரை செல்கிறது என்கின்ற பொது விதிக்கு விலக்காக இத்தகைய ஒழுங்கீனங்கள் காட்சியளிக்கின்றன. 220 நபர்களும் ஒரே வேலையில் ஈடுபட்டிருந்தாலும், அவர்களது ஊதி யங்கள் அவர்களது திறமையையும் விரைவையும் மட்டுமே பொறுத் திருப்பதாலும், ஏற்ற இறக்கங்களில் ஓர் ஒழுங்கினை நாம் எதிர்பார்க் கிறோம். ஒரே வாரத்திற்கு மட்டுமான விவரங்களுக்குப் பதில் 52 வாரங்களுக்கான விவரங்கள் நமக்குக் கிடைக்குமானால், அந்த ஆண்டில் 220 தொழிலாளர்களில் ஒவ்வொருவருக்கும் வாரச் சராசரி ஊதியங்களைக் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ளலாம். அப்போது சிறிய பிரிவு இடைவெளிகளில் முன்னிலும் அதிக ஒழுங்கான அமைப்பை எதிர்பார்க்கலாம். ஏனெனில், ஒரு குறிப்பிட்ட வாரத்தில் தற்செய லாக நிகழக்கூடிய எந்த இறக்கங்களும் கணிப்பைப் பாதிக்காது. அல்லது 11,440 தொழிலாளர்களுக்கு (52 தடவை 220) ஒரு வார ஊதியம் தெரியுமானாலும், மேலே கண்டதுபோன்ற முடிவினைப் பெற முடியும். எனவே, ஒழுங்கும் இழைவும் தேவையானால், பிரிவுகளின் அளவைக் குறைப்பதோடு அவற்றின் எண்ணிக்கையையும் அதிகப் படுத்தவேண்டும். அப்போதுதான் சிறிய அளவுக் குறிப்புகளைப்

பாதிக்கக்கூடிய தற்செயல் ஒழுங்கீனங்கள் முற்றிலும் நீக்கப்படும். 3.4 படத்திலும், 3.6 படத்திலும், காட்டப்பட்டுள்ளன போன்று குறைந்த அளவு எண்ணிக்கையுடைய குறிப்புகளைக் கண்டு பண்பட்ட பாகுபாட்டைச் செய்யமுடியும். ஆனால், குறிப்புகளின் எண்ணிக்கைகளை இதுபோல அதிகப்படுத்துவது நடைமுறையில் இயலாத காரியம். மிகச்சிறிய பிரிவு இடைவெளிகளையும், மிக அதிகமான குறிப்புகளையும் கொண்ட பரவலைத் தோராயமாக அமைக்கும் முறையைக் காண முனைகிறோம். வளைகோட்டை இழைப்பதின் மூலமாகவே அத்தகைய தோராயத்தைப் பெறமுடியும்; இம்முறையினாலேயே சிறு ஏற்ற இறக்கங்களால் விளையக்கூடிய ஒழுங்கீனங்களை நீக்கி அலைவு வளைகோட்டைப் (frequency curve) பெறமுடியும்.

எந்த முழுமைத் தொகுதியினின்று மாதிரியில் காணப்படும் குறிப்புகள் பிரித்தெடுக்கப்பட்டிருக்கக் கூடுமோ, அதனை உண்மையாக வெளிக்காட்டுவதே இழைக்கப்பட்ட அலைவு வளைகோட்டின் வேலை. முன்னர் அலைவுப் பலகோணத்தின் பகுதிகளான பரப்புகள் மொத்தக் குறிப்புகளின் எண்ணிக்கைக்கு வீதமாக அமையாது என்பதனைச் சுட்டிக்காட்டினோம். விவரங்களின் ஒழுங்கீனம் அதற்குக் காரணமாக அமைகிறது என்பதனையும் காட்டினோம். இழைக்கப்பட்ட அலைவுவளைகோட்டில் இத்தகைய ஒழுங்கீனங்கள் நீங்கிவிடுகின்றன. எனவே, மட்டாய அளவுத் திட்டத்தில் இரு குறிப்பிட்ட புள்ளிகளில் நிறுத்தப்பட்ட இரண்டு குத்தாயங்களுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பை அம்மதிப்புகளுக்கு இடையேயுள்ள குறிப்புகளின் கோட்பாட்டு அலைவெண்ணுக்கு (theoretical frequency) வீதமாகப் புனைந்து கொள்ளலாம். மேலும் இழைக்கப்பட்ட தொடரினை நிறுவி விட்டதால், இடைவைப்பு மூலமாக (interpolation) மூலப்பட்டியலில் தரப்படாத இடைமதிப்புகளின் அலைவெண்களைக் கூடத் தீர்மானிக்கலாம்.[3]

3-6 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ள விவரமாவது: 1918-ல் $4,000க்கும் குறைந்த தனிப்பட்ட வருமானத்தைப் (Personal Income) பெற்றோரது பரவல். இழைக்கும் முறைக்கு இதனை எடுத்துக்காட்டாகத் தருகிறோம்.[4]

[3] நடைமுறைப் புள்ளி வேலையில் பொதுவாகவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களில் பல பிளவுகளிருக்கும். மாறிகளின் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் தொடர்ச்சியாக இருப்பதில்லை. இடை வைப்பு என்பது, மாறும் அளவையின் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு இடையேயுள்ள மதிப்புகளை மதிப்பீடு செய்யும் மதிப்பாகும்; அல்லது வளைகோட்டில் கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகளுக்கிடையே வேறு ஒரு புள்ளியை இடம் காண்பதாகும். கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு மிகவும் முரண் இல்லாத மதிப்புகளை மதிப்பீடு செய்வதற்கு வழி வகுக்கும் இடை வைப்பு முறையே மிகவும் திருத்தமான தாகும்.

[4] மூலம் மிச்சல், கிங், மெக்காலே, நாத் (Mitchell, King, Macaulay and Knauth) Ref: 108. படிமுறை செய்யப்பட்டுள்ள வருமான மதிப்புகள், பிரடரிக், ஆர். மெக்காலே கண்டது.

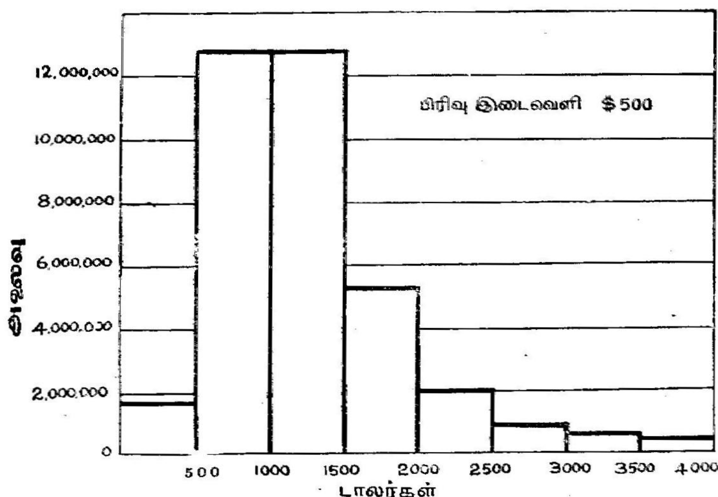
பட்டியல் 3-6

1918-ல் தனிப்பட்ட வருமானம் பெற்ரோது பரவல்—வருமானத்திற்கேற்ப அமைக்கப்பட்டது. ($4000-க்கும் குறைந்த தனிப்பட்ட வருமானம் இதனுள் அடங்குகிறது.)

வருமானப் பிரிவு*	நபர்களின் எண்ணிக்கை†
$0 முதல் $100 வரை	62,809
$100 முதல் 200	103,704
200 முதல் 300	209,087
300 முதல் 400	489,963
400 முதல் 500	961,991
500 முதல் 600	1,549,974
600 முதல் 700	2,154,474
700 முதல் 800	2,668,466
800 முதல் 900	3,013.034
900 முதல் 1,000	3,144.722
1,000 முதல் 1,100	3,074,351
1,100 முதல் 1,200	2,850,526
1,200 முதல் 1,300	2,535.285
1,300 முதல் 1,400	2,205,728
1,400 முதல் 1,500	1,832,230
1,500 முதல் 1,600	1,512 649
1,600 முதல் 1,700	1,234.397
1,700 முதல் 1,800	999,996
1,800 முதல் 1,900	811,236
1,900 முதல் 2,000	663,789
2,000 முதல் 2,100	549,787
2,100 முதல் 2,200	463,222
2,200 முதல் 2,300	395,115
2,300 முதல் 2,400	340,141
2,400 முதல் 2,500	295,490
2,500 முதல் 2,600	258,650
2,600 முதல் 2,700	227,731
2,700 முதல் 2,800	201,488
2,800 முதல் 2,900	178,901
2,900 முதல் 3,000	154,499
3,000 முதல் 3,100	142,802
3,100 முதல் 3,200	128,217
3,200 முதல் 3,300	115,583
3,300 முதல் 3,400	104,504
3,400 முதல் 3,500	94,803
3,500 முதல் 3,600	86,405
3,600 முதல் 3,700	79,023
3,700 முதல் 3,800	72,562
3,800 முதல் 3,900	66,900
3,900 முதல் 4,000	61,894

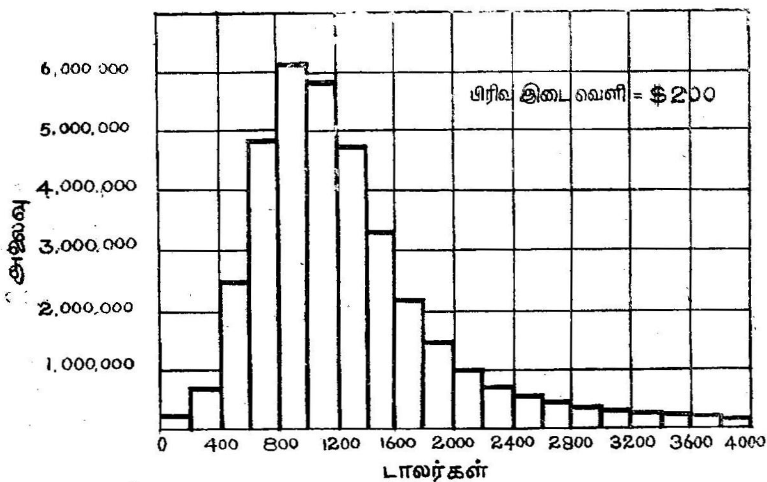
* *பிரிவுகளின் வரையறையாவது: $10-லிருந்து $100 வரை என்பதில் $100 நீங்கலாகப் பிற அடங்கும். இது போன்றே பிறவும் அமையும். $100 வருமானமுள்ள நபர் 2ஆவது பிரிவில் இடம் பெறுவார்.*

† *மிச்சலுடைய அறிக்கை கூறுகிறது: 'மேலுள்ள எண்கள் ஒரு ஸ்தானத்துக்குத் திருத்தமாகத் தரப்பட்டுள்ளன. இத்தகைய கணிதத் திருத்தம் செயல்நுணுக்கம் கருதி மேற்கொள்ளப்பட் டிருக்கிறதேயன்றி பிற காரணங்களுக்காக அல்ல.*



3.7. படம்.

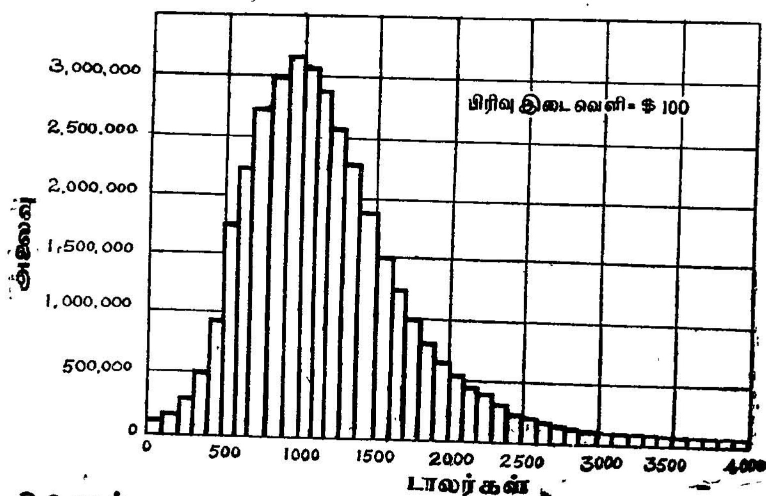
பத்தி விளக்கப் படம் : 1918-ல் அமெரிக்காவில் தனிப்பட்ட வருமானங்கள் பெற்ருேரது பரவல். $4,000-க்கும் குறைந்த ஊதியத்தைப் பெற்றவர்கள் இதனுள் அடங்குவர் (பிரிவு இடைவெளி = $500).



3.8. படம்.

பத்தி விளக்கப் படம் : 1918-ல் அமெரிக்க நாட்டில் தனிப்பட்ட வருமானங்கள் பெற்ருேரது பரவல். $4,000-க்குக் குறைந்த வருமானம் பெற்ருேர் யாவரும் இதில் அடங்குவர். (பிரிவு இடைவெளி = $200).

படங்கள் 3.7, 3.8, 3.9 ஆகியவை முறையே $500, $200, $100 இடைவெளிகளைக் கொண்டு பாகுபாடு செய்து அமைக்கப்பட்ட பத்திவிளக்கப் படங்கள். பிரிவு இடைவெளி குறையக் குறைய அலைவெண் செவ்வகங்கள் ஒழுங்காகவும் சீராகவும் அமையும். ஆனால், $100-க்கும் குறைவாகப் பிரிவு இடைவெளியை எடுத்துக்கொள்ளுவதற்கு நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்கள் இடம் தராது. பிரிவு இடைவெளி குறையக் குறைய, கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் எந்தப் பரவலுக்கு அணித்தாக நெருங்கிச் செல்கின்றனவோ, அந்த அடித்தளமாக அமைந்த பரவலை அறிந்துகொள்ளுவதில் சிக்கலுள்ளது. அலைவு செவ்வகப் படத்தின் ஒடிந்த கோட்டிற்குப் பதிலாக மென்மையான வளைகோடு ஒன்றைப் பின்வருமாறு வரைவோம். அலைவுச் செவ்வகப் படம் அடக்கிய அதே மொத்தப் பரப்பினை வளைகோடும் உள்ளடக்க வேண்டும்.



3.9. படம்.

பத்தி விளக்கப் படம்: 1918-ல் அமெரிக்க நாட்டில் தனிப்பட்ட வருமானங்கள் பெற்றோரது பரவல். $4,000க்குக் குறைந்த வருமானம் பெற்றோர் யாவரும் இதில் அடங்குவர் (பிரிவு இடைவெளி = $ 100).

அலைவுச் செவ்வகத்தின் ஒவ்வொரு செவ்வகத்திலிருந்தும் வளைகோட்டால் வெட்டப்பட்ட அதே அளவுள்ள அந்தந்த செவ்வகத்தோடு புதிதாக இணையும் வளைகோட்டுப் பகுதியைச் சேர்க்க வேண்டும். இப்படி வரைந்தால் பரவலின் பிரதிநிதியாக

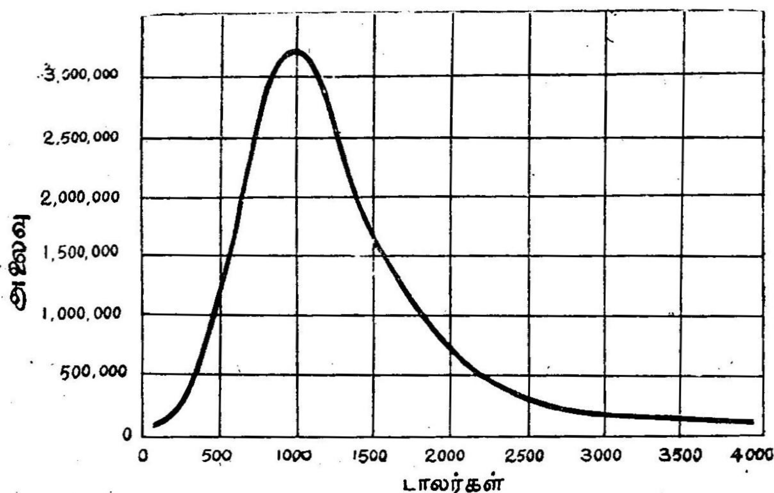
அமையக்கூடிய அலைவு வளைகோடு நாம் விரும்பும் வண்ணம் கிடைக்கும். வளைகோடு அதே அளவு மொத்தப் பரப்பினை அடக்க வேண்டுமென்பது அடிப்படைத் தேவை. ஒழுங்கில்லாத பிரிவுகள் இருப்பதனால், அவ்வகையான தனிப்பட்ட செவ்வகங்களின் பரப்பு குறித்து நாம் கூறிய விதிக்கு விலக்கு ஏற்படும். எனினும் பொதுவாக நாம் முன்னர்க் கூறிய விதி பயனுள்ள தொன்றாகும். (கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு மிகவும் ஏற்புடைய இழைத்த வளைகோட்டைப் பொருத்துவதற்கேற்ற இன்னும் செம்மையான முறைகள் பின்னர் விவாதிக்கப்படும். இங்கு விளக்கப்பட்டது போல் கண்காணிப்பினால் இழைக்கும் முறை, தேவைப்படும் வளைகோட்டைக் கணிசமான அளவுக்குத் தோராயமாக அறிய உதவும்.)

3.9 படத்தில் தரப்பட்ட வருமான அலைவுப் பரவலைக் கொண்டு இழைத்து அமைக்கப்பட்ட அலைவுச் செவ்வகத்தை, 3.10 படம் காட்டுகிறது. இப் படத்தில் வருமான வகுப்புகளுக் கிடையேயுள்ள செயற்கையான பிளவுகள் சீர் செய்யப்பட்டு, பல்லாயிரக் கணக்கான நபர்களின் வருமானங்களைக் கணக்கில் எடுத்துக் கொண்டால் எவ்வகையான அமைப்பு கிடைக்குமோ, அதுபோல நுண்மையான அதிகரிப்புகளுக்குப் படிமுறைப் படுத்தப்பட்ட அமைப்பு கிடைக்கிறது. நாம் விரும்பியவாறே, பாகுபாடு செய்வதனால் ஏற்படக்கூடிய பிளவுகளைச் சீர்செய்து விவரங்களின் பரவலின் உண்மையான அடிப்படையில் ஒரு தோராயத்தை நாம் காண்பதற்கு வழி பிறக்கிறது.

தற்போதைய வருமானத்தின் பரவல் பற்றிய குறிப்பு

1918-ல் அமெரிக்காவின் வருமான பரவல்பற்றி முன்பு தரப்பட்ட விவரமான மதிப்பீடுகள் வேறொரு செயலுக்கும் பயன்படுகின்றன. ஒடிந்த பட்டைவிளக்கப் படத்தை, இழைத்த வளைகோடாக்கி, முழுமைத் தொகுதியான வருமானப் பரவலுக்குத் தோராய மதிப்பீடு செய்யும் முயற்சியை இது எடுத்துக் காட்டியது. மெக்காலேயின் புள்ளி விவரங்கள் சீரானபடி முறைப்படுத்தப்பட்ட வருமான மதிப்பீடுகளைத் தருகின்றன என்பது உண்மை. ஆனால், அமெரிக்காவின் வருமானப் பரவலின் தற்போதைய உண்மை நிலையை அது தெரிவிப்பதில்லை. கடந்த 30 ஆண்டுகளில் வருமானங்களின் பகுப்பின், பிரிவு வாரியாகப் பெரும் மாற்றங்கள் ஏற்பட்டுள்ளன. 3-7 பட்டியலில் அமெரிக்காவில் அண்மைக் காலமான 1950-ல் வருமானப் பரவலின் மதிப்பீடுகள் தரப்பட்டுள்ளன.

வளைகோடுகளை இழைப்பதில், முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பண்புகளைக் கண்டறிந்து மதிப்பீடு செய்யும் முறைபற்றி ஆராய்ந்தோம். இது புள்ளியியல் ஆய்வுகளில் சிறப்பான ஒரு பகுதி. குறிப்பாகக் கூறினால், வருமானம் பெறுவோரின் முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்பினர்கள், வருமான அளவுக்கேற்ப எவ்விதத்தில்



3.10. படம்.

அலைவு வளைகோடு: 1918-ல் அமெரிக்க நாட்டில் தனிப்பட்ட வருமானங்கள் பெற்றோரது பரவல். $4,000-க்கும் குறைந்த வருமானம் பெற்றோர் யாவரும் இதில் அடங்குவர். ($100 பிரிவு இடைவெளியுடைய பத்தி விளக்கப் படத்தினின்று பெற்றது.)

பரவலாகவுள்ளனர் என்பதுபற்றி நாம் அறிய விரும்புகிறோம். இச் சிக்கலுக்கு நாம் கண்ட விடை—அதாவது கண்டறிந்த குறிப்புகளின் பரவலை இழைத்தல்—அடிப்படையானது, இயந்திர ரீதியானது; ஆனால், இதே சிக்கலைப் பின்னர் மிகவும் விரிவாக ஆராய்வோம். ஒரு மாறியின் மதிப்புகள் எவ்விதத்தில் பரவலாக அமைந்துள்ளன என்பதற்குத் திட்டவட்டமான ஒரு வரையறை செய்தல்—அதாவது ஆய்வுக்கெடுத்துக் கொண்ட விவரங்களின் பரவலின்விதி (law of distribution) எது எனத் தீர்மானித்தல்—பல்துறை அறிவியல் ஆராய்ச்சிகளின் குறிக்கோளாகும். புள்ளியியல் அளவைகளின் மாதிரிப் பரவல்களைப் பற்றிய நமது அறிவு வளர்ச்சி பெற்றதனால், புள்ளியியல் முறைகள் அறிவியல் ரீதியில் வளர்ந்து உரம் பெற்று விட்டன. இது பற்றிப் பின்னர் விரிவாகக் காண்போம்.

பட்டியல் 3-7

குடும்ப தனிப்பட்ட வருமானத்தின் பரவல்—1950ஆம் ஆண்டு அமெரிக்காவில் குடும்பங்களும், தனிப்பட்ட, குடும்பத்திலில்லா நபர்களும் ஈட்டியது *

(வருமான வரி பிடிப்புக்கு முன் வருமானம்)

வருமானப் பிரிவு	குடும்பங்கள், குடும்பத்தில் இல்லா தனிப்பட்ட நபர்கள் எண்ணிக்கை (ஆயிரக்கணக்கில்)
$ 1,000-க்கும் கீழ்	3,704
$1,000 முதல் 1,999 வரை	7,328
2,000 முதல் 2,999	8,044
3,000 முதல் 3,999	8,463
4,000 முதல் 4,999	6,980
5,000 முதல் 5,999	4,459
6,000 முதல் 6,999	2,909
7,000 முதல் 7,999	2,036
8,000 முதல் 8,999	1,212
9,000 முதல் 9,999	728
10,000-க்கும் மேல்	2,727
மொத்தம்	48,590

* ஆதாரம் : 1953-ல் யு. எஸ். டிபார்ட்மென்ட் ஆ.ஃ.ப் காமெர்ஸ், ஆபீஸ் ஆ.ஃ.ப் பிசினஸ் எகனுமிக்ஸ் (Office of Business Economics, U.S. Department of Commerce) வெளியிட்ட ஸர்வே ஆ.ஃ.ப் கரன்ட் பிசினஸ் (Survey of Current Business) என்பதின் துணை நூலான இன்கம் டிஸ்ட்ரிப்யூஷன் இன் யுனைட்டட் ஸ்டேட் (Income Distribution in United States). இந்த வெளியீட்டின் பிற்சேர்க்கைப் பட்டியல்கள் 2, 24 ஆகியவற்றிலிருந்து கிடைத்த தனித்த ஒப்பீட்டு அளவைகளைக் கொண்டு, 3-7 பட்டியல் உருவாக்கப்பட்டது.

(இந்த மதிப்பீடுகளைத் தயாரித்தபோது 1950ஆம் வருடத்திய முடிவுகள் கிடைக்கவில்லையாதலால் முந்திய ஆண்டு முடிவுகளின் அடிப்படையில்) மத்திய வருமானவரிக் குறிப்புகளைக் கொண்டும், சென்ஸஸ் பீரோவாலும் (Census Bureau) பெடரல் ரிசர்வ் பேங்க் ஸிஸ்டம்—போர்ட் ஆ.ஃ.ப் கவர்னர்ஸ் (Board of Governors of the Federal Reserve Bank System) குடும்ப வருமானம் பற்றி 1950-ல் நடத்திய மாதிரிக்கான ஆய்வுகளைக் கொண்டும், 3-7 பட்டியலின் மதிப்பீடுகள் தயாரிக்கப்பட்டன. தேசிய வருமானக் கணக்கின் ஒரு பகுதியாக, மொத்தக் குடும்ப, தனிப்பட்ட வருமானம் பற்றி ஆபீஸ் ஆ.ஃ.ப் பிசினஸ் எகனுமிக்ஸ் செய்த மதிப்பீடுகள் குறித்தன, இக்குறிப்புகள்.

3-7 பட்டியலில் வருமானம் பெறுவோர் அலகு குடும்பமாகும். இந்நூலில் முன்பு தந்த வருமானப் பட்டியலில், அலகு தனிப்பட்ட நபராகும். வணிகத்துறையினரின் வரையறைப்படி, ஒரே வீட்டில் வதியும் இரண்டு அல்லது அதற்குமேற்பட்ட உறவினர் கொண்டது 'குடும்பம்'. தனியே வாழ்வோரும், உறவினர் அல்லாத பிறரோடு வாழ்வோரும் 'குடும்பத்தில் இல்லாத தனிப்பட்ட நபர் முந்திய பட்டியல்களைப் போலல்லாது, 3-7 பட்டியலில் வருமானங்கள் விச்சு முழுதும் தரப்பட்டுள்ளது.

தொடர் மாறிகளும் தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளும் (Continuous and Discrete Variables)

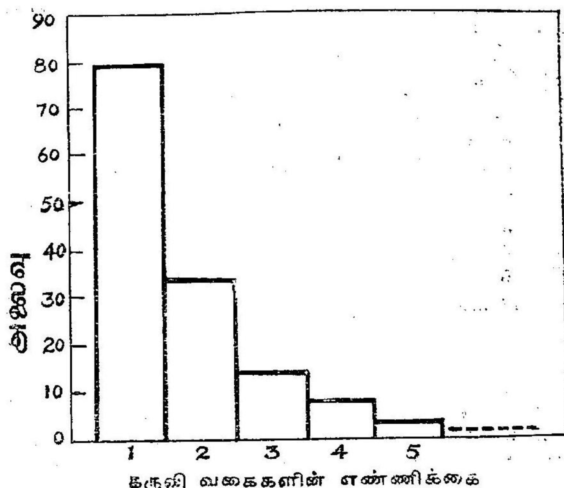
ஆய்வுக் கெடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட விவரங்களின் தன்மையை யொட்டியே, இழைக்கின்ற செயல்முறை பொருத்தமுடையதாகிறது. இந்த அடிப்படையில் முன்னர் எடுத்துக்கொண்ட ஆராய்ந்த அலைவுத் தொடர்களைத் தொடர்ந்த மாறிகள், தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளென இருவகையாகப் பிரிக்கலாம். தொடர்ந்த மாறி என்பது கொடுக்கப்பட்ட வீச்சில் எந்த எண்ணின் மதிப்பையும் பெறக்கூடியது. அவ்விதமாக மாறியின் கண்டறிந்த குறிப்புகளை அலைவுக் கேற்ப வரிசைப்படுத்தும்போது மிகக்குறைந்த அதிகரிப்புகளால் (infinitesimal increments) அடுத்தடுத்த மதிப்புகள் வேறுபடுகின்றன. ஆனால் தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளோ, இடையிடையே விட்டுவிட்டு மதிப்புகளைப் பெறுகின்றன. அவ்வகை மாறிகளின் கண்டறிந்த குறிப்புகளை வகைப்படுத்தும்போது, மதிப்புகள் திட்டமான அளவுகளாலேயே மாற்றம் அடைகின்றன; தொடர்ச்சியுடைய தொடர்களின் (continuous series) அடிப்படை மதிப்புகளின் வளைகோட்டைப் போல இங்கே சீரான அமைப்பு இல்லாது, வளைகோடு தாவித் தாவிச் செல்லக் காணலாம்.

இத்தகைய வேறுபாட்டை நாம் வரையறை செய்யும்போது, இந்த மதிப்புகளைத் தனித்து நோக்காது, அவை எந்த முழுமைத் தொகுதியினின்று உண்மையில் பெறப்பட்டனவோ, அந்த அடித்தளமான முழுமைத் தொகுதியோடு தொடர்புபடுத்தியே வேறுபாடு கற்பிக்கிறோம் என்ற உண்மையை வலியுறுத்திக் கூறுகிறோம். ஒரு தொடர் (series) தொடர்ச்சி உடையதாக இருந்தாலும் சரி, தொடர்ச்சியின்றி இருந்தாலும் சரி, ஒரு கொடுக்கப்பட்ட மாதிரியில் மாறிகளின் மதிப்பில் இடையீடு காணப்படும். அளப்பதற்கு நாம் கருவிகளிலும் முறைகளிலுமுள்ள குறைபாடுகளால், தொடர்ச்சியுடைய தொடரிலும் இடையீடு காணப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, தனிப்பட்டோரது உயரங்களை நாம் அளப்போமானால் ஓர் அங்குலத்துக்குத் திருத்தமாகவோ $\frac{1}{4}$ அங்குலத்துக்குத் திருத்தமாகவோ அளக்கலாம். இப்போது 10 மில்லியன் மனிதர்களை அவர்களது உயரத்திற்கேற்ப அடுக்குவோமானால் அடுத்தடுத்த மனிதர்களிடையேயுள்ள வேறுபாடு, நாம் அமைக்கக்கூடிய மிகக் குறைந்த இடைவெளியைக் காட்டிலும் மிகச் சிறியதாக இருக்கும். இவ்வாறு, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மாதிரியில் அடங்கிய கண்டறிந்த குறிப்புகளிடையே தொடர்ச்சியின்மை காணப்படினும் உயரம் என்பது ஒரு தொடர்ந்த மாறியே.

வட்டி வீதம் அல்லது தள்ளுபடி வீதம் போன்ற மாறியின் பரவல் முற்றிலும் வேறுபட்டதாக இருக்கும். அத்தகைய

100 குறிப்புகளைப் பெற்று அவற்றை அளவுக்கேற்ப வரிசைப் படுத்துவோமானல், மனித உயரம் குறித்த மாதிரியில் கண்டது போலவே, வேறுபாடுகள் தொடரின்றி இருக்கும். ஆனல், உயரங்கள் பற்றிய எடுத்துக்காட்டில், மதிப்புகளை முழுமைத் தொகுதிக்குக் கண்டறியக்கூடுமானல், இடைவிடாத தொடர்மாற்றம் இருப்பதைக் காணலாம். ஆனல், தள்ளுபடிவீதக் குறிப்புகள் எண்ணிக்கையில் வரம்பிலாது கிடைத்தாலுங்கூட, தொடரில் பல இடையீடுகள் இருந்தே தீரும். தள்ளுபடி வீதங்கள் கால் அல்லது அரை சதவீதம் போன்ற அளவுகளில்தான் குறையும் அல்லது அதிகரிக்குமேயன்றி, மிகக் குறைந்த நுண்ணிய (infinitesimal) அளவுகளில் அல்ல. இத்தகைய தொடரையே தனியானது (discrete) அல்லது தொடர்ச்சியற்றது (non-continuous) எனக் கூறுகிறோம்.

3-8 பட்டியலில் (படம் 3.11 பார்க்க) தொடர்ச்சியற்ற நல்லதோர் எடுத்துக்காட்டாகவும், அதே சமயத்தில் J வடிவ பரவலுக்கு எடுத்துக்காட்டாகவும் அமையக்கூடிய ஒரு பரவல் தரப்பட்டுள்ளது. இங்கே இயந்திரக் கருவி உற்பத்தியாளர், அவர்கள் செய்யும் இயந்திரக் கருவிகளின் வகைகளுக்கேற்ப பாகுபாடு செய்யப்பட்டுள்ளனர்.



3.11. படம்.

பத்தி விளக்கப் படம்: தயாரிக்கப்படும் கருவி வகைகளின் எண்ணிக்கைக்கு ஏற்ப 137 இயந்திரக் கருவி தயாரிப்பாளர்களைப் பாகுபாடு செய்த பரவல்.

ஒவ்வொரு தயாரிப்பாளராலும் செய்யப்படுகின்ற கருவி வகைகளின் எண்ணிக்கை, ஒரு முழு எண்ணுகவே இருக்குமாத

லால், இந்தத் தொடர் ஒரு தொடர்ச்சியற்ற தொடராகும். அளவுத் திட்டத்தின் கீழ்க்கோடியில் காணப்படும் இயந்திரக் கருவி தயாரிப்பாளர்களின் குவிப்பு மிகுந்து காணப்படுவது, தனிப்பட்ட தொழில் துறைகளில் காணப்படும் ஈடுபாட்டைச் (specialization) சுட்டிக் காட்டுகிறது. மொத்த எண்ணிக்கையில் பாதிக்கு மேற்பட்டவர்கள் குறிப்பிட்ட ஒரே வகையான இயந்திரக் கருவியைத் தனித்த உற்பத்தியாகச் செய்கின்றனர்.

இழைக்கும் செயல் முறையினால், ஒரு மாதிரியை அளவில் வரம்பிலாது அதிகரித்து கிடைக்கக்கூடிய மதிப்புகளின் பரவலைத் தோராயமாகக் காண முயலுகிறோம். ஆய்வுக்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட மாதிரியில் காணப்படும் ஒழுங்கீனங்கள் தற்செயலாக நேர்ந்தவை என்றும், ஆனால் அடிப்படையில் அமைந்துள்ள மதிப்புகள் இடைவிடாத தொடர்ந்த மாற்றத்தினை உடையவைதாம் என்றும் தற்புனைவு செய்துகொண்டு, அதன் அடிப்படையில் இழைக்கும் முறையைக் கையாள முனைகிறோம். எனவே, இம் முறையினைத் தொடர்ச்சியுள்ள தொடர்களுக்குப் பயன்படுத்துவது மட்டுமே பொருத்தமானது என்பது வெளிப்படை.

பட்டியல் 3-8

தயாரிக்கப்படும் இயந்திரக் கருவி வகைகளின் எண்ணிக்கைக் கேற்ப, நேஷனல் மெஷின் டூல் பில்டர்ஸ் அசோசியேஷன் (National Machine Tool Builders' Association) உறுப்பினர்களைப் பாகுபாடு செய்தல்.*

கருவி வகைகளின் எண்ணிக்கை	தயாரிப்பாளர்களின் எண்ணிக்கை
1	80
2	33
3	13
4	8
5	2
5-க்கும் மேல்	1
	137

* யு. எஸ். பீரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டேடிஸ்டிக்ஸ், ஜூன், 1947-ல் வெளியிட்ட 'Trends in Manhours Expended per Unit, Selected Machine Tools, 1939—1945' எனும் ஏட்டிலிருந்து, பக்கம் 44.

மனித உயரங்கள் குறித்த பட்டை விளக்கப் படத்தை இழைப்பதன்மூலம் அடிப்படையில் பொதிந்துள்ள உண்மையான முழுமைத் தொகுதியின் பிரதிநிதித்துவத்தைக் காணலாம். இந்த இழைக்கும் முறையின் அடிப்படையில் புறவைப்பு (extrapolation) செய்வதும் பொருத்தமுடையது. ஆனால், மிகவும் தொடர்ச்சியற்ற தொடருக்கு இழைப்பு முறையினைப் பயன்படுத்துவது சற்றும் பொருத்தம் இல்லாத செயலாகும். எடுத்துக்காட்டாக 4·3675 சதவீதத்துக்கும், 4·3850 சதவீதத்துக்கும் இடையே உள்ள வீதங்

களின் கருதுகோள் அலைவெண்களைத் தீர்மானிப்பதற்காக, தள்ளுபடி வீதங்களின் பரவலுக்கு ஓர் இழைத்த வளைகோட்டைப் பொருத்த முயல்வது பொருளற்றது. ஆனால், புள்ளி விவரப் பணிகளிலே நடைமுறை வசதிக்காகத் தொடர்ச்சியற்ற தொடர்களையும், தொடர்ச்சி உள்ளதாகக் கருதி இழைக்கும் முறையினை அடிக்கடி பயன்படுத்துவதுண்டு. ஆனால், தொடர்ந்த மாற்றங்களுக்கும், தொடர்ச்சியல்லாத மாற்றங்களுக்குமுள்ள தர்க்க ரீதியான இந்த வேறுபாட்டை நாம் மனத்தில் கொண்டே இழைத்த வளைகோட்டைப் பயன்படுத்த வேண்டும்; விளக்கம் தர முற்பட வேண்டும்.

U-வகையான அலைவுப் பரவல்: அலைவுகள் அதிகமாகி உச்சத்தை அடைவதும் பின்பு சரிவதும் அலைவுப் பரவல்களின் வழக்கமாக இருக்க, இதற்கு முற்றிலும் முரண்பட்ட வகையில், 3-9 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ள விவரங்கள் அமைந்துள்ளன.

பட்டியல் 3-9

1890—1925 காலகட்டத்தில், மொத்தவிலை மார்க்கெட்டில் மாதாந்திர விலை மாற்றங்களின் அலைவுக் கேற்ப 206 பண்டங்களைப் பாகுபாடு செய்த பரவல்.*

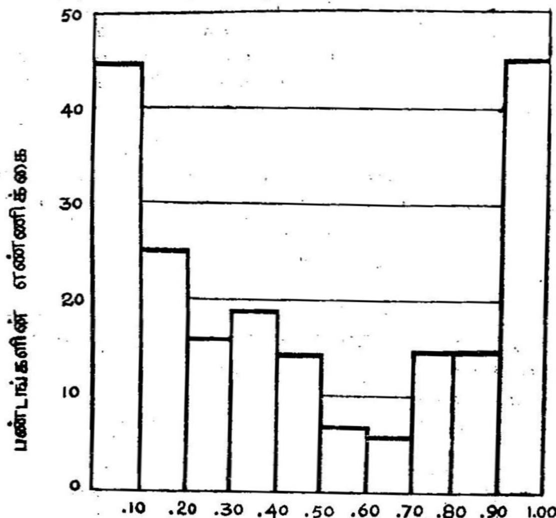
பிரிவு எல்லைகள் மாற்ற அலைவின் அளவு †	பண்டங்களின் எண்ணிக்கை
.00- .10	45
.11- .20	25
.21- .30	16
.31- .40	19
.41- .50	14
.51- .60	7
.61- .70	6
.71- .80	15
.81- .90	15
.91-1.00	44
	206

*1914-21 காலகட்டத்தைத் தவிர்த்து.

† மேற்கண்ட பட்டியலில், முதல் பிரிவின் வீச்சு (உண்மை மதிப்பு ·00-லிருந்து ·105 வரை, மூல அளவுகள் இரண்டாவது தசம ஸ்தானத்துக்குத் திருத்தமாகப் பதிவு செய்யப்பட்டன.) பிற பிரிவுகளின் வீச்சைவிட சற்றுப் பெரியதாகவும், கடைசிப் பிரிவின் வீச்சு (உண்மை மதிப்பு ·905-லிருந்து 1·000 வரை) பிற பிரிவுகளின் வீச்சைவிட சற்று சிறிதாகவும் இருக்கும். இதனால் ஏற்படக்கூடிய பிழை புறக்கணிக்கத்தக்கது.

இந்தப் பரவலில் மொத்த விற்பனை மார்க்கெட்டில் (wholesale markets) விலை மாற்றங்களின் அலைவுக் கேற்ப, பண்டங்கள் பரவலாக அமைக்கப்பட்டுள்ளன. 1890—1925 என்ற காலகட்டத்தி 206 பண்டங்களுக்கு மாத சராசரி விலைகள் தெரிந்தன. இவை ஒவ்வொன்றுக்கும் விலைமாற்ற அலைவுக் குறியீட்டு எண் (index of

frequency of change) தயாரிக்கப்பட்டது. (மாற்றங்கள் மிகுந்த ஆண்டுகளான 1914-21 தவிர்க்கப்பட்டன.) (முந்திய மாத விலையிலிருந்து) விலைகள் மாற்றமடைந்த மாதங்களின் எண்ணிக்கைக்கும், விலைகள் மாற்றமடையாத மாதங்களின் எண்ணிக்கைக்குமுள்ள



3.12. படம்.

(1914—1921 நீங்கலாக) 1890-லிருந்து 1925 வரை விலைமாற்ற அலைவுகளின் அளவைகளின் பரவலுக்குப் பத்தி விளக்கப் படம்.

வீதமே இந்தக் குறியீட்டு எண். அதாவது, அடுத்தடுத்த 120 மாதங்கள் பற்றிய குறிப்புகளை எடுத்துக்கொள்வோம்; இக்காலத்தில் விலை மாற்றமே அடையாத பண்டத்திற்குக் குறியீட்டு எண் 0 (0/119) ஆகும்; ஒவ்வொரு மாதத்திலும் விலை மாற்றமடைந்த பண்டத்திற்குக் குறியீட்டு எண் 1.00 $\left[\frac{119}{119}\right]$[5]. படம் 3.12-ல் தரப்பட்டுள்ள, இப் பரவலினை வரைவடிவத்தில் x அளவுத் திட்டத்தில் இரு கோடிகளின் பண்டங்கள் மிகுதியாகக் குவிந்து இருப்பதையும், அளவுத் திட்டத்தின் இடைநிலைப் பகுதியில் அலைவுகள் சிறுமமாக (minimum) இருப்பதையும் காண்கிறோம். பொருளாதார அறிஞர்கள் இவ்வகையான அரிய பரவலில் சிறப்பான பொருளைக் காண்பர்; ஏனெனில் விலைகளின் இயக்கம் குறித்து இது விளக்கம் தருகிறது. இங்கே பதிவு செய்யப்பட்டுள்ள காலகட்டத்தில் விலைகளின் போக்கு மிகுந்த உறுதியுடனும், மிகுந்த உறுதியின்மையுடனும், இருவகையிலும் அழுத்தமாக அமைந்து காணப்படுகிறது.

[5] இதன் விரிவான விவாதம் காண, மில்ஸ் (Mills) பார்க்கவும். து. நா. ப. 100. பக்கங்கள் 56-60, 379-81.

புள்ளியியல் விவரங்களின் குவிவு

(Cumulative Arrangement of Statistical Data)

முன்னர்க் கூறிய வகையில் தனித்தனி பிரிவுகளாக அலேவுப் பட்டியலே அமைப்பதைவிட, சில சமயங்களில் விவரங்களேக் குவிப்பாக அமைத்தல் ஏற்றதாக விருக்கிறது. இவ்விதமாகக் குவிப்பதனுல் ஏற்படும் நன்மைகளேப் பின்வருகின்ற பட்டியல்கள் வெளியிடும்.

பட்டியல் 3-10

'வாழ்க்கைக் காலத்தை' அடிப்படையாகக்கொண்டு 248,707 தொலேபேசிக் கம்பங்களேப் பாகுபாடு செய்த பரவல்

வாழ்க்கைக் காலம் (ஆண்டுகளில்)	கம்பங்களின் எண்ணிக்கை (அலேவு)
0- 0.9	1,150
1- 1.9	4,221
2- 2.9	10,692
3- 3.9	13,966
4- 4.9	16,633
5- 5.9	18,211
6- 6.9	19,011
7- 7.9	19,260
8- 8.9	20,909
9- 9.9	19,879
10-10.9	20,764
11-11.9	15,454
12-12.9	14,237
13-13.9	13,779
14-14.9	9,764
15-15.9	8,534
16-16.9	7,659
17-17.9	6,918
18-18.9	4,591
19-19.9	1,798
20-20.9	815
21-21.9	313
22-22.9	102
23-23.9	47

கேட்ஸ் என்பவர் செய்த ஓர் ஆராய்ச்சியில், 3-10 பட்டியலில் கண்டவாறு தொலைபேசிக் கம்பங்களின் உறுதிபற்றிய விவரங்கள் கிடைத்தன. இந்தப் பட்டியலின்படி 1,150 கம்பங்கள் ஓராண்டு

3-11 பட்டியல்

வாழ்க்கைக் காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு 248,707 தொலைபேசிக் கம்பங்களைப் பாகுபாடு செய்த குவிவுப் பரவல்

(வாழ்க்கை அளவுத் திட்டத்தில் மேல் நோக்கிக் குவிப்பு)

வாழ்க்கைக் காலம்		'உயிர்வாழும்' கம்பங்களின் எண்ணிக்கை (அலைவு)
1 ஆண்டுக்கும் கீழ்		1,150
2 ஆண்டுகளுக்கும் கீழ்		5,371
3	,,	16,063
4	,,	30,029
5	,,	46,662
6	,,	64,873
7	,,	83,884
8	,,	103,144
9	,,	124,053
10	,,	143,932
11	,,	164,696
12	,,	180,150
13	,,	194,387
14	,,	208,166
15	,,	217,930
16	,,	226,464
17	,,	234,123
18	,,	241,041
19	,,	245,632
20	,,	247,430
21	,,	248,245
22	,,	248,558
23	,,	248,660
24	,,	248,707

உபயோகத்திற்குப் பின்னர் நீக்கப்பட்டன. 4,221 கம்பங்கள் ஓராண்டு முடிந்து, ஆனால் ஈராண்டு ஆவதற்குள் நீக்கப்பட்டன. இப்படி அமைவது சாதாரண வகைப்பட்ட அலைவுப் பட்டியல். இதனை விட 3-11 பட்டியலில் தரப்படுவதுபோல, விவரங்களைக் குவிப்பாக அமைத்தால், மேலும் சில காரியங்களுக்குப் பயன்படுவதாக இருக்கும்.

பட்டியல் 3–12

வாழ்க்கைக் காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு 248,707 தொலைபேசிக் கம்பங்களைப் பாகுபாடு செய்த குவிவுப் பரவல்

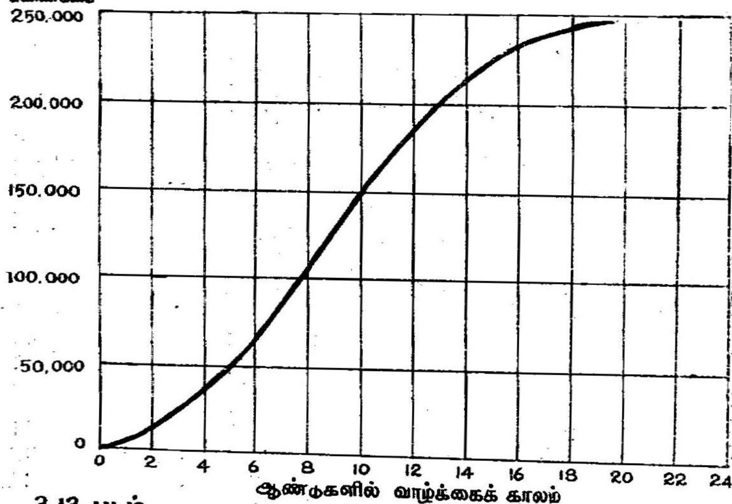
(வாழ்க்கை அளவுத்திட்டத்தில் கீழ்நோக்கிக் குவிப்பு)

வாழ்க்கைக் காலம்	உயிர்வாழும் கம்பங்கள் அலைவு	சதவிதம்
(1)	(2)	(3)
0 அதற்குமேல்	248,707	100.0
1 ஆண்டும் அதற்குமேலும்	247,557	99.5
2 ஆண்டுகளும் அதற்குமேலும்	243,336	97.8
3 ,, ,, ,,	232,644	93.6
4 ,, ,, ,,	218,678	88.0
5 ,, ,, ,,	202,045	81.2
6 ,, ,, ,,	183,834	73.8
7 ,, ,, ,,	164,823	66.3
8 ,, ,, ,,	145,563	58.5
9 ,, ,, ,,	124,654	50.1
10 ,, ,, ,,	104,775	42.1
11 ,, ,, ,,	84,011	33.8
12 ,, ,, ,,	68,557	27.6
13 ,, ,, ,,	54,320	21.8
14 ,, ,, ,,	40,541	16.3
15 ,, ,, ,,	30,777	12.4
16 ,, ,, ,,	22,243	8.9
17 ,, ,, ,,	14,584	5.9
18 ,, ,, ,,	7,666	3.1
19 ,, ,, ,,	3,075	1.2
20 ,, ,, ,,	1,277	0.5
21 ,, ,, ,,	462	0.2
22 ,, ,, ,,	149	0.06
23 ,, ,, ,,	47	0.02
24 ,, ,, ,,	0	0.00

ஓர் அலைவுத் தொடரை இருவகையாகக் குவிக்கமுடியும். 3-11 பட்டியலிலிருந்து குறிப்பிட்ட வயதை எய்தாத உருப்படிகளின் எண்ணிக்கையை உடனே கண்டுகொள்ளலாம். இதற்கு மாறாகக் குறிப்பிடப்பட்ட மதிப்பினைத் தாண்டிய எண்ணிக்கையை

உடனடியாகத் தீர்மானிக்கக் கூடியவாறு பட்டியல் அமையுமானால் மேலும் வசதியாக இருக்கும். இவ்விதமாக 3-12 பட்டியலில், தொலைபேசிக் கம்பங்களைப் பற்றிய குறிப்புகள் கீழ்நோக்கிக் குவிக்கப்பட்டுள்ளன.

மேற்கண்டது போன்ற குவிவுப் பட்டியல்கள் சிலவகையான விவரங்களைக் கையாள்வதற்கு மிகவும் வசதி உடையனவாக இருக்கின்றன. ஆயுள்காலம் பற்றிய பட்டியல்கள் (Life Tables) இவ்வண்ணமாகவே தரப்படுகின்றன. பலவகைத் தளவாடங்களின் தேய்மானத்தை ஆய்வதற்கு, தளவாடங்களின் 'ஆயுள் பட்டியல்களை' விரிவாகத் தயாரிக்கவேண்டும்.



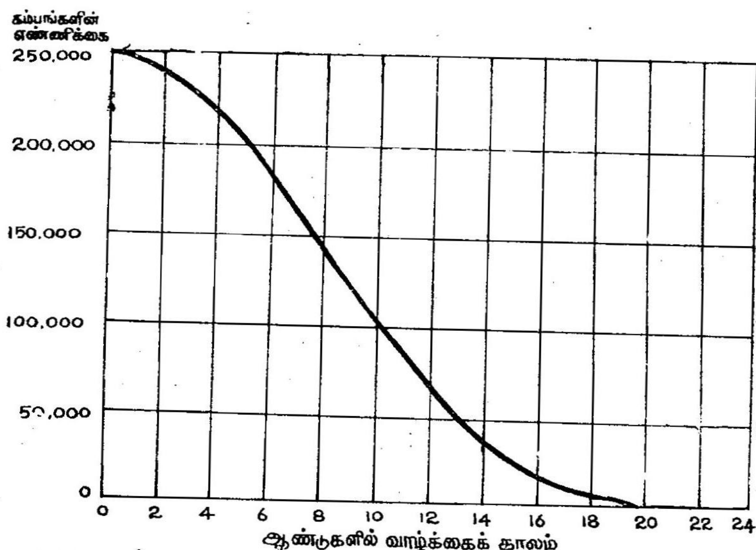
3.13. படம்.

குவிவு அலைவு வளைகோடு: வாழ்க்கைக் காலத்துக்கேற்ப பாகுபாடு செய்யப்பட்ட தொலைபேசிக் கம்பங்கள் (மேல்நோக்கிக் குவிக்கப்பட்டது).

இதற்குக் குவிவு வகைப் பட்டியலே ஏற்றது. 3-12 பட்டியலில் 3ஆம் பத்தியில் காட்டப்பட்டுள்ளதுபோலப் பல சமயங்களில் அலைவுகளை சதவீதங்களாகக் குறிப்பது வசதியாக இருக்கும். குறிப்பாக அலைவுப் பட்டியல்களை ஒப்பிடுவதற்குக் குவிவு சதவீதங்களே வசதியாக இருக்கும்.

ஓகைவ் (Ogive) அல்லது அலைவெண் குவிவு வளைகோடு

விவரங்களைக் குவிப்பதற்காகப் பயன்படுத்தப்பட்ட பாகுபாட்டு முறையினால், குவிவு விவரங்களின் பொதுவான பயன் வரம்பு கட்டப்படுகிறது. 3-11 பட்டியலிலும் 3-12 பட்டியலிலும், அளவுத் திட்டத்தில் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளோடு நாம் அமைந்துவிட வேண்டும். பிற புள்ளிகளைக் குறித்து அறியக் கணிதரீதியாக இடைவைப்பு செய்தாக வேண்டும். இக் காரணத்துக்காக, இழைக்கப்பட்ட அலைவு வளைகோடுபற்றி முன்பகுதியில் கண்டதுபோல, பொதுமையான குவிவு வளைகோட்டை அமைப்பது விரும்பத்தக்கது. 3-11 பட்டியலில் தரப்பட்ட விவரங்களை வரைபடத்தாளில் குறித்து (ஆயுள் காலத்தை மட்டாயமாகவும், அதற்கிசைந்த கம்பங்களின் எண்ணிக்கையைக் குத்தாயமாகவும் குறித்து) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளின் வழியே ஓர் இழைத்த வளைகோட்டை வரைந்தால், 3-13 படத்தில் காட்டி-

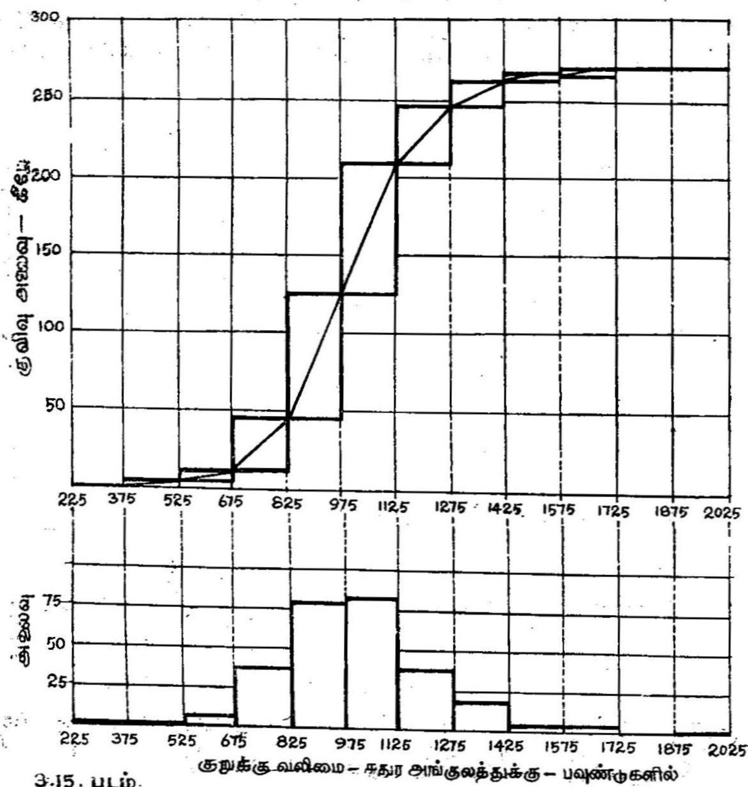


3.14. படம்.

குவிவு அலைவு வளைகோடு : வாழ்க்கைக் காலத்துக்கு ஏற்ப பாகுபாடு செய்யப்பட்ட தொலைபேசிக் கம்பங்கள் (கீழ்நோக்கிக் குவிக்கப்பட்டது).

யுள்ளதுபோல அலைவெண் குவிவு வளைகோடு கிடைக்கும். 3-12 பட்டியலில் கண்ட விவரங்களை 3-14 படத்தில் குறித்துள்ளோம்.

அலைவுத் தொடர்களைச் செம்மையாகவும் பயனுடையதாகவும் வெளியிடுவதற்கு மேற்கண்ட வகையான வளைகோடு நன்கு பயனு கிறது. தனித்த பிரிவு இடைவெளியின் குறைபாடுகள் பெரும் அளவுக்கு நீக்கப்பட்டுவிட்டன என்பது வெளிப்படை. பிரிவு இடை வெளிகளும் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கைகளும் மாற்றம் அடைந்தபோது கூட குவிவு வளைகோட்டின் அமைப்பு அடிப்படையில் ஒன்றாகவே இருக்கும். வழக்கமான வகையைச் சேர்ந்த அலைவு வளைகோடுகளின் தொகுப்புகள் ஒரே மாதிரியாக இருந்தாலொழிய ஒப்பிடுதல் கூடாது. இக் கட்டுப்பாடு அலைவெண் குவிவு வளைகோடுகளுக்கு இல்லை. மேலும் சமனில்லாத பிரிவு இடைவெளிகளினால் அலைவு வளைகோடு சிதைவது போல, ஒகைவ் (ogive) குவிவு வளைகோடு பாதிக்கப்படுவதில்லை.



3.15. படம்

குறுக்கு வலிமைக்கேற்ப பாகுபாடு செய்யப்பட்ட செங்கற்களின் பரவல். ஒகைவுக்கும், அலைவு வளைவுக்குமுள்ள கட்டுக் கோப்பான உறவு காட்டப்பட்டுள்ளது.

குவிவு வளைகோடு இடைவைப்புக்கு மிகவும் ஏற்றது. எடுத்துக் காட்டாக $15\frac{1}{2}$ ஆண்டுகளுக்கும் குறைவாக வாழ்ந்த கம்பங்களின் எண்ணிக்கையை அறியவேண்டுமானால், 3.13 படத்திலிருந்து $15\frac{1}{2}$யை மட்டாயமாக உடைய குத்தாயத்தின் மதிப்பை வளைகோட்டிலிருந்து தோராயமாகக் கணிக்கலாம்; 222,000 என்ற மதிப்பு இதனால் கிடைக் கிறது. அதுபோலவே $8\frac{1}{2}$ ஆண்டுகள் அல்லது அதற்கு மேலாக 'வாழ்ந்த' கம்பங்களின் எண்ணிக்கை தேவையானால், 3.14 படத்தி லிருந்து முன் கூறியதுபோன்று மதிப்பீடு செய்யலாம். இவ்விதமாக இடைவைப்பு செய்யப்பட்ட எண் 135,000.

இத்தகைய வளைகோட்டால் மற்றும் ஒருவகையான இடை வைப்பு செய்யலாம். அதாவது குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் விழுகின்ற குறிப்புகளின் எண்ணிக்கையைத் தீர்மானிக்கலாம். மூலப் பட்டியலில் குறிக்கப்பட்ட பிரிவு இடைவெளிகளுக்கு மட்டும் தான் இவ்விதம் செய்யமுடியும் என்பதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, $10\frac{1}{2}$ ஆண்டுகளுக்கு மேலும் 15 ஆண்டுகளுக்கு மேற்படாமலும் வாழ்ந்த கம்பங்களின் எண்ணிக்கை நமக்குத் தேவை. பட்டியலி லிருந்து அல்லது படத்திலிருந்து 15 ஆண்டுகளுக்கும் குறைவாக வாழ்ந்த கம்பங்கள் 217,930 என அறிகிறோம். முன்பு கூறியதுபோல படத்தில் இடைவைப்பு முறையைக் கையாண்டு $10\frac{1}{2}$ ஆண்டு களுக்கும் குறைவாக வாழ்ந்த கம்பங்களின் எண்ணிக்கை 154,000 என அறிகிறோம். பின் கிடைத்த எண்ணை முன்னதிலிருந்து கழித்து $10\frac{1}{2}$ -லிருந்து 15 ஆண்டுக் காலத்துக்குள் 63,930 கம்பங்கள் வாழ்ந்தன என அறிகிறோம். இழைப்பதனாலும், இடைவைப்பினாலும் பெறும் மதிப்புகளைப் போல, இவ்வெண் உண்மை மதிப்பிற்குத் தோராயமாகவுள்ளது.

கொடுக்கப்பட்ட வரிசையிலிருந்து இடைநிலையாக அலைவுப் பட்டியலை உருவாக்காமலேயே, குவிவு வளைகோட்டை நேரடியாகவே பெறலாம் என்பதைக் கவனிக்கவும். உண்மையில் இவ் வளை கோட்டை வரிசையின் ஒரு வரைவடிவமாகவே கருதலாம். புள்ளி விவரங்களை ஒழுங்குபடுத்துவதில் இது ஓர் எளிய முறையாயினும் அளவின விவரங்களைக் கையாள்வதில் ஆற்றல் மிக்கதாகும்.

ஒகைவுக்கும், அலைவு வளைகோட்டுக்குமுள்ள உறவு: ஒரே விவரங்களையே ஒகைவாகவும், அலைவு வளைகோடாகவும் இரு வேறு விதமாக அமைக்கிறோம். ஒவ்வோர் அமைப்புக்கும் தனித்தனி சிறப்புகள் உண்டு. இந்த இரு வளைகோடுகளுக்கும் உள்ள உறவின் அமைப்பைத் தெரிந்துகொண்டால்

பட்டியல் 3-13

குறுக்கு வலிமைக்கேற்ப பாகுபாடு செய்யப்பட்ட செங்கற்களின் அலைவுப் பரவல்*

குறுக்கு வலிமை (சதுர அங்குலத்துக்கு பவுண்டுகளில்)	கொடுக்கப்பட்ட எல்லைகளுக்குள் வலிமை உடைய செங்கற்களின் எண்ணிக்கை
225- 374.9	1
375- 524.9	1
525- 674.9	6
675- 824.9	38
825- 974.9	80
975-1124.9	83
1125-1274.9	39
1275-1424.9	17
1425-1574.9	2
1575-1724.9	2
1725-1874.9	0
1875-2024.9	1
மொத்தம்	270

* 1933-ல் பிலடெல்பியா நகரத்து அமெரிக்கன் சொசைடி ஃபார் டெஸ்டிங் மெடீரியல்ஸ் (American Society for Testing Materials) வெளியிட்ட 'A.S.T.M. Manual on Presentation of Data' எனும் வெளியீட்டிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விவரங்கள்.

தன்மைகள் நன்கு விளங்கும். 3.15 படத்தில் இந்த உறவு வரை வடிவமாகக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

3-13 பட்டியலில் கண்ட விவரங்கள் செங்கற்களின் குறுக்கு வலிமைபற்றிய சில சோதனைகளின் முடிவுகள் குறித்தன. இதன் அடிப்படையில் இப் படம் (3.15) அமைந்துள்ளது. 3.15 படத்தின் மேற்பகுதி ஓகைவ் உருவாக்கப்படும் முறையினைக் காட்டுகிறது. அலைவெண் செவ்வகப்படத்தைப் போலவே, இங்கும் ஒவ்வொரு நீண்ட சதுரத்தின் பரப்பும் அந்தப் பிரிவில் அடங்கும் குறிப்புகளின் எண்ணிக்கைக்கு நேர் வீதத்தில் இருக்கிறது. இங்கே நாம் குவிப்பு முறையைக் கையாள்வதால், ஒவ்வொரு நீண்ட சதுரத்தின் அடிப் படையும் அதற்கு முந்திய பிரிவுகளின் குவித்த அலைவு எண்களாகும். எனவே, முதல் நீண்ட சதுரத்தின் y மதிப்பு (அலைவு) 1. இங்கே 0

பட்டியல் 3-14

1948-ல், அமெரிக்காவில், மத்திய வருமானவரி பிடிப்புக்கு முன்னும் பின்னும், செலவு அலகுகளை, மொத்தப் பண வருமானத்தின் சதவீதங்களாக மதிப்பிடம் செய்து பெற்ற குவிவுப் பரவல் *

வருமான அளவுக் கேற்ப மதிப்பிடம் தரப்பட்ட செலவு அலகுகள் †	மொத்தப் பண வருமானத்தின் குவிவுச் சதவீதங்களாக: வரி பிடிப்புக்கு முன்	மொத்தப் பண வருமானத்தின் குவிவுச் சதவீதங்களாக: வரி பிடிப்புக்குப் பின்
(1)	(2)	(3)
பத்தில் ஒருபங்கு —கீழ்	1	1
பத்தில் ,, —இரண்டாவது	4	5
பத்தில் ,, —மூன்ருவது	9	10
பத்தில் ,, —நான்காவது	15	17
பத்தில் ,, —ஐந்தாவது	22	25
பத்தில் ,, —ஆருவது	31	34
பத்தில் ,, —ஏழாவது	41	44
பத்தில் ,, —எட்டாவது	53	56
பத்தில் ,, —ஒன்பதாவது	68	71
பத்தில் ,, —மேல்	100	100

* ஃபெடரல் ரிசர்வ் சிஸ்டெம், போர்ட் ஆஃப் கவர்னர்ஸ் சார்பில் மிச்சிகன் பல்கலைக் கழகத்து சர்வே ரிசர்ச் சென்டர் (Survey Research Centre) நடத்திய 1949-நுகர்வோர் நிதியங்கள் குறித்த விவரங்களின் அடிப்படையில் அமைந்தது; இவ் விவரங்கள் மதிப்பீடுகளே. 3000-லிருந்து 3500 வரையான செலவு அலகுகளின் மாதிரியை ஆய்ந்து கிடைத்தவை இவை. இவற்றைச் சேகரிக்கப் பயன்படுத்திய முறைகள்பற்றி 1949 ஜூன் மாதத்தில் (Federal Reserve Bulletin) காண்க.

† ஒன்ருக வாழ்ந்து, பெரும் செலவுகளைத் தங்கள் வருமானத்தினைச் சேர்த்து ஈடுகட்டும் உறவினர்களின் ஒரு தொகுப்புச் செலவு அலகு ஆகும்.

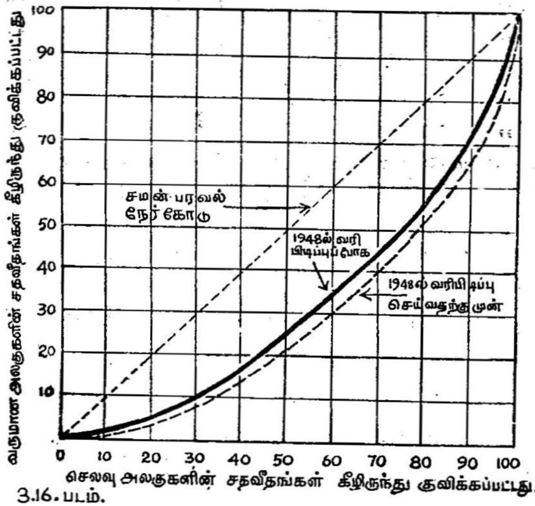
அடிப்படை. இரண்டாவது பிரிவின் y மதிப்பு 1; இதன் அடிப்படை 1. மூன்ருவது பிரிவின் y மதிப்பு 6; இதன் அடிப்படை 2. பிறவும் இதைப் போலவே, அலைவுகள் குறைவாக இருக்கும்போது இந்த நீண்டசதுரங்களை இணைக்கும் வளைகோட்டின் சரிவு சீராகவும், பின்பு அலைவுகள் பெரிதாகையால் கூர்மையாகவும், இறுதியாகப் பரவலின் மேல் எல்லையில் அலைவுகள் குறைவுபடும்போது கூம்பியும் காணப்படுகிறது.

பிரிவு அலைவுகளைக் குறிப்பிடும் இந் நீண்டசதுரங்களை யெல்லாம் x மதிப்புகளை மாற்ருமலும், சுன்னக் கோட்டைப் பொது அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைத்தால் இருக்கும் முந்திய பகுதியில் விவரிக்கப்பட்ட அலைவெண் செவ்வகப் படம் அல்லது விளக்கப் படம் கிடைக்கும். இதிலிருந்து அலைவுப் பலகோணத்தையோ, இழைக்கப்பட்ட அலைவு வளைகோட்டையோ பெற முடியும்.

லோரன்ஸ் வளைகோடு (Lorenz Curve)

வருமானப் பரவல்களைப்பற்றி ஆராய்வதற்கு மற்றும் ஒருவகையான குவிவு அலைவு அமைப்பு சிறப்பாகப் பயன்படுகிறது. பிரஸிடென்ட்ஸ் கவுன்ஸில் ஆஃப் எக்கனுமிக் அட்வைசர்ஸ் (President's Council of Economic Advisors) 1949-ல் வெளியிட்ட இடை ஆண்டு அறிக்கையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விவரங்கள், 3-14 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. இதனை எடுத்துக்காட்டாகக் கொண்டு செயல்முறையை விளக்குவோம்.

பட்டியல் 3-14-ல் (பத்தி 1) பாகுபாடு செய்யப்பட்ட அடிப்படையும், அலைவுகளும் (பத்தி 2, 3), சார்புடைய உறுப்புகளாதலால், இந்த அமைப்புக்கு 3.16 படத்தில் காட்டியதுபோல வரை வடிவம் தரலாம். முற்றிலும் சமமாக அமைந்த வருமானப் பரவலைக் குவிப்பு முறையில், 45 டிகிரிகளில் சரிந்த கோணத்தையுடைய ஒரு நேர்கோட்டால் குறிக்கலாம்: இதன்படி செலவிடும் அலகுகளில்



3.16. படம்.

அமெரிக்காவில், மத்திய வருமானவரி பிடிப்புக்கு முன்னும் பின்னும் 1948ஆம் ஆண்டில் வருமானப் பரவல்களைக் காட்டும் லோரன்ஸ் வளைகோடுகள்.*

* ஃபெடரல் ரிசர்வ் ஸிஸ்டம், போர்ட் ஆஃப் கவர்னர்ஸ் சார்பில் ஸர்வே ரிசர்ச் சென்டர் (Survey Research Center) செய்த மதிப்பீடுகள்.

10-ல் ஒரு பகுதியினர் வருமானத்தில் 10-ல் ஒரு பங்கையும், செலவிடும் அலகுகளில் 10-ல் 3 பங்கினர் வருமானத்தில் 10-ல்

3 பங்கையும், மற்றும் இதைப் போலவே பெறுவர். இச் சமநிலையிலிருந்து விலக்கம் அதிகமாக அதிகமாக (உயர் வருமானப் பகுதிகளில் வருமானம் குவியக் குவிய), சார்ந்த அலைவெண் குவிவு வளைகோடு சமன்பரவல் நேர்கோட்டிலிருந்து விலகிச்செல்லும். லோரன்ஸ் வளை கோடு என அழைக்கப்படும். இத்தகைய வரைபடங்களைப் பயன்படுத்தி குவிப்பின் அளவையைப் பல சமயங்களில், பல்வேறுபட்ட சூழ்நிலைகளில் செம்மையாக ஒப்பிடலாம். இங்கே ஒப்பிடப்படும் இரு பரவல்களில் ஒன்று பெடரல் வருமான வரிகள் பிடிப்புக்கு முன்னுள்ள வருமானங்களின் பரவல் பற்றியது. மற்றது வரி கொடுத்த பின்னர் வருமானங்களின் பரவல் குறித்தது. முன்னதைவிடப் பின்னதில் சமன் பரவலுக்கு நெருக்கத்தைக் காணலாம். இப்படி நேரக் காரணம் வருமானத்திற்கு ஏற்ப வரிவிதிப்பு இருப்பதனால்தான் என்பது வெளிப்படை.

துணை நூல்கள்

1. Croxton, F. E. and Cowden, D. J., Applied General Statistics, Chap. 8.
2. Dixon, W. J. and Massey, F. J Jr., Introduction to Statistical Analysis, Chap. 2.
3. Goulden, C. H., Methods of Statistical Analysis, 2nd ed., Chap. 2.
4. Kendall, M. G., The Advanced Theory of Statistics, 3rd ed., Vol. I, Chap. 1.
5. Riggleman, J. R. and Frisbee, I. N., Business Statistics, 3rd ed., Chap. 7.
6. Rosander, A. C., Elementary Principles of Statistics, Chap. 3.
7. Simpson, G. and Kafka, F., Basic Statistics, Chaps. 8, 9.
8. Spurr, W. A., Kellogg, L. S. and Smith, J. H., Business and Economic Statistics, Chap. 9.
9. Waugh, A. E., Elements of Statistical Method, 3rd ed., Chap. 3.
10. Wilks, S. S., Elementary Statistical Analysis, Chap. 2.
11. Yule, G. U., and Kendall, M. G., An Introduction to the Theory of Statistics, 14th ed., Chap. 4.

இந்த அத்தியாயத்தின் முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணை நூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரும், பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டும் நூலின் இரண்டாம் பாக இறுதியில் உள்ள துணைநூல் பட்டியலில் காணலாம்.

4. அலைவுப் பரவலின் சில பண்புகள்: சராசரிகள்

அளவின விவரங்களைப் பாகுபாடு செய்வதும், அலைவுப் பரவலை அமைப்பதும், புள்ளி விவரங்களை ஒழுங்குபடுத்தி ஆராயும் பணிக்கு முதல் படியாகும். பாகுபாடு செய்வதனால் விவரங்களுக்கு அடியில் கரந்துள்ள கட்டுக்கோப்பு புலனாவதோடு, தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கிடையேயுள்ள அடிப்படை ஒருமைப்பாடு வெளிக்கொணரப் படுகிறது. வருணனை செய்தல், உய்த்துணர்வுகள் செய்தல் ஆகிய செயல்முறைகளுக்கு இது ஒரு துவக்கமேயாகும். இதற்கும் அடுத்த படியாக, விவரங்கள் தொகுப்பின் சிறப்புப் பண்புகளை அமைப்பதற்கும், மேலும் சுருக்கமாக வெளியிடுவதற்கும், முறைகளைக் காண வேண்டியுள்ளது. சில செயல்களுக்காக, அலைவுப் பரவலையே மேலும் தொகுப்பாகவும் பொழிப்பாகவும் ஆக்கி, மூன்று அல்லது நான்கு சிறப்பு அளவைகளினால், அதன் சாரத்தினையே தொகுத்து அறியும் அளவுக்குச் சுருக்கவேண்டி யிருக்கிறது.

ஒவ்வோர் அலைவுப் பரவலும் ஒரு புதுமையான தனிப்பட்ட வகையினதாக இருந்து, ஒவ்வொன்றும் தனித்தனி விதிக்குக் கட்டுப் படுவதாக இருந்தால், இப்பரவல்களை யெல்லாம் ஆராய்வதும் விவரிப்பதும் மிகக் கடினமாக இருக்கும். ஆனால், நல்லவேளையாக அவை அவ்விதம் இல்லை. பல வேறுபட்ட துறைகளில் கண்டறிந்த விவரங்களை அலைவுப் பரவல்களாகத் தொகுக்கும்போதுகூட அவற்றுக்கிடையே சில பொதுப் பண்புகள் காணப்படுகின்றன. அவை சில பொது விதிகளுக்கும் கட்டுப்படுகின்றன. எனவே, ஒரு துறையில் பெற்ற அனுபவமும் அறிவும் பிற துறைகளில் பணியாற்றும் போதும் வழிகாட்டுகின்றன. விவரங்களின் தொகுப்புகளின் போக்கில் காணப்படுகின்ற ஒருமைப்பாட்டினால்தான் அறிவியல் ஆராய்ச்சிகளில் பல துறைகளிலே எடுக்கப்பட்ட அளவைகளை எல்லாம், ஒரு பொதுமையான முறையினால் ஒழுங்குபடுத்தவும், ஆராயவும், ஒப்பு நோக்கவும் வழி பிறக்கிறது.

பல துறைகளிலிருந்து அலைவுப் பரவல்களுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள்

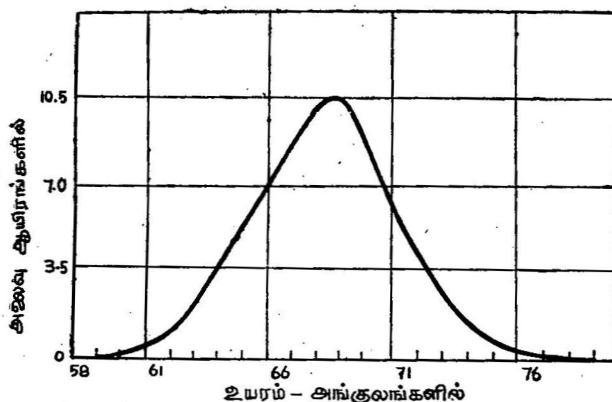
அளவின விவரங்களின் முழுமைத் தொகுதிகளில், ஒரு பொது விதிக்கேற்ப விவரங்கள் அமைந்துள்ளன என்ற உண்மையை, பல்வகை விவரங்களால் உருவான அலைவுப் பரவல்களால் நன்கு உணரலாம். கீழே தரப்படும் அலைவுப் பரவல்களின் தன்மைகளையும் நன்கு கவனித்து, பரவல்களை ஒப்பு நோக்குவோம்.

பட்டியல் 4-1

1943-ல், உயரத்தின் அடிப்படையில் போர்வீரர்களைப் பாகுபாடுசெய்த பரவல்*

உயரம்-அங்குலங்களில்	போர்வீரர்கள் எண்ணிக்கை
60	136
61	340
62	748
63	1,632
64	3,264
65	5,576
66	8,227
67	9,791
68	10,675
69	9,519
70	7,343
71	5,100
72	3,060
73	1,428
74	680
75	272
76	136
77	68
மொத்தம்	67,995

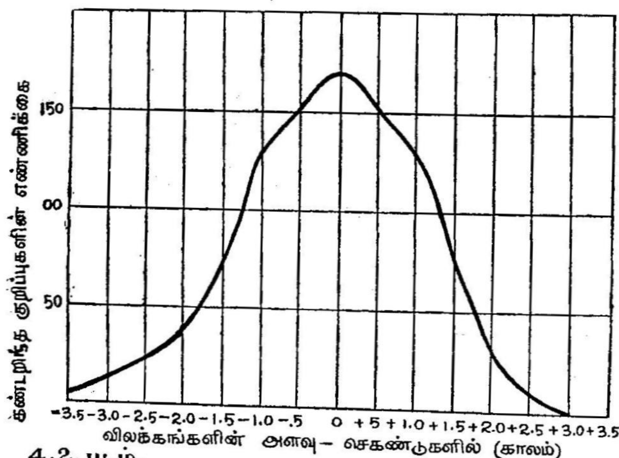
* ஆதாரம்: Report No. 1—BM, Army Service Forces, Office of Surgeon General, Medical Statistics Division, 'Height and Weight Data for Men Inducted into the Army and for Rejected Men' அங்குலத்தின் பின்னங்களைக் கணக்கிலெடுத்துக்கொள்ளவில்லை; அங்குலத்துக்குத் திருத்தமாக முழு எண்களில் ராணுவத்தில் சேர்ந்தோர் உயரங்கள் பதிவு செய்யப்பட்டு அதனதன் அடிப்படையில் பாகுபாடு செய்யப்பட்டது.



4.1. படம்.

அலைவு வளைகோடு: உயரத்தின் அடிப்படையில் 67,995 போர்வீரர்களைப் பாகுபாடு செய்த பரவல்.

4.1 படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள வளைகோடு 4-1 பட்டியலில் வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்தின் அடிப்படையில் அமைந்தது; இந்த விவரமானது, 1943ஆம் ஆண்டில் அமெரிக்கப்படையினரால் 67,995 நபர்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரியில் அளக்கப்பட்ட உயரங்களைப்பற்றி அமைந்தது.



4.2. படம்.

அலைவு வளைகோடு: வானியல் அளவைகளில் கண்டறிந்த குறிப்புகளின் பிழைகளின் பரவல்.

4.2 படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள வளைகோடானது கிரீன்விச்சில், துருவமீனின் (Polaris) செங்குத்து ஏற்றம் (right ascension) பற்றிய 1,000 கண்டறிந்த குறிப்புகளின் அடிப்படையில் அமைந்தது.[1] மட்டாயமாகக் காணப்படும் மதிப்புகள், இக் கண்டறிந்த குறிப்புகளின் சராசரியின் அருகே எடுக்கப்பட்ட மூலத்திலிருந்து (origin) விலக்கங்களைச் செகண்டுகளில் குறிக்கிறது. x அளவுத்திட்டத்தின் வழியே கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளின் அலைவெண்கள், y அளவுத்திட்டத்தின் வழியே குத்தாயமாக அளக்கப்படுகின்றன. 4.2 படத்தில் குறிக்கப்பட்ட விவரங்கள் 4·2 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 4-2

வானியல் அளவைகளில், கண்டறிந்த குறிப்புகளின் பிழைகளின் பரவல்

(துருவ விண்மீனின் செங்குத்து ஏற்றத்தைக் குறித்த 1,000 கண்டறிந்த குறிப்புகள்)

மூலத்திலிருந்து விலக்கத்தின் அளவு —செகண்டுகளின் (காலம்)	கண்டறிந்த குறிப்புகளின் எண்ணிக்கை
—3.5	2
—3.0	12
—2.5	25
—2.0	43
—1.5	74
—1.0	126
—0.5	150
0	168
0.5	148
1.0	129
1.5	78
2.0	33
2.5	10
3.0	2
	1,000

கொடுக்கப்பட்ட ஓர் இலக்கினை நோக்கி ஒரு பீரங்கியிலிருந்து 100 குண்டுகளை எய்தால், அந்த 100 குண்டுகளும் இலக்கினைச்

1. விட்டேக்கர், ராபின்சன் (Whittaker and Robinson, மு. நா. ப. 190.

சுற்றிலும் பரவியிருத்தலைக் காண்போம். எத்தனை குண்டுகளை வீசினும் குண்டுகளின் ஒரு சிறிய சதவீதமே எய்யப்பட்ட இலக்கின் மீது முற்றிலும் வீழ்ந்திருக்கும். சுடப்பட்ட புள்ளிகள் இலக்கினைச்

2	7	16	25	25	16	7	2

4.3. படம்.

சிதறல் மண்டலம் - பீரங்கியிலிருந்து சுடப்பட்ட குண்டுகளின் கருதுகோள் சதவீதப் பரவல்களைக் காட்டுகிறது.

சுற்றிலும் ஓர் ஒழுங்கான அமைப்பில் சிதறி இருப்பதைக் காணலாம். சுடப்பட்ட புள்ளிகள் யாவற்றையும் உள்ளடக்குமாறு ஒரு நீண்ட சதுரம் (சிதறல் மண்டலம்) எட்டு சமபாகங்களாகப் பிரித்தால் ஒவ்வொன்றிலும் பரவியுள்ள குண்டுகளின் அமைப்பு, 4.3 படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளதுபோல் இருக்கும்.

பட்டியல் 4-3

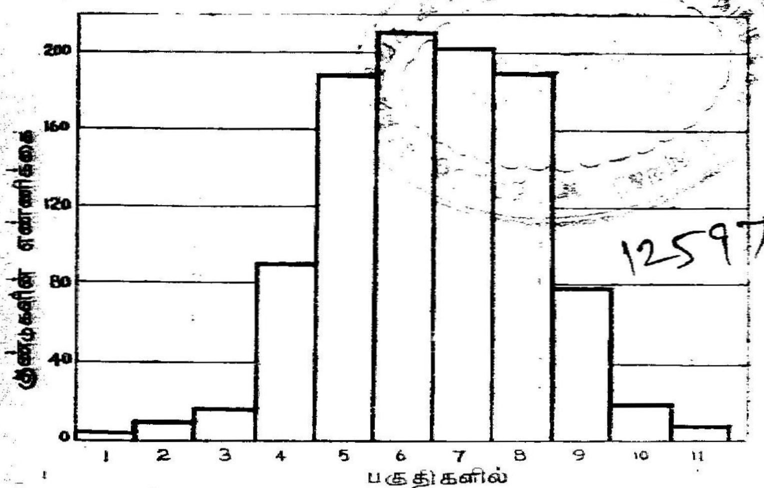
ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து சுடப்பட்ட 1,000 குண்டுகளின் பரவல்.

பகுதி	பதிவு செய்யப்பட்ட குண்டுகளின் எண்ணிக்கை
1 (தலைப்பகுதி)	1
2	4
3	10
4	89
5	190
6	212
7	204
8	193
9	79
10	16
11 (அடிப்பகுதி)	2
	1,000



இதே பொதுவிதி எல்லாவகையான துப்பாக்கிகளுக்கும் பொருந்தும். துப்பாக்கிகள் திருத்தமானதாக அமைய அமைய சிதறல் மண்டலம் குறையுமென்றாலும், இப் பரப்புக்குள் அமைந்துள்ள பரவல், கருதுகோள்படி (theoretically) எப்போதும் ஒன்றாகவே இருக்கும். பீரங்கிகளைச் சரி செய்து சுடுவதற்கான விதிமுறைகள் இந்த உண்மையினை அடிப்படையாகக் கொண்டு உருவாக்கப் பட்டுள்ளன.

உண்மையாகச் சுடும்போது கிடைக்கின்ற முடிவுகள் இக் கருதுகோள் பரவலுக்கு வேறுபட்டதாக இருக்கலாம். 4-3 பட்டியலில், நிலையாகவுள்ள ஓர் இலக்கின் மையத்தை நோக்கி 200கெஜ தொலைவிலிருந்து ஒரு தொடர் துப்பாக்கியின்மூலம் (battery gun) 1,000 குண்டுகளை எய்த விவரங்களைக் காணலாம்.[2] இந்த இலக்கு படுக்கைக் கோடுகளால் 11 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. இம் முடிவுகள் 4.4 படத்தில் வரைவடிவமாகக் காட்டப்பட்டுள்ளன.



4.4. படம்.

பத்தி விளக்கப் படம்: ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து சுடப்பட்ட 1,000 குண்டுகளின் பரவல்.

கருதுகோள் பரவலில் சிதறல் மண்டலத்தை எட்டு பங்குகளாகப் பிரித்தோம்; இங்கோ சிதறல் மண்டலம் பதினொரு பிரிவுகளாக பிரிக்கப்படுகிறது. எனவே, இவற்றை நேரிடையாக ஒப்பிடுதல்

2. பார்க்கவும், மெர்ரிமேன் (Merriman). Ref. 98.

இயலாது. எனினும், இங்கே கிடைத்த பரவலும், பிற எடுத்துக் காட்டுகளில் கண்ட அதே பொதுவகையான பரவல் அமைப்பே. இலக்கின் கீழ்ப் பாதியில் குவிப்பு மிகத் தோன்றுவதால், சமச் சீரி லிருந்து சிறிதளவு விலக்கம் காணப்படுகிறது.

நாணயங்களைச் சுண்டினால் கிடைக்கும் தலை, பூ ஆகியவற்றின் பரவல் முற்றிலும் வாய்ப்பால் உருவாவதாகப் புனைந்துகொள்ளு வோம். தனிச் சோதனை ஒன்றுக்காக 10 நாணயங்கள் 100 தடவை சுண்டப்பட்ட பட்டியலில், குறிப்பிடப்பட்ட அளவு தலைகள் கிடைத்த அலைவெண்கள் தரப்பட்டுள்ளன. (கொடுக்கப்பட்ட சூழ்நிலைகளில் கிடைக்கக் கூடிய தலைகளின் உச்ச எண்ணிக்கை பத்தே; ஒரு தலை கூட விழாமலும் இருக்கக்கூடும்.) 4.5 படத்தில் மேற்கூறிய அலைவுப் பட்டியலின் வரை வடிவம் உள்ளது.

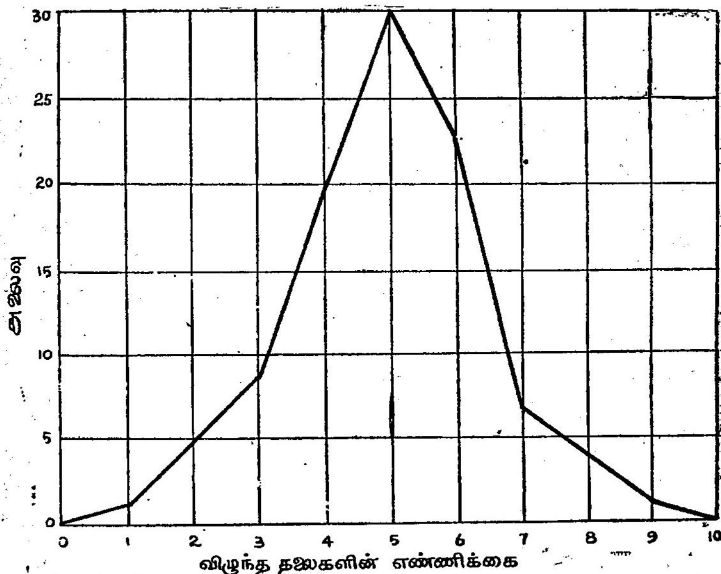
பட்டியல் 4 – 4

நாணயங்களைச் சுண்டிய சோதனை முடிவுகளின் பரவல்
(பத்து நாணயங்கள் 100 தடவை சுண்டியது).

தலைகளின் எண்ணிக்கை	தோற்றத்தின் அலைவு
10	0
9	1
8	4
7	7
6	23
5	30
4	20
3	9
2	5
1	1
0	0
	100

முற்றிலும் வேறுபட்ட இந் நான்கு துறைகளில் கிடைத்த அளவின விவரங்களின் அமைப்பில், ஏதோவோர் ஒரே தன்மைத் தான விதி ஊடுருவி நிற்கக் காண்கிறோம். பொருளாதார விவரங் களும் அதே பொதுப் பண்புகளை வெளியிடுகின்றனவா ? மூன்றாவது அத்தியாயத்திலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளை மீண்டும் எடுத்துக் கொண்டு முந்திய எடுத்துக்காட்டுகள் நான்கையும் ஒப்புநோக்கலாம்.

இங்கே நாம் (மூன்ருவது அத்தியாயத்திலிருந்து) குறிப்பிடும் அலைவுப் பரவல்களாவன: பணியாட்களின் வார ஊதியங்கள், தொலைபேசிக் கம்பங்களின் ஆயுட்காலம், அமெரிக்காவில் அளவுவாரி யான வருமானப் பரவல் ஆகியவை. (1918ஆம் ஆண்டுப் பரவலின் வளைகோட்டில் $4,000-க்கும் மேற்பட்ட வருமானங்களும் சேர்க்கப் பட்டிருந்தால், வலப்புறக் கோடிவரை நீண்ட வால்பகுதி உருவாகி யிருக்கும் என்பதைக் கவனிக்கவேண்டும்.) பொருளாதாரப் புள்ளி விவரங்களிலிருந்து இவைபோல மேலும் பல எடுத்துக்காட்டுகள் தரமுடியும்.



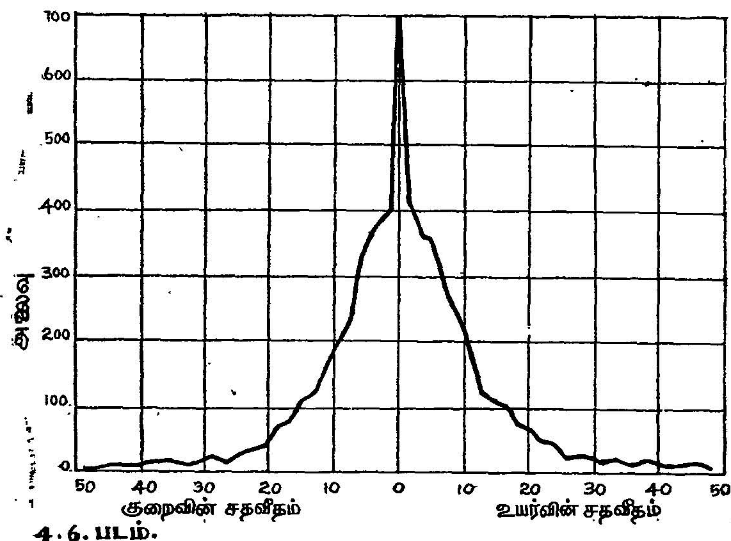
4.5. படம்.

அலைவுப் பலகோணம்:
நாணயம் சுண்டும் சோதனையில் வீழ்ந்த தலைகளின் பரவல்.

4.6 படம், விலை வேறுபாடுகள் பரவலாக உள்ள அமைப்பினைக் காட்டுகிறது. ஓராண்டிலிருந்து அடுத்த ஆண்டுக்குள் பண்டங்களின் மொத்த விலை (wholesale price) மாற்றங் குறித்து, 5,578 தனிக் குறிப்புகளைக் கொண்டு, டபிள்யூ. ஸி. மிட்செல் (W. C. Mitchell) செய்த ஆராய்ச்சி யொன்றினை அடிப்படையாகக் கொண்டது இது.[3]

3. மிட்செலில் (Mitchell) பக்கம் 106ஐப் பார்க்க. 51 சதவீத அதிகரிப்புக் கும், 51 சதவீதக் குறைவுக்கு முட்பட்ட வீச்சுக்குள் அடங்கிய விலை மாற்றங்களையே படம் குறிக்கிறது. 55 சதவீத விலை குறைவுக் குறிப்பொன்றும் 52 சதவீதத்தி லிருந்து 104 சதவீதத்துக்குட்பட்ட வீச்சில் அடங்கிய 37 விலைக் குறிப்புகளும் படத்தில் சேர்க்கப்படவில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக, கொடுக்கப்பட்ட ஆண்டில் நியூயார்க்கில், மேட்டு நில நடுத்தர வகைப் பருத்தியின் (middling upland cotton) சராசரி விலை பவுண்டுக்கு $0·115. அடுத்த ஆண்டில் சராசரி விலை பவுண்டுக்கு $0·128. எனவே, அதிகரிப்பு 11·3 சதவீதம் ஆகும். உயரும் விலைகளின் பட்டியலில் 10-11.9% வகுப்பில், இது ஒரு குறிப்பாக இடம் பெறும். இதேபோன்று 5,578 குறிப்புகளைப் பட்டியல் கொண்டுள்ளது. 4.6 படத்தில் இவ்விவரங்கள் அலைவுப் பலகோண அமைப்பில் — வளைகோட்டை இழைக்க முயற்சி செய்யாது — தரப்பட்டுள்ளன.



4·6. படம்.

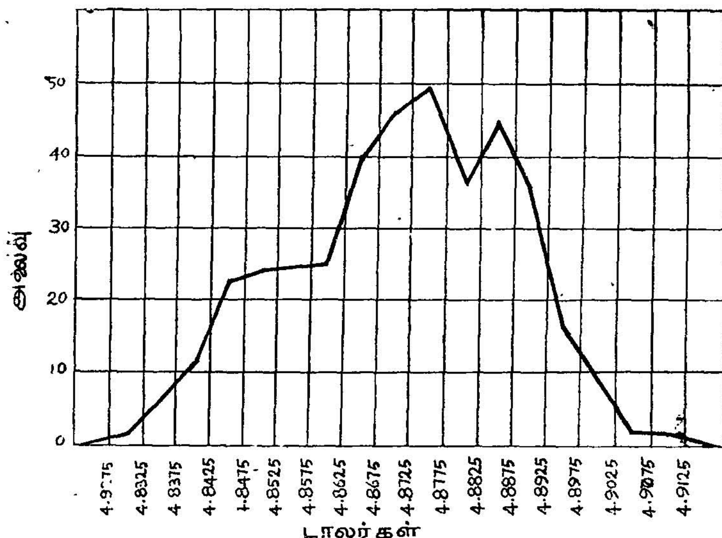
அலைவுப் பலகோணம்: ஓராண்டிலிருந்து மறு ஆண்டுக்குள் பண்டங்களின் மொத்த விலைகளின் மாற்றத்தைக் குறித்த 5,540 குறிப்புகளின் பரவல் (ஆதாரம்: மிட்செல்).

1882-லிருந்து 1913 அடங்கலாகவுள்ள காலகட்டத்தில் நாணயமாற்று வீதங்கள் (ஸ்டெர்லிங் மாற்று வீதம்) பற்றிய பரவல் 4.5 படத்தில் தரப்பட்டுள்ளது. இக்கால இடைவெளியில், ‘பொன் இயங்கு எல்லை’களுக்கு (gold points) இடையேயும் நாணயமாற்று வீதங்களை நிலவச் செய்வதற்காக வழக்கமான மார்க்கெட் சக்திகள் இயங்கின. இரு நாணயங்களையும் மாறுத விகிதங்

பட்டியல் 4-5

1882 - 1913 கால கட்டத்தில் மாதந்தோறும் பதிவு செய்யப்பட்ட லண்டன் - நியூயார்க் நாணயமாற்று வீதங்களின் பரவல்.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவு (கொடுக்கப்பட்ட வீதம் நிலவிய மாதங்கள்)
$4.8275-$4.8324	1
4.8325- 4.8374	6
4.8375- 4.8424	11
4.8425- 4.8474	21
4.8475- 4.8524	23
4.8525- 4.8574	24
4.8575- 4.8624	25
4.8625- 4.8674	40
4.8675- 4.8724	45
4.8725- 4.8774	49
4.8775- 4.8824	35
4.8825- 4.8874	45
4.8875- 4.8924	33
4.8925- 4.8974	16
4.8975- 4.9024	8
4.9025- 4.9074	1
4.9075- 4.9124	1
	384

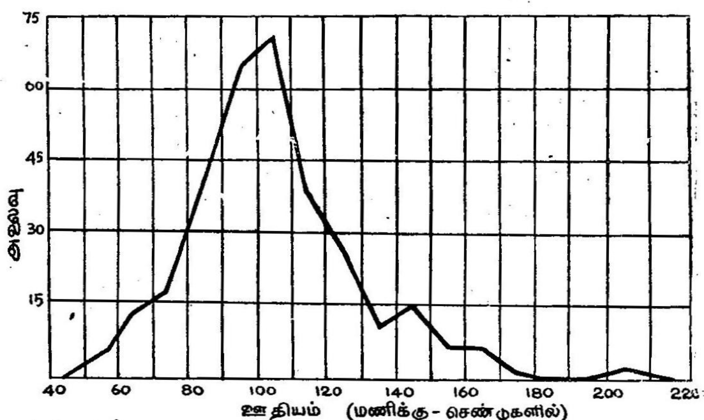


4.7. படம்.

அலைவுப் பலகோணம்: (384 மாதங்கள் கொண்ட ஒரு கால இடைவெளியில்) லண்டன் - நியூயார்க் நாணயமாற்று வீதங்களின் பரவல்.

களில் பொன்னுக எளிதில் மாற்ற முடிந்தது. கடந்த பத்தாண்டு களில் கண்டறிந்தவை, இதற்கு முற்றிலும் வேறுபட்ட பண்புகளைக் குறிக்கும். 4.7 படத்தில் வரைபடமாகக் காட்டப்பட்டுள்ள பரவலில், போருக்கு முற்பட்ட 32 ஆண்டுகளின் மாத வீதங்கள், அவற்றின் அலைவெண்களுக்கேற்பப் பிரிவினை செய்யப்பட்டிருக்கின்றன.[4]

இறைச்சிக்காக விலங்குகளைக் கொல்லவும், அவைகளைப் பக்குவம் செய்யவுமுள்ள தொழிற்சாலைகளை, அவற்றின் ஊழியர்களின் சராசரி மணி ஊதியத்திற்கேற்ப வகைபடுத்தப்பட்ட பரவல், 4-6 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது; அதன் வரைவடிவம் 4.8 படத்தில் காட்டப்பட்



4.8. படம்.

அலைவுப் பலகோணம். 1946, மார்ச்சில், ஊன்தடிந்து பக்குவம் செய்யும் தொழிற்சாலைகளை, அவற்றின் ஊழியர்கள் பெற்ற சராசரி மணி ஊதியத்திற்கேற்ப அமைத்த பரவல்.

டுள்ளது. 1946-ல் 122,269 உற்பத்தித் தொழிலாளர்களை வேலைக்கு அமர்த்திக்கொண்ட 309 நிறுவனங்களைப் பற்றிய விவரங்கள் இவை. மணி ஊதியங்களின் அளவுத் திட்டத்தில் 80-லிருந்து 120-சென்ட்டு கள் வரையில் தெளிவான குறிப்பையும், 100-லிருந்து 110-க்குள், மிகுந்த நெருக்கமான தொகுப்பையும் காண்கிறோம். வருமானம், ஊதியம் பற்றிய பரவல்களில் வழக்கமாகக் காணப்படுவது போலவே,

4 இவ் விவரங்கள், ஒவ்வொரு மாதத் துவக்கத்திலும், சராசரிகளாக எக்கனமிஸ்ட் (Economist) பத்திரிகையில் வெளியிடப்பட்டன. இந் நாணயமாற்று வீதங்கள் வட்டி இழப்பு ஏதுமின்றி, 1886 ஜூலையிலும், அதற்குப் பின்னரும், தந்தி வழி மாற்று வீதங்களாக (telegraphic transfer) அமைந்தவை. இந்த விவரம் பீக் (Peake) எழுதியதிலிருந்து எடுக்கப்பட்டது. து. நா. ப. 125

இப் பரவலும் கோட்டமுடையதாக வலப்புறம் நீண்ட வால்பகுதி யோடு இருக்கிறது. பொதுவாக வருமானப் பரவல்களில் காணப் படும் அமைப்பைப்போலவே, மணி ஊதியங்களின் வீச்சும் முகட்டுக்குமேல் கீழிருப்பதைவிட அதிகமாக இருக்கும்.

பருப்பொருள் அளவைகளைக் குறிக்கும் வளைகோடுகளின் பண்பாக அமைந்து காணப்படுகின்ற சமச்சீரும் ஒழுங்கும், பொருளாதாரப் புள்ளிவிவரங்களின் அடிப்படையில் உருவான அலைவு வளைகோடுகளிலும், அலைவெண் செவ்வகப் படங்களிலும் இல்லை என்பதைக் கவனிக்கவேண்டும். பொருளாதாரப் புள்ளிவிவரங்களின் அடிப் படையில் உருவான வளைகோடுகளில் சில சமச்சீரின்றி, குவிப்புப் புள்ளிக்கு ஒரு புறத்தே பளு மிகுந்து காணப்படும். சில சமயங்களில் அலைவுகளின் அதிகரிப்பிலும் குறைவிலும் காணப்படும் ஒழுங்கில் முறிவுகள் காணப்படும். இத்தகைய வேறுபாடுகள் இருப்பினுங்கூட

பட்டியல் 4–6

1946, மார்ச்சில், ஊன் தடிந்து பக்குவம் செய்யும் தொழிற்சாலைகளை, அவற்றின் ஊழியர்கள் பெற்ற சராசரி மணி ஊதியத்துக்கேற்ப அமைத்த அலைவுப் பரவல்.*

தொழிற்சாலைகளின் சராசரி மணி ஊதியம்	*இவ்வூதியம் பெறும் தொழிற் சாலைகளின் எண்ணிக்கை*
50- 59.9 சென்டுகள்	4
60- 69.9	12
70- 79.9	17
80- 89.9	41
90- 99.9	63
100-109.9	73
110-119.9	37
120-129.9	25
130-139.9	10
140-149.9	14
150-159.9	6
160-169.9	5
170-179.9	1
180-189.9	0
190-199.9	0
200-209.9	1
மொத்தம்	309

* *1946, மார்ச் 15 முடிய, முழுநேர அல்லது குறைநேர அடிப்படையில், வருமானம் பெற்ற காலப் பகுதிகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.*

பொருளாதாரம், வானியல், மனித உடல் அளவை இயல் (anthropometry), எறிபொறியியல் (ballistics) ஆகிய துறைகளிலும், முற்றிலும் வாய்ப்பினுல் நிகழ்ந்த நிகழ்ச்சிகள் ஆகியவை குறித்த புள்ளிவிவரங்களுக்கிடையே, ஒரு குடும்பச்சாயல் நிலவக் காணலாம்.[5] இப் பொதுப் பண்புகளில் சிலவற்றைக் கவனிப்போம்.

சில பொதுப் பண்புகள்

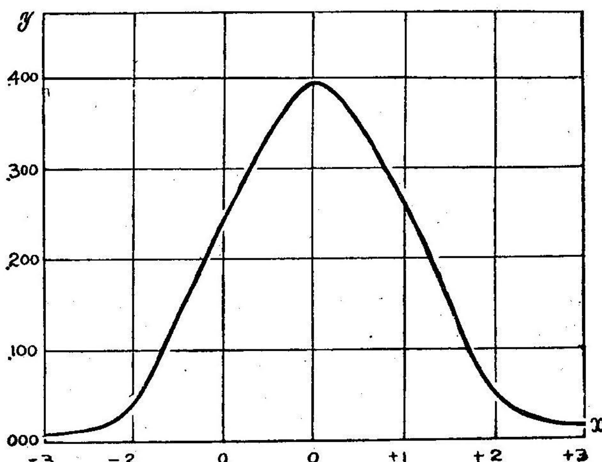
முதலாவதாகக் கிடைத்த அளவைகளின் மதிப்புகளில் காணப்படும் மாறுபாட்டை (variation) எடுத்துக்கொள்வோம். மனிதர்களது உயரங்கள் மாறுபடுகின்றன. ஓர் அளவு குறித்து எடுக்கப்பட்ட வானியல் அளவைகளும் வேறுபடுகின்றன. மனித முயற்சியால் எந்த அளவுக்கு இயலுமோ அந்த அளவுக்கு, மாருத கட்டுப்பாடான சூழ்நிலைகளில், தரையில் ஒரு குறித்த இடத்தில் விழுமாறு எய்தவை குறித்த இடத்தில் வீழ்வதில்லை; மனிதருக்கு மனிதர் வருமானத்தால் மாறுபடுகின்றனர். நிறுவனத்துக்கு நிறுவனம், மனிதருக்கு மனிதர் மணி ஊதியங்கள் (hourly earnings) வேறுபடுகின்றன. ஒரு கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டில் கிடைத்த பல கண்டறிந்த குறிப்புகளும் மதிப்புகளும் இருகோடி மதிப்புகளுக்கு இடையே ஓர் அளவுத் திட்டத்தின் வழியே பரவலாக அமைந்துள்ளன.

(x அச்சின்) அளவுத்திட்டத்தின் வழியே பரவலாக அமைந்த இம் மதிப்புகள் ஒரு கோடியிலிருந்து மறுகோடி மதிப்பு வரை ஆராய்ந்தால் அளவுத்திட்டத்தின் அடுத்தடுத்த புள்ளிகளில் காணப்படும் குறிப்புகள் (அதாவது அடுத்தடுத்த பிரிவு அலைவுகள்) ஏறக்குறைய ஓர் ஒழுங்குடன் அதிகரித்து உச்சத்தை அடைந்து பின் அதுபோலவே குறைவுபடுகிறது. மாறுபாடு இருப்பினுங்கூட மதிப்புகளின் அளவுத் திட்டத்தில் ஒரு சில புள்ளிகளில் விவரங்கள் குவிப்பாக அதாவது ஒரு மையநிலைப் போக்குடன் (central tendency) இருக்கக் காண்கிருேம். இது எல்லா அலைவுப் பரவல்களுக்குப் பொதுவாகவுள்ள குறிப்பிடத்தக்க பண்புகளில் இரண்டாவது.

அளவுத்திட்டத்தின் வழியே அடுத்தடுத்த ஒவ்வொரு பிரிவுக்கும் மிகுக் குவிப்புப் புள்ளியிலிருந்து (point of greatest concentration)

5. மிகுந்த விலக்கமுடைய வகைகளுக்கு மாதிரி எடுத்துக்காட்டுகள் முன்னர் தரப்பட்டுள்ளன. X மதிப்புகளின் அளவுத்திட்டத்தில் ஒரு பக்கத்தில் உச்ச அலைவுகளைக்காட்டும் J வகையான பரவல்கள், மதிப்புகளின் வீச்சில் மையத்தை விட ஓரங்களின் அலைவுகளின் குவிப்பு உள்ள பலவகையான பரவல்கள் முதலியன இவ்வகை. இத்தகைய பரவல்களுக்கு இந்த அத்தியாயத்திலும் அடுத்த அத்தியாயத்திலும் ஆராயப்படுகின்ற வருணனை அளவைகள், ஓரளவு பொருளும் சிறப்பும் இழந்து காணும். இத்தகைய பரவல்கள் மிகவும் அரியன. எனினும், அவை தனிச் சிறப்புடன் பொருந்திவரும் சமயங்களும் உள்ளன.

விலக்கங்களின் அளவை அளந்தால், குறைந்த விலக்கங்கள் அதிக விலக்கங்களைவிட அடிக்கடி காணப்படும். கோடி விலக்கங்கள்



4.9. படம். இயல் நிலைப் பிழை வளைகோடு

அரிதாகக் காணப்படும். பருப்பொருளியல்களிலும் (physical sciences), முற்றிலும் வாய்ப்பினால் அமைந்த துறைகளிலுமிருந்து தரப்படும் எடுத்துக்காட்டுகளில் குவிப்புப் புள்ளியிலிருந்து இரு புறத்திலும் விலக்கங்கள் (ஏறக்குறைய) சரிசமமாகவும், பொருளாதாரப் பரவல்களில் கிட்டத்தட்ட சமமாகவும் அமையக் காண்போம். (இதுபோல, குவிப்பு மிகுந்த புள்ளியின் இருபுறத்திலும் விலக்கங்கள் கிட்டத்தட்ட சமமாக அமையவேண்டும் எனும் விதிக்கு விலக்கங்களும் உண்டு. வருமானப் பரவல் இதற்கு ஒரு சீரிய எடுத்துக்காட்டு).

4.9 படத்தில் இயல்நிலைப் பரவல் (Normal Curve) எனப்படும் ஒரு வரைவடிவம் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதே வளைகோட்டை இயல் நிலைப்பிழை வளைகோடு (Normal Curve of Error) என்று அழைப்பதும் வழக்கம். அதனை வரைவதற்குப் பயனாகும் அளவுத் திட்டங்களின் தன்மை அதன் பண்புகள் முதலானவை பின்னர் ஒரு பகுதியில் விரிவாக ஆராயப்படும். நாம் முன்னர்க் குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் சில இந்த வளைகோட்டுவகைக்கு நெருக்கமாக அமைந்து மேலோ, கீழோ சிறிதளவே வேறுபட்டுக் காணப்படுவதைச் சுட்டிக் காட்டவே, இந்த இயல்நிலைப் பரவலை ஓர் அடிப்படை அமைப்பாக இங்கே அறிமுகம் செய்தோம். இவ்வகையினின்று முரண்பட்ட

அமைப்புகள் பல என்பதையும், அவற்றிற்கெனத் தனிச் சிறப்புகள் உண்டென்பதையும் வலியுறுத்திக் கூற விரும்புகிறோம். எனினும், இயல்நிலைப் பிழை வளைகோடு புள்ளியியல் ஆய்வுக்கு ஓர் அடிப்படை வடிவமாதலால் மிகுந்த சிறப்புடையது. அலைவுப் பரவல்களை வர்ணிப்பதற்கு ஒரு பொதுமையான முறையை மேற்கொள்ள இயல் நிலை வளைகோட்டு அமைப்பும், அதன் பண்புகளுமே முக்கியமான ஆதாரம். அளவின விவரங்களின் பரவல்கள் மாறுபடுகின்றன. அவை ஒன்றுக்குள் ஒன்று வேறுபடுவதும், சில முக்கிய வகைகளிலிருந்து அவை வேறுபடுவதும் மிகுந்த பொருளுடையனவே. எனினும் இந்த வேறுபாடுகளையும் மீறி அவற்றிற்கிடையே ஒரு குடும்பச் சாயல் ஊடுருவி நிற்கக் காண்கிறோம். ஒவ்வோர் அலைவும் பரவலும் ஏதோ தனித்த ஒன்றல்ல. ஒரு பெரிய குடும்பமொன்றின் ஓர் உறுப்பாகவே அமைந்திருக்கிறது. எனவே, ஒரு கொடுக்கப்பட்ட பரவலை வர்ணிப்பதற்கும் அதனைப் பொதுமைப் படுத்துவதற்கும், பிற சமயங்களில் பொருந்திவந்த முறைகளை நம்பகமாக பயன்படுத்தமுடிகிறது.

இவ்வகையான, ஏறக்குறைய பொருந்திய, பொதுவான பரவல் தரப்பட்டிருக்கிறது. கொடுக்கப்பட்ட பரவல் ஒன்றைப் பிறவற்றிலிருந்து வேறுபடுத்தி வர்ணனை செய்வது எப்படி? முந்திய விளக்கத்திலிருந்து சில முறைகள் தோன்றக் கூடும்.

பொதுவான வருணனை அளவைகள்

கண்டறிந்த குறிப்புகளின் மதிப்புகள் யாவும் ஓர் அளவுத் திட்டத்தின் வழியே பரவலாக அமைந்துள்ளன என்பதை முன்னர்க் குறிப்பிட்டோம். இந்த அளவுத்திட்டத்தில் பரவல் முழுவதற்கும் பிரதிநிதியாக அமையக்கூடிய ஒரு தனி மதிப்பைத்தேர்ந்து அலைவுப் பரவல் முழுவதையும் வருணிக்கலாம். அலைவெண்கள் ஒன்றுக்கொன்று வேறுபடுவதால், எந்த மதிப்பு அதிக தடவை காணப்படுகிறதோ, அதனைத் தேர்வதே ஏற்றதாகத் தோன்றுகிறது. வேறு விதமாகக் கூறினால், அளவுத்திட்டத்தில் எந்தப் புள்ளியில் குவிப்பு (concentration) அதிகமாகத் தெரிகிறதோ, அதனைத் தேர்வது இந்த மதிப்புப் பரவலின் மையநிலைப் போக்கு அளவைகளில் (measures of central tendencies) ஒன்றாகும். எடுத்துக்காட்டாக, எவ் வருமானப் பிரிவில் அதிகக் குடும்பங்கள் அமைகின்றனவோ (3-7 பட்டியலில் தரப்பட்ட பரவலில் $ 3,500 தோன்றும்), அதன் நடு மதிப்பைப் பரவலின் பிரதிநிதியாகக் கருதலாம். கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் மையநிலைப் போக்கைக் குறிக்கக்கூடிய பல அளவைகளில் இப் பொதுமதிப்பும் ஒன்றாகும் என்பதனைக் கவனிக்கவும். இத்தகைய அளவைகள் யாவும் சராசரிகள் (averages) என்ற பொதுப்பெயரால்

அழைக்கப்படுகின்றன. இவற்றைச் சில வேளைகளில் இட அமைப்பு அளவைகள் (measures of location) என்று கூறுவர். x அளவுத் திட்டத்தின் மேலுள்ள பரவலின் முக்கியமான உறுப்புகளை இடங் காண்பதினாலே, இப்பெயர் பரவலின் பிரதிநிதியாக அமைகிறது.

இதுபோன்ற ஒரு தனி மதிப்புக்குப் பல பயன்கள் இருக்கலாம். அதே சமயத்தில் பரவல்பற்றிய எல்லாச் செய்திகளும் இது ஒன்றினாலேயே தெரிந்துவிடாது என்பது உண்மை. சராசரியினைச் சார்ந்து பரவல் எத்தன்மையாக அமைந்துள்ளது என்பதும் மிகுந்த முக்கியத்துவம் உடையது. பட்டியலாக அமைக்கப்பட்ட பிரிவுகளில் மதிப்புகள் நெருக்கமாகக் குவிந்துள்ளனவா அல்லது விரிந்த வீச்சில் பரந்து சிதறியுள்ளனவா? ஒரு சராசரியின் பிரதிநிதித்துவ தன்மை, அதனைச் சார்ந்த பிற மதிப்புகள் எத்தனை நெருக்கமாகத் தோய்ந் துள்ளன என்பதையும், மையச் சார்பை யொட்டி குவிப்பின் அளவு எவ்வளவு என்பதையும் பொறுத்தது. எனவே, சராசரியோடு மாறு பாட்டின் அளவையும் (measure of variation), அதாவது சராசரி மையமதிப்பை ஒட்டிய 'சிதறல்' (scatter) அளவையும் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும்.

பரவலின் வருணனை நிறைவுபெற, பரவலின் சமச்சீர் (symmetry) பற்றியும் தெரியவேண்டும். மிகுக் குவிப்பில் புள்ளி யின் (point of greatest concentration) இருபுறமும் குறிப்புகள் சமனாகப் பரவியுள்ளனவா, அல்லது அலைவு வளைகோடு ஒருபக்கம் கோட்டமடைந்து—வருமானப் பரவலில் காட்டப்பட்டிருப்பதுபோல— இருக்கிறதா எனத் தெரிந்துகொள்வதும் மிகவும் இன்றியமை யாதது. வளைகோடு சமச்சீராக இல்லாவிட்டால் சமச்சீரின் அளவு தீர்மானிக்கப்படவேண்டும். இதற்காக உருவாக்கப்பட்டதே கோட்ட அளவைகள் (Measures of Skewness).

இயல்நிலை வளைகோட்டைத் தரமாக எடுத்துக்கொண்டு, அதனின்று அலைவு வளைகோடுகளின் சிகரத்தன்மையை (peak-edness) அறிந்து, அதன் அளவையும் புள்ளியியலார் பயன்படுத்து கின்றனர். (4.6 படத்தில் உள்ள) ஆண்டுக்கு ஆண்டு விலை மாற்றங்களைக் காட்டும் அலைவுப் பலகோணம் இழைக்கப்பட்டால் கிடைக்கின்ற வளைகோடு இயல்நிலை வளைகோட்டைவிடக் கூரியதாக இருக்கும் என்பது தெளிவு; மைய மதிப்பைச் சார்ந்து குவிப்பு மிகுந்து இருக்கிறது என்பதைச் சுட்டிக்காட்டுவதனால் இது மிகவும் பொருளுடையது. அலைவு வளைகோடுகளின் இத்தன்மை கர்டாஸிஸ் (kurtosis) அல்லது சிகரத்தன்மை (peakedness) அல்லது அதிகப்படி (excess) எனப்படும். கர்டாஸிஸ் அளவைகள் பொருத்த

மாகத் தீர்மானிக்க முடியுமானல் அவை, அலைவுப் பரவலை வருணிப்பதற்கு இறுதிநிலையாக இருக்கும்.

இப் பல்வேறு அளவைகளையும் கண்டறிந்து விட்டால், புள்ளியியல் ஆய்வுப் பணியை நாம் துவங்கி நடத்திக்கொண்டிருப்பவர்களாவோம். விவரங்களைக் குழப்பமாகத் திரளாக இருந்த நிலையிலிருந்து, மேற்கொண்டு வேலை செய்வதற்கேற்ற அலைவுப் பட்டியல் வடிவில் அமைத்தாகிவிட்டது. பின் அப்பட்டியலின் சாரத்தை மூன்று அல்லது நான்கு சிறப்பு அளவைகளில் தேக்கித் தந்தாகிவிட்டது. இச் செயல்முறை கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் தன்மைகளை வெளியிடுவதோடு ஒத்த பரவல்களோடு ஒப்பிடவும் வழிவகுக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக, அமெரிக்கா, பிரிட்டன் ஆகிய நாடுகளின் மக்கள் தொகையின் தனிப்பட்ட வருமானப் (கோடிக்கணக்கான) புள்ளி விவரங்களைத் தொகுக்கப்படாத நிலையில் ஒப்பிடுவது என்பது இயலாது. ஆனல், ஒவ்வொரு நாட்டுக்கும் பிரதிநிதித்துவமாக சராசரி மதிப்பு ஒன்றைக் கணித்து, இம் மைய மதிப்புகளிலிருந்து தனிப்பட்ட வருமானங்களின் பரவலுக்கு ஒரு வருணனை அளவையையும் கண்டுபிடித்தால், ஒப்புநோக்கி ஆராய்ச்சி செய்வதற்கு வழி பிறக்கிறது. கடைசியாக, இந்த வருணனை அளவைகளைக் காண்பதன்மூலம், புள்ளியியல் ஆய்வில் முழுமைத் தொகுதியின் தன்மைகளை ஆராய்வதற்காயினும், எடுகோள் சோதனை செய்வதற்காயினும்— உய்த்துணர்வு செய்ய, அறிவியற்கேள்விகளில் இவை பொதுவாக முக்கியத் தொடர்புடையன. இந்த வருணனை முறையின் ஒரு கட்டமான மையச் சார்பு அளவைகள்பற்றி அடுத்த பகுதியில் காண்போம். இவ்விதமாகச் சராசரிகள் காண்பதுபற்றி விவரித்த பின்பு, வேறுபாடு, சிதறல் அளவைகள் குறித்த சிக்கல்களை ஆராய்வோம்.

மையநிலைப் போக்கு அளவைகள்
(Measures of Central Tendency)

விவரங்கள் பெருந்திரளாக அமைந்திருந்தாலும், அவை யாவும் மைய அளவை ஒன்றினைச் சார்ந்தே அமைகின்ற தன்மையைப் பெற்றிருக்கின்றன; அந்த மைய அளவையின் மதிப்பிலிருந்து, தொகுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் மதிப்புகள் ஓர் அமைதியுடனும், ஒழுங்குடனும் வேறுபடுகின்றன. எனவே, ஒரு சராசரியை, அலைவுப் பரவல் முழுவதையும் தொகுத்து வெளியிடும் பிரதிநிதியாகக் கொள்வது பொருத்தமுடையதே என்பதை முன்னர்க் கண்டோம். இதுபோன்ற மையநிலையைச் சார்ந்து பிற விவரங்கள் நெருக்கமாக அமைந்திருப்பதனுல்தான், இத்தகைய பிரதிநிதித்துவ அலைவு,

களுக்குச் சிறப்புத் தருகிறோம். பரவல் முழுமைக்கும் சராசரியினைப் பிரதிநிதியாக ஏற்பதற்குக் காரணம், சராசரியின் மதிப்பு, இனஞ் சுட்டும் (typical) மதிப்பாக இருப்பதே ஆகும். ஒரு பரவலைச் சேர்ந்த விவரங்கள் ஒன்றிற்கொன்று அதிக முரண்பாடுடைய மதிப்புடையனவாக இருக்கும்போதும், மதிப்புகள் நெருக்கமின்றிப் பரவலாக அமைந்திருக்கும்போதும், ஒரு தனி மதிப்பின்மூலம் அந்தப் பரவலின் இலக்கணத்தை அறிந்துகொள்வது முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக 3, 125, 1,000 ஆகிய மூன்று எண்களின் கூட்டுச் சராசரியான (arithmetic mean) 376 என்ற எண்ணை, எடுத்துக் கொண்ட மூன்று எண்களின் பிரதிநிதியாகக் கொள்வது ஓரளவுக்குத் தான் பயன்படும். அலைவுப் பரவலின் பிரதிநிதியாக ஒரு சராசரி விளங்கவேண்டுமானால், விவரங்கள் அந்த மைய மதிப்புக்கு நெருக்கமாகச் சார்ந்திருக்க வேண்டும் என்பது அடிப்படையான தேவையாகும்.

அலைவுப் பரவலின் பொதுத்தன்மையை நினைவுகூர்ந்தால் ஒருவகையான சராசரியின் அமைப்புத் தத்துவம் உடனே தெளிவாகும். x அளவுத் திட்டத்தில் எந்தப் புள்ளியில் விவரங்கள் அதிகச் செறிவாக அமைந்திருக்கிறதோ, அதாவது எந்த மதிப்பு அதிகமான தடவை காணப்படுகிறதோ, அதனைப் பரவல் முழுவதற்கும் இனஞ் சுட்டுவதாகக் கொள்ளலாம் என்று முன்னர் கூறப்பட்டது. இந்த மதிப்பினை முகடு (mode) என்போம். இம்மதிப்பு எந்தத் தொகுதியினைச் (group) சேர்ந்ததோ, அதனை முகட்டுத் தொகுதி (modal group) என்போம். ஒரு பரவலின் அலைவு வளைகோட்டை வரைந்தால், குத்தாயத்தின் உச்சி மதிப்புக்கு இயைந்த x மதிப்பு முகட்டினைக் குறிக்கும். உச்ச மதிப்பான குத்தாயம், முகட்டுத் தொகுதியின் அலைவினைக் காட்டும்.[6] முகட்டினைக் காணும்போது, இந்த இரு மதிப்புகளுக்கும் உள்ள வேறுபாட்டினை விளங்கிக்கொள்ளாது, மாணவர்கள் அடிக்கடி மயங்குவதுண்டு. x அளவுத் திட்டத்தின் வழியாக அளக்கும் தூரமே முகடு; y அளவுத் திட்டத்தின் வழியாக அளக்கும் தூரமன்று. ஒவ்வொரு குத்தாயமும் ஒரு பிரிவில் எத்தனை விவரங்கள் அடங்கியுள்ளன என்பதைக் காட்டுமேயல்லாது, என்ன மதிப்புடைய விவரங்கள் அந்தப் பிரிவில் அடங்குகின்றன என்பதை அளப்பதில்லை.

x மதிப்புகளின் அளவுத் திட்டத்தினைச் (scale) சரிபாதியாக— ஒவ்வொரு பாதியிலும் மொத்த விவரங்களில் பாதி அமையுமாறு—

[6] சரியாகச் சொல்லப்போனால், கொடுக்கப்பட்ட பரவலுக்கு மிகவும் ஏற்புடைய (ideal) அலைவு வளைகோட்டின் உச்சமான குத்தாயத்துக்கு இயைந்த x மதிப்பே முகடு ஆகும்.

பிரிக்கும் புள்ளியினையும் கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் இனஞ்சுட்டுவதாக (typical) நாம் தேர்ந்தெடுக்கலாம். இந்த மதிப்பினை இடைநிலை (mediun) என்று குறிப்போம். கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளில் பாதி இதனினும் அதிகமாகவும், பாதி இதனினும் குறைவாகவும் இருக்கும். இம் முறையின்மூலம் 1947ஆம் ஆண்டில் அமெரிக்கக் குடும்பங்களின் இடைநிலை வருமானம் 3,027 டாலர்கள் என்று மதிப்பிடப்பட்டிருக்கிறது. அதாவது 37,000,000 குடும்பங்களில் அரைவாசிக் குடும்பங்களின் வருமானம் இத் தொகையைவிடக் குறைவாகவும் இருந்தது. பரவலை அலைவு வளைகோடாக அமைப்போம். அலைவு வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்பு, பரவலின் மொத்த விவரங்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது. எனவே, இடைநிலையின் இலக்கணத்தின்படி வளைகோட்டில் x அச்சில் இடைநிலை மதிப்பைக் குறிக்கும் புள்ளியில் குத்தாயத்தினை நிறுத்த, அக்கோட்டால் வளைகோட்டுக்கு உட்பட்ட பரப்பு இரு சமக்கூறுகளாகப் பிரிவடையும்.

பரவலின் பிரதிநிதியாக அமையக்கூடிய சராசரிகளின் மூன்றுவது, கூட்டுச் சராசரி (arithmetic mean). பரவலிலுள்ள ஒவ்வொரு விவரத்தினையும் எடுத்துக்கொண்டு கணக்கிடப்படும் சராசரி இது. முகடு, இடைநிலை ஆகியவற்றுக்கும், கூட்டுச் சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாடே இதுதான். அலைவுப் பட்டியலின் நிரையில் விவரங்கள் பெறுகின்ற இட அமைப்பினை யொட்டியே முகடும் இடைநிலையும் மதிப்பிடப்படுகின்றன. முகடும், இடைநிலையும் விவரங்களின் தனித்தனி மதிப்புகளினால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. பரவலின் ஈர்ப்பு மையமாகக் (centre of gravity) கூட்டுச் சராசரி இருக்கிறது ; அதாவது, அலைவு வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்பினை வெட்டியெடுத்துச் சமநிலைப்படுத்தி ஈர்ப்பு மையத்தைக் கண்டால், அப் புள்ளியின் x மதிப்பே கூட்டுச் சராசரி.

வேறு இரு சராசரிகள், பெருக்குச் சராசரியும் (geometric mean), ஹார்மானிக் சராசரியும் (harmonic mean) ஆகும். இவற்றின் தன்மைகள் பின்னர் விவாதிக்கப்படும்.

குறியீடு : பரவலில் அதிகமான விவரங்கள் இருக்கையில், இந்தப் பல்வேறு சராசரிகளையும் கணக்கிடுவதும், மதிப்பிடுவதும் அதிகத் தொல்லையானது. எனவே, பொருத்தமான குறுக்குவழிகளைக் கையாண்டால், இந்தச் சராசரிகளைத் தொல்லையின்றி எளிமையாகக் கணிக்கலாம். பின்வரும் குறியீடுகளைக் கையாண்டால், இம்முறைகளை எளிமையாக விவரிக்கலாம் :

X: தனி விவரமொன்றின் மதிப்பு ; மாறி ஒன்றினைக் குறித்த விவரங்களின் தொடர் X_1

X_2, $X_3 \ldots X_n$ என்று எழுதப்படும்; x என்பதையும் மாறியினைக் குறிக்கும் பொதுவான குறியீடாகக் கையாளலாம்.

M, $\bar{X}$ அல்லது $\bar{x}$: மாதிரி ஒவ்வொன்றின் கூட்டுச் சராசரி.[7]

d அல்லது x: சராசரியினின்று தனி விவரமொன்றின் விலக்கம் (deviation), ஒரு பிரிவின் மையப் புள்ளி சராசரியினின்று பெற்றுள்ள விலக்கம்.

A அல்லது M': சராசரியல்லாத பிறிதோர் எதேச்சை மூலம் (arbitrary origin).

c: எதேச்சை மூலத்திலிருந்து மாதிரிச் சராசரியின் விலக்கம்.

d' அல்லது x': எதேச்சை மூலத்திலிருந்து தனி விவரமோ அல்லது விரிவு மையப் புள்ளியோ பெற்றுள்ள விலக்கம்.

f: அலைவுப் பரவலில் ஒரு குறிப்பிட்ட பிரிவில் அடங்கும் விவரங்களின் எண்ணிக்கை.

N: கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் அல்லது அலைவுப் பரவலில் அடங்கும் விவரங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை.

Mo: முகடு

Md: இடைநிலை.

M_g: பெருக்குச் சராசரி.

H: ஹார்மானிக் சராசரி.

h: பிரிவு இடைவெளி.

Σ (சிக்மா): கூட்டல் தொழிலைக் குறிக்கும் ஓர் அடையாளம்—பொருள் கூடுதல்.

கூட்டுச் சராசரி (The Arithmetic Mean)

மேற்குறிப்பிட்ட குறியீடுகளைப் பயன்படுத்திக் கூட்டுச் சராசரியின் வாய்பாட்டை எழுதுவோம் :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} \quad (4.1$$

[7] பின்வரும் பகுதிகளில் கூட்டுச் சராசரியினை μ (கிரேக்க எழுத்து மியு) என்ற அடையாளத்தால் குறிப்போம். பொதுவாக, மாதிரியின் பண்புகளை ஆங்கில அரிச்சுவடி எழுத்துகளாலும் குறிப்பது மரபு. எடுத்துக்காட்டாக M என்பது கல்லூரி மாணவர்களின் ஒரு மாதிரியின் சராசரி உயரம்; இதன் மதிப்பு 5 அடி 10 அங்குலம் என்று கொள்வோம். இதனைக் கல்லூரி மாணவர்களின் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி உயரமான μ, இன்னும் கணக்கிடப்படாதது என்பதற்கு ஒரு மதிப்பீடாகக் கொள்ளலாம்.

அதாவது 2, 5, 6, 7 ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண இவற்றைக் கூட்டி 4ஆல் வகுக்க வேண்டும். அதாவது $\frac{20}{4} = 5$ ஆகும். ஒவ்வொரு விவரத்தின் மதிப்பும் தெரியும்போது, கூட்டலினும் வகுத்தலினலும் கூட்டுச் சராசரியை மேற்கூறியவாறு எளிதாகக் கணக்கிடலாம். முன்பொரு பகுதியில், 220 நெசவாலைத் தொழிலாளர்களது வார வருமானம் குறிப்பிடப்பட்டிருந்தது. இவற்றைக் கூட்டிக் கூட்டல் தொகையை 220ஆல் வகுக்க, வார சராசரி வருமானம் \$ 50·16841 எனக் கிடைக்கிறது. இந்த எடுத்துக்காட்டில் 220 எண்களைக் கூட்டுவது சற்றுத் தொல்லையாக இருக்கிறது. இதுபோல 37,000,000 குடும்பத்தினரது வருமானத்தை எடுத்துக் கொண்டு கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட முயன்றால், அது மிகவும் அரியதொரு செயலாகவே இருக்கும். எனவே, தொகுக்கப்படாத விவரங்களிலிருந்து தேவையான சராசரிகளைக் கணிக்க முயல்வதை விட அலைவுப் பரவலாக அமைந்த விவரங்களிலிருந்து கணிப்பதே நடைமுறைக் காரணங்களுக்குத் தேவையாக உள்ளது. இதனை எடுத்துக்காட்டும் வகையில் 1946 ஆம் ஆண்டு ரசாயனத் தொழிற்சாலைத் தொழிலாளர்கள் மணிதோறும் பெறுகின்ற ஊதியங்களின் புள்ளிவிவரங்களைப் பயன்படுத்தி விளக்கம் பெறுவோம்.

பாகுபாடுபற்றிய பகுதியில், பிரிவு இடைவெளியினைத் தேர்வதில் நாம் மேற்கொள்ள வேண்டிய முன்னெச்சரிக்கைகளாகக் குறித்தவற்றில் சில எத்துணை அவசியமானவை என்பது இந்த எடுத்துக்காட்டால் தெளிவுபெறும். பாகுபாடு செய்யப்பட்ட விவரங்களாலான பரவலிலிருந்து சராசரியைக் கணக்கிடும்போது, ஒவ்வொரு பிரிவிலும் விவரங்கள் சீராக நிரவிவருகின்றன என்று புனைந்துகொள்ள வேண்டியுள்ளது. எனவே, பிரிவு இடைவெளியைத் தேர்ந்தெடுக்கும் பொழுதும், இக் கருத்தினை நினைவில் கொண்டால்தான் இத்தகைய புனைவினால் விளையக்கூடிய தவறுகள் குறைவாக இருக்கும். ஒவ்வொரு பிரிவிலுமுள்ள விவரங்கள் சீராக நிரவிவந்திருந்தால், ஒவ்வொரு பிரிவிலும் அடங்கும் விவரங்களின் பிரதிநிதியாக அப் பிரிவின் மைய மதிப்பை எடுத்துக்கொள்ளலாம். அந்த மைய மதிப்பினை அந்தப் பிரிவில் அடங்கும் விவரங்களின் எண்ணிக்கையால் பெருக்க, கிடைக்கின்ற பெருக்குத் தொகையை அப்பிரிவில் அடங்கும் விவரங்களின் மதிப்புக்குத் தோராயமாகக் கொள்ளலாம். எனவே, சராசரியின் வாய்பாடு $\bar{X} = \frac{\Sigma(fX)}{N}$ என்றாகிறது. 4-7 பட்டியல் இம் முறையை விரிவாக விளக்குகிறது.

பட்டியல் 4-7

1946, ஜனவரியில், சவுத் ஈஸ்டர்ன் மாநிலத்திலுள்ள ரசாயனத் தொழில் நிறுவனத் தொழிலாளர்களின் நேர்காலச் சராசரி மணி ஊதியங்களின் கூட்டுச் சராசரி.*

பிரிவு இடைவெளி (மணிக்கு சென்டுகளில்)	மையப்புள்ளி X	அலைவு f	fX
40- 49.9	45	2	90
50- 59.9	55	326	17,930
60- 69.9	65	500	32,500
70- 79.9	75	368	27,600
80- 89.9	85	202	17,170
90- 99.9	95	174	16,530
100-109.9	105	150	15,750
110-119.9	115	154	17,710
120-129.9	125	72	9,000
130-139.9	135	22	2,970
140-149.9	145	6	870
150-159.9	155	4	620
160-169.9	165	8	1,320
170-179.9	175	4	700
180-189.9	185	2	370
		1,994	161,130

$$\bar{X} = \frac{\Sigma(fX)}{N} \quad (4.2)$$

$$= \frac{161,130}{1,994} = 80.8074 \text{ சென்டுகள்}$$

* இந்த விவரங்களும் தொடர்ந்துவரும் பட்டியல்களிலுள்ள விவரங்களும் வேஜ் அனலிசிஸ் பிராஞ்ச் ஆஃப் தி யுனைடெட் ஸ்டேட்ஸ் பீரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டேடிஸ்டிக்ஸ் (Wage Analysis Branch of the United States Bureau of Labor Statistics) தொகுத்தது. லேபர் ஸ்டேடிஸ்டிக்ஸ் கமிஷனர் டாக்டர் ஏவான் கிளாக் (Dr. Ewan Clague) அவர்களும், பீரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டேடிஸ்டிக்ஸ், வேஜ் அனலிசிஸ் பிராஞ்ச் தலைவர் திரு. எச். எம். டவுட்டி (H. M. Douty) அவர்களும் இந்த விரிவான புள்ளிவிவரங்களைக் கொடுத்துதவினர்.

இவ்வகையில் கிடைக்கின்ற மதிப்பு சில சமயங்களில் நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி (weighted arithmetic mean) என அழைக்கப்படுகிறது. ஏனெனில், X என்ற தலைப்பின் கீழுள்ள பத்தியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 15 எண்களுக்கும் கூட்டுச் சராசரி காண்கிறோம். ஆனால், சாதாரணச் சராசரி எடுப்பதற்குப் பதிலாக ஒவ்வொன்றையும் அது எந்தப் பிரிவின்பாற்பட்டதோ, அதன் நடுமதிப்பால் நிறையிட்டுச் சராசரி காண்கிறோம். இச்செயல் முறை பின்வருவதைப் போன்றதே: ஐந்து பேருடைய வருமானம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதாக வைத்துக்கொள்வோம். இருவர்

\$2,000 வருமானமும், மூவர் \$3 000 வருமானமும் பெறுகின்றன ரென்ருல், உடனே \$2,000-ஐயும் \$3,000-ஐயும் கூட்டி இரண்டால் வகுத்துச் சராசரி கண்டுபிடிப்பது பொருத்தமுடையதாகாது என்பது தெளிவு. \$2,000-ஐ இரண்டாலும், \$3,000-ஐ மூன்ருலும் பெருக்கிக் கிடைக்கும் கூடுதல் தொகையாகிய \$13,000-ஐ ஐந்தால் வகுப்பதே முறை. எனவே, அலைவுப் பரவலிலிருந்து சராசரியினைக் கண்டுபிடிக்கும்பொழுது, ஒருவிதத்தால் நிறையிட்டே சராசரியினைக் கணிக்கிருேம். எனினும், 'நிறையிட்ட சராசரி' என்னும் சொல்லை, வேறு ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளுடன் பயன்படுத்துவதால்—இது பின்னர் விவரிக்கப்படும்—அலைவுப் பரவலிலிருந்து கணிக்கப்படும் சராசரிக்கும் இச் சொல்லைப் பயன்படுத்துவது ஏற்றதல்ல.

கூட்டுச் சராசரியினைக் காணக் குறுக்குவழி: தொகுக்கப்படாத விவரங்களிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியினைக் கண்டுபிடிப்பதைவிட அலைவுப் பரவலிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியினைக் காண்பது பொதுவாக எளிதுதான். என்ருலும், அலைவுப் பட்டியலிலிருந்து மேற்கூறிய முறைப்படி கணக்கிடுவதுகூட விவரங்கள் அதிக எண்ணிக்கையில் இருக்கும்போது தொல்லையாக இருக்கிறது. இம் முறையினை மேலும் எளிமைப்படுத்தலாம்.

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து விவரங்களின் விலக்கங்களின் கூடுதல் தொகை சுன்னமாகுமென்பது கூட்டுச் சராசரியினைக் கணக்கிடும் முறையிலிருந்து தெரிகிறது. இதை எளிதில் விளக்கலாம். தொடர்மதிப்புகளை $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ என்பதாலும், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரியை $\bar{X}$ என்பதாலும், கூட்டுச் சராசரியினின்று அவற்றின் விலக்கங்களை d_1, d_2, d_3, d_n என்பதாலும் குறிப்போம்.

பின் $$\frac{X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n}{N}=\bar{X} \qquad (4.3)$$

$$X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n=N\bar{X} \qquad (4.4)$$

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை N தான். எனவே, சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலிருந்தும் N தடவை $\bar{X}$ ஐக் கழித்தால்

$$(X_1-\bar{X})+(X_2-\bar{X})+(X_3-\bar{X})+\ldots+(X_n-\bar{X})=0 \qquad (4.5)$$

ஆனுல்,

$X_1-\bar{X}=d_1,\ X_2-\bar{X}=d_2,$ இன்ன பிற; ஆகையால், (4.5) வாய்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$\Sigma d=0 \qquad (4.6)$$

இம் முடிவு உண்மையாதலால், ஏதாவது ஓர் எதேச்சை மூலத்திலிருந்து விலக்கங்களை அளந்து, அதன் இயல் கணிப்புக் (algebraic) கூடுதலைக் கண்டால், பின் இந்தக் கூடுதலிலிருந்து எதேச்சை மூலத்துக்கும் பரவலின் உண்மையான சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாட்டை அறிய முடியும். மெய்யான சராசரிக்குப் பதிலாக எதேச்சை மூலத்திலிருந்து விலக்கங்களை அளப்பதன் விளைவு ஒவ்வொரு விலக்கத்திலிருந்தும் ஒரு மாறிலி கூட்டப்பட்டு (அல்லது கழிக்கப்பட்டு) இருப்பதுதான், இந்த மாறிலி சராசரிக்கும்,

எதேச்சை மூலத்துக்குமுள்ள வேறுபாடாகும். மாறிலி N தடவைகள் பயனுவதால், அதன் மதிப்பை, எதேச்சை மூலத்திலிருந்து கிடைக்கும் விலக்கங்களின் கூடுதலை N ஆல் வகுத்துக் கண்டு பிடித்துவிடலாம்.

எதேச்சை மூலமாக A ஐயும், $\bar{X}-A$ ஆக c ஐயும், A யிலிருந்து மதிப்புகளின் விலக்கங்களாக d'_1 d'_2 $d'_3 \ldots d'_n$ முதலியவற்றையும் (அதாவது $d'_1 = X_1 - A$, $d'_2 = X_2 - A$, இன்னபிற) குறிப்பிட்டால்,

$$d'_1 = d_1 + c,\ d'_2 = d_2 + c,\ d'_3 = d_3 + c,\ \ldots\ d'_n = d_n + c$$

அதனல் $\Sigma d' = \Sigma d + Nc$

ஆனல், $\Sigma d = 0$

$$\therefore \Sigma d' = Nc$$

எனவே, $c = \dfrac{\Sigma d'}{N}$

A, c ஆகியவற்றின் மதிப்பு தெரிந்தால், சராசரியின் மெய்யான மதிப்பு தெரியவரும். ஏனெனில் $\bar{X} = A + c$. இந்த முறை, பட்டியல் 4-8-ல் தரப்பட்டுள்ள எளிய எடுத்துக்காட்டினுல் விளக்கப் படும்.

பட்டியல் 4-8

கூட்டுச் சராசரி காணல் (குறுக்கு வழி)
(தொகுக்காத விவரங்கள்)

X	f	d'	
5	1	-15	$A = 20$
15	1	-5	$c = \dfrac{\Sigma d'}{N} = \dfrac{+25}{5} = +5$
25	1	$+5$	
35	1	$+15$	$\bar{X} = A + c = 20 + 5 = 25$
45	1	$+25$	
	5	$+25$	

கணக்கிடும் முறையை மேலும் சுருக்கி எளிமைப்படுத்த முடியும். ஏனெனில், விவரங்களை அலைவுப் பட்டியலாக அமைக்கும்போது, விலக்கங்களைப் பிரிவு இடைவெளி எனும் அலகு கொண்டு அளக்கலாம். அதனல் இறுதிநிலையில் ஏற்ற திருத்தத்தைச் செய்யும் போது, உண்மையான சராசரிக்கும் எதேச்சை மூலத்துக்குமுள்ள வேறுபாட்டைப் பழையபடி உண்மை மூல அளவைகளில் மாற்றியமைத்து விடலாம். இதனை முன்னரே சராசரி காணப் பயன்படுத்திய கூலி விவரம் பற்றிய புள்ளிவிவரங்களைப் (பட்டியல் 4-9 பார்க்க) பயன்படுத்தி விளக்குவோம்.

பட்டியல் 4-9

1946, ஜனவரியில், சவுத் ஈஸ்டர்ன் மாநிலத்திலுள்ள ரசாயனத் தொழில் நிறுவனத் தொழிலாளர்களின் நேர்காலச் (straight-time) சராசரி மணி ஊதியங்களின் கூட்டுச் சராசரி (குறுக்குவழி)

பிரிவு இடைவெளி (மணிக்குச் சென்டுகளில்)	மையப் புள்ளி X	அலைவு f	d' (பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில்)	fd' −	fd' +
40- 49.9	45	2	− 4	8	
50- 59.9	55	326	− 3	978	
60- 69.9	65	500	− 2	1,000	
70- 79.9	75	368	− 1	368	
80- 89.9	85	202	− 0		
90- 99.9	95	174	+ 1		174
100-109.9	105	150	+ 2		300
110-119.9	115	154	+ 3		462
120-129.9	125	7[illegible]	+ 4		288
130-139.9	135	22	+ 5		110
140-149.9	145	6	+ 6		36
150-159.9	155	4	+ 7		28
160-169.9	165	8	+ 8		64
170-179.9	175	4	+ 9		36
180-189.9	185	2	+ 10		20
		1,994		− 2,354	+1,518

கணிப்புகள்

$A = 85¢$

1. Aயினின்று விலக்கக் கூடுதல் (இயல்)
   $-2,354$
   $+1,518$
   -836
2. c-ன் கணிப்பு (பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில்)
   $c = \frac{-836}{1,994} = -\cdot 41926$
3. c-ஐ பழைய அலகுகளில் மாற்றினால்
   பிரிவு இடைவெளி $= 10¢$
   c (மூல அலகுகளில்)
   $= -.41926 \times 10¢$
   $= -4.1926¢$
4. $\bar{X}$-ஐத் தீர்மானித்தல்
   $\bar{X} = A + c$
   $= 85 - 4.1926$
   $= 80.8074¢$

குறுக்கு வழியில் கூட்டுச் சராசரியைக் கணிக்கும் முறையி லுள்ள நிலைகளைச் சுருக்கமாகத் தொகுத்துரைப்போம்.

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை அலைவுப் பரவலாக அமைக்கவும்.

2. பரவலுடைய மையத்துக்கு அண்மையில் உள்ள பிரிவின் மையப் புள்ளியை எதேச்சை மூலமாகத் தேர்ந் தெடுக்கவும்.

3. ஒவ்வொரு பிரிவிலுள்ள விவரங்களும், எதேச்சை மூலத்தி லிருந்து பெறும் விலக்கத்தைப் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் மாற்றி (d') ஒரு பத்தியில் அமைக்கவும். அதாவது, எதேச்சை மூலம் உள்ள பிரிவிலுள்ள விவரங்களுக்கு இந்த விலக்கம் 0 ஆக இருக்கும். அதற்கும் கீழுள்ள பிரிவு விவரங்களுக்கு விலக்கம் -1 ஆகவும், அதற்கும் மேலுள்ள பிரிவு விவரங்களுக்கு விலக்கம் $+1$ ஆகவும் இருக்கும். மற்றவையும் இதைப்போலவே.

4. குறிகளையும் கணக்கில் எடுத்துக்கொண்டு, ஒவ்வொரு பிரிவு விலக்கத்தையும் அதன் அலைவுகளால் பெருக்கவும். இந்தப் பெருக்கலை fd' என்ற பத்தியில் எழுதவும்.

5. fd' என்ற பத்தியில் கண்டவற்றை இயல் கணிப்புக் கூடு தலில் காணவும்.

6. இக் கூடுதலை மொத்த அலைவால் (N) வகுக்கவும். கிடைக் கின்ற ஈவே, (c) பிரிவு இடைவெளி அலகுகளின் திருத்தத்தின் மதிப்பாகும்.

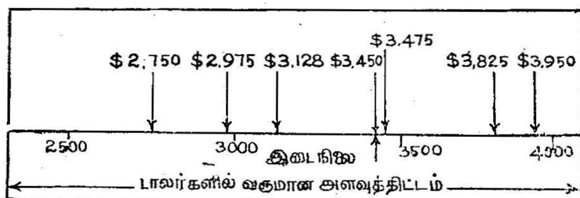
7. இத் திருத்தத்தைப் (c) பிரிவு இடைவெளியால் பெருக் கவும். கிடைக்கின்ற பெருக்குத் தொகைதான் மூல அளவைகளின் திருத்தமாகும்.

8. இத் திருத்தத்தை (இயல் கணிப்பு மதிப்பாக) எதேச்சை மூலத்துடன் (A) கூட்ட, கிடைப்பது சராசரி ($\bar{X}$).

இடைநிலை காணல் (Location of the Median)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை மதிப்பிற்கேற்ப வரிசைப் படுத்தினல், மொத்த விவரங்களில் 50 சதவீதம் மேலேயும், 50 சத வீதம் கீழேயும் அமையுமாறு பிரிக்கின்ற மாறியின் மதிப்பே இடை நிலை ஆகும். அலைவுப் பரவல்கள் பலவற்றிற்கு இது மிகவும் பயனும் சிறப்பும் உடைய மதிப்பு.

தொகுக்கப்படாத விவரங்கள் : தொகுக்கப்படாத விவரங்களை ஆய்வாளர் கையாளும்போது, இடைநிலை காண்பது மிக எளிது. விவரங்களை மதிப்பிற்கேற்ப வரிசைப்படுத்திவிட்டு, மதிப்புகளின் அளவுத் திட்டத்தின் ஒரு முனையிலிருந்து கொடுக்கப்பட்டுள்ள



4.10. படம்.

தொகுக்கப்படாத விவரங்களினின்று இடைநிலை காணும் முறை விளக்கம் (7 நபர்களின் சொந்த வருமானம்).

விவரங்களை இரு சமக்கூறுகளாகப் பிரிக்கின்ற புள்ளிவரையில் எண்ணிக்கொண்டே வரவேண்டும். ஓர் எளிய எடுத்துக்காட்டு, கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஏழு விவரங்கள் ஏழு நபர்களது ஆண்டு வருமானங்களாகும் :

$2,750, $2,975, $3,128 $3,450 $3,475, $3,825, $3,950.

$2,750-லிருந்து $3,950 வரை மதிப்புகளின் அளவைத் திட்டம் அமைத்து, இந்த 7 விவரங்களை வரிசையாகக் குறிக்கிறோம். $3,000 என்ற மதிப்பின் ஒருபுறம் 2 விவரங்களும், மறுபுறம் 5 விவரங்களும் உள்ளன. எனவே, எழுவரில் ஒருவருடைய வருமானமான $3,450 என்ற மதிப்பே இந்த எடுத்துக்காட்டில் இடைநிலை ஆகும். இதன் மதிப்பின் இருபுறமும் மூன்று மதிப்புகள் அமைந்துள்ளன. அல்லது நடு மதிப்பையும் இரு கூருகப் பிரிப்பதாகக் கொண்டால், இப் புள்ளியில் இருபுறமும் $3\frac{1}{2}$ குறிப்புகள் அமையும். இதனை 4.10 படம் விளக்குகிறது. அளவுத் திட்டத்தில் அலைவுகளை இரு கூருகப் பிரிக்கும் புள்ளியே இடைநிலை என்பதைப் படம் தெளிவுபடுத்துகிறது.

இரட்டைப்படையான குறிப்புகள் இருக்கும்போது, முறை சிறிது வேறுபடும். 1947, ஜனவரியில், 38 தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட தொழில்களில் சராசரி மணி ஊதியம்பற்றிய 4-10 பட்டியலில் இதனை எடுத்துக்காட்டாகக் காண்போம்.

பட்டியல் 4-10

தேர்ந்த தொழில்கள் சிலவற்றில் சராசரி மணி ஊதியங்கள், 1947, ஜனவரி.*

தொழில்கள்	மணிக்கு— சென்டுகளில்
உணவு விடுதிகள் (ஆண்டு முழுதும் இயங்குபவை)	64·8
உரங்கள்	81·0
பருத்தி ஆடைத் தயாரிப்புகள், சில்லறை உருப்படிகள் தவிர	91·4
அரைவை ஆலைகள், மரத்துண்டுக் கிடங்குகள் ...	93·6
சில்லறை வாணிபம்	95·1
பக்குவப்படுத்தல், டப்பாக்களில் அடைத்தல் ...	97·5
பட்டு, ரேயான் தயாரிப்புகள்	97·5
காலணிகள்	99·8
சிகரெட்டுகள்	104·1
மனைத் துணைப்பொருள்கள் (furniture)	104·5
சிமென்டு	107·9
வானொலி, ஒலிபதிப்பிக் கருவிகள்	108·4
மாவு	110·1
கடிகாரங்கள், கைக்கடிகாரங்கள்	110·6
காகிதம், கூழ்	112·9
தொலைபேசி	113·3
தோல்	117·4
பெயின்டுகள், வார்னிஷ்கள், கலர்கள்	118·1
மொத்த வாணிபம்	119·7
ஊன் தடிதல், பக்குவம் செய்தல்	120·3
அலுமினியப் பொருள்கள்	121·3
நெசவுத் தயாரிப்புகள்	122·7
மின் சாதனங்கள்	123·2
பொறிகள், பொறி உபரிச் சாதனங்கள்	126·2
குளிர்பதனப் பெட்டி, குளிர்பதனச் சாதனங்கள் ...	126·7
எஃகு வார்ப்புகள்	129·8
இயந்திரக் கருவிகள்	132·6
உருக்காலை, எஃகுத் தொழில்கள், உருள் (rolling) ஆலைகள்	133·3
வானவூர்திப் பொறிகள்	135·8
இயந்திரங்கள், சுழலிகள் (turbines)	136·8
தானியங்கிகள் (கார்கள்)	138·9
நீராவி இயந்திரங்கள்	139·7
கப்பல் கட்டுதல், படகு கட்டுதல்	142·1
இரும்பு, எஃகு உலைகள்	143·0
பெட்ரோலிய சுத்திகரிப்பு	146·3
நிலக்கரி சார்ந்த கரிச்சுரங்கங்கள்	149·0
செய்தித்தாள்கள், இதழ்கள்	157·2
அந்திரசைட் சார்ந்த கரிச்சுரங்கங்கள்	158·9

* *1947*, ஏப்ரல் Monthly Labour Review விலிருந்து......

இந்த எடுத்துக்காட்டில் ஒவ்வொரு பக்கமும் 19 தொழில்கள் அமையுமாறு இடையில் அமையவேண்டிய மதிப்பே இடைநிலை. ஆகையால், 119·7 சென்டுகளைவிட (மொத்த வியாபாரத்தில் சராசரி வருமானம்) கூடுதலாகவும், 120·3 சென்டுகளைவிடக் (கசாப்பு தொழில் சராசரி வருமானம்) குறைவாகவுமுள்ள எந்த மதிப்பும் இடைநிலையின் இலக்கணத்துக்கு இணங்குகிறது. இதுபோன்று இடைநிலையானது இரு மதிப்புகளுக்கு இடைப்பட்டுத் தீர்வுகாண முடியாது அமைகின்ற சமயங்களில், இரு மதிப்புகளின் நடுமதிப்பை இடைநிலை என ஏற்பது மரபு. எனவே, இந்த 38 மதிப்புகளின் இடைநிலை 120·0 சென்டுகளாகும்.

தொகுக்கப்பட்ட விவரங்கள் : விவரங்கள் அலைவுப் பரவலாக இருக்கும்போதும், இடைநிலை காணும் முறை ஏறக்குறைய முன் போன்றதுதான். தனிக் குறிப்புகளின் மதிப்புகள் பிரிவு இடைவெளிகளில் அடைந்து வெளிப்படையாகத் தெரியாமலிருப்பதால், இக்கணிப்பு சற்றுச் சிக்கலுடையது. 4-11 பட்டியலில் கண்ட குடும்ப வருமானங்களின் பரவலைப் பயன்படுத்தி இச் செயல்முறையை விளக்குவோம்.

பட்டியல் 4-11

***1947-ல் மாத வருமானத்துக்கேற்ப குடும்பங்களின் பரவல்**

வருமானப் பிரிவு	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை (ஆயிரங்களில்)
$ 500க்குக் கீழ்	1,640
$ 500 விருந்து $ 999	2,386
1,000 விருந்து 1,499	2,908
1,500 விருந்து 1,999	3,280
2,000 விருந்து 2,499	4,213
2,500 விருந்து 2,999	3,989
3,000 விருந்து 3,499	4,213
3,500 விருந்து 3,999	3,131
4,000 விருந்து 4,499	2 572
4,500 விருந்து 4,999	1,752
5,000 விருந்து 5,999	2,870
6,000 விருந்து 9,999	3,318
10,000க்கும் மேல்	1,007
மொத்தம்	37,279

$$\frac{N}{2} = \frac{37,279}{2} = 18,639.5$$

$$Md = \$3,000 + \left(\frac{223.5}{4,213} \times \$500\right)$$
$$= \$3,000 + \$27$$
$$= \$3,027$$

* யூ.எஸ். பீரோ ஆஃப் சென்சஸ். நடப்பு மக்கள்தொகை விவரங்கள் : Consumer Income, Series P-60, No. 5, Feb. 7, 1949. சென்சஸ் வெளியீட்டில் தரப்பட்ட சதவீதப் பரவலிலிருந்து இப் பட்டியல் உருவாக்கப்பட்டது.

இவ்வுதாரணம் மிகவும் சிறப்பானது. இதில் கூட்டுச் சராசரியைக் கணிக்கமுடியாது. ஆனால், இடைநிலையைத் திருத்தமாகக் காணமுடியும். அளவு மட்டத்தின் அடியிலிருந்து துவங்கி அடுத்தடுத்த பிரிவுகளைத் தாண்டி மேல்நோக்கிச் செல்வதாக வைத்துக் கொள்வோம். முதல் பிரிவின் மேலெல்லையை (அதாவது 0-லிருந்து, $500 வரையுள்ள மதிப்புகளைத் தாண்டி) அடைந்தால், 1,640 குறிப்புகளை நாம் கடந்தவர்களாவோம். 35,639 குறிப்புகளை எதிர் நோக்கியிருப்போம் (எண்ணும் அலகு 1,000 குடும்பங்களாகும்). இதுபோல இரண்டாவது பிரிவின் மேலெல்லையை அடையும்போது, 4,026 குறிப்புகளைக் கடந்திருப்போம். ஆறும் பிரிவின் மேலெல்லைக்குக் கீழே 18,416 குறிப்புகளும், ஏழாம் பிரிவின் மேலெல்லைக்குக் கீழே 22,629 குறிப்புகளுமிருக்கும். எனவே, ஏழாவது பிரிவின் மேல், கீழ் எல்லைகளுக்கிடையே எங்கேயோ நமக்குத் தேவைப்படும் இடைநிலைப் புள்ளி இருக்கிறது. அதன் இருபுறத்திலும் 18,639·5 குறிப்புகள் இருக்கவேண்டும். $3,000-லிருந்து $3,500 வரையான இப் பிரிவில் எவ்வளவு தூரம் தள்ளி வந்தால் இந்தப் புள்ளியை அடைய முடியும் ?

ஒவ்வொரு பிரிவிலும் விவரங்கள் ஒரே சீராக அமைந்துள்ளன என்ற தற்புனைவை இந்தக் கணிப்பின்போது நினைவுகூரவேண்டும். ஏழாவது பிரிவினை அடையும்வரை 18,416 குறிப்புகள் எண்ணப்பட்டுள்ளன; இன்னும் இவ் வகுப்பிலுள்ள 4,213-ல் நமக்குத் தேவையானது 223·5 தான். இதனைச் சேர்த்துவிட்டால், 18,639·5 கிடைத்துவிடும். ஒரே சீராகப் பரவல் அமைந்துள்ளது என்ற அடிப்படையில், பிரிவு இடைவெளியாக அளவுத் திட்டத்தில் $\frac{223 \cdot 5}{4213}$ பங்கு தூரம்வரை எடுத்துக்கொண்டால்தான், மேற்கொண்டு 223·5 குறிப்புகள் அடங்கும். வகுப்பு இடைவெளி $500; $500-ல் $\frac{223.5}{4213}$ பங்கு $27 ஆகும். இந்த அளவுத் திட்டத்தின் வழியே ஏற்கெனவே நகர்ந்த $3,000 தூரத்துக்கு மேற்கொண்டு $27 அளவுத் தூரத்தைக் கடக்கிறோம். எனவே, அளவு மட்டத்தில் 3,027 என்ற மதிப்பை உடைய புள்ளியே, 18,639·5 மதிப்புகள் இருபுறமும் ஒதுங்குமாறு பிரிக்கிறது. இதுவே இடைநிலையின் மதிப்பு ஆகும்.

இது கணிக்கப்படும் முறை அலைவுப் பட்டியலின் வலப்புறம் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. இடைநிலையைக் காண்பதில் பயனாகும் நிலைகளைத் தொகுத்து வரைவோம்.

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை அலைவுப் பரவலாக அமைக்கவும்.

2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள குறிப்புகளின் மொத்தத்தை இரண்டால் வகுக்கவும். அதன்மூலம் காணப்படவேண்டிய, இரு புறத்திலும் எத்தனை மதிப்புகள் அமையவேண்டுமென்ற எண்ணிக்கை தெரியவரும்.

3. அளவுத் திட்டத்தின் அடியிலிருந்து துவங்கி, தொடர்ந்து வரும் பிரிவுகளுக்கு அலைவுகளை மேலும்மேலும் கூட்டிச் செல்க. இடைநிலை மதிப்பை உள்ளடக்கிய பிரிவின் கீழெல்லை வரும் வரையில், இதுபோலச் செய்யவும்.

4. $N/2$ என்ற மதிப்பைப் பெறுவதற்கு முன்னரே கூட்டிவந்த அலைவுகளுடன், மேலும் எத்தனை சேர்க்கவேண்டும் என்று கண்டுபிடிக்கவும்.

5. இவ்வாறு தேவைப்பட்ட கூடுதலான எண்ணை இடைநிலை வகுப்பில் அடங்கும் மதிப்புகளால் வகுக்கவும். இந்தப் பின்னம், பிரிவு இடைவெளியின் எந்தப் பின்னத்துக்குள், தேவையான மேற்கொண்ட விவரங்கள் உள்ளடங்கும் என்பதைக் குறிக்கும்.

6. இதுபோன்று கண்ட பின்னத்தைப் பிரிவு இடைவெளியால் பெருக்கவும்.

7. இடைநிலையைக் கொண்ட இடைவெளியின் கீழ்வரம்போடு, 6ஆம் நிலை மூலம் கிடைத்த பெருக்கல் தொகையைச் சேர்க்கவும். இது இடைநிலையின் மதிப்பைக் காட்டும்.

கடைசி மூன்று வழிகளும் இடைவைத்தல் (interpolation) முறையின் ஓர் எளிய விளக்கம் ஆகும்.

இதே முறையை அளவுத் திட்டத்தின் உச்ச வரம்பிலிருந்து துவங்கித் தலைகீழே கீழ்நோக்கி வந்தும் கையாளலாம்.

இப்படிச் செய்யும்போது, இடைநிலை அமைகின்ற இடைவெளியின் உச்ச வரம்பிலிருந்து கழித்து முடிவுகாணவேண்டியிருக்கும்.

$N/2$ முழு எண்ணுகவோ, எடுத்துக்காட்டில் வருவதுபோன்ற பின்னமாகவோ இருக்கலாம். எப்படி யிருந்தாலும், முறை ஒன்றுதான்.

முகடு காணல் (Location of the Mode)

அலைவு வளைகோட்டில் உச்ச குத்தாயத்திற்கு ஏற்ற x மதிப்பே முகடு ஆகும். முகட்டு மதிப்பின் தத்துவத்தைப் புரிந்துகொள்வது

எளிது. மிகவும் பொதுப்படையான (most common) கூலி, மிகவும் பொதுப்படையான உயரம் இக் கோட்பாடுகள் யாவும் முகட்டு மதிப்புகளால் அமைந்தவற்றைக் குறித்தனவே. ஃபெச்னர் (Fechner) என்பார் இதற்குப் பயன்படுத்திய சொல்லான 'அடர்த்தியான மதிப்பு' (*dichtester wert*) என்ற சொல் மிகவும் பொருத்தமாக இந்தப் பண்பினை—இப் புள்ளியில் செறிவு உச்சமாவதை—நன்கு விளக்குகிறது. ஆனால், கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக்கொண்டு உண்மை முகட்டைக் கண்டுபிடிப்பது எளிதன்று. பொதுவாகப் புள்ளிவிவர ஆய்வுகளில், முகட்டிற்குக் காட்டிய மதிப்பினையே காணமுடிகிறது.

முகட்டின் மதிப்பைத் தோராயமாகத் தீர்மானிக்கும் முறையை, பட்டியல் 4–12-லுள்ள பரவலின்மூலம் விளக்கலாம்.

பட்டியல் 4–12

5% பத்திரங்களின் அலைவுப் பரவல் (1948ஆம் ஆண்டு, டிசம்பர், 31ஆம் தேதி நியூயார்க்கு பங்கு மார்க்கெட்டு கூப்பன் விலைவீதம் 5 சதவீதமுடைய உள்நாட்டுப் பத்திரங்கள் பற்றித் தந்த மதிப்புக் குறிப்புகளை (quotations) அடிப்படையாகக் கொண்டது இப் பட்டியல்.*

குறிக்கப்பட்ட விலை பிரிவு இடைவெளி	நடுப்புள்ளி X	அலைவு f
80-க்கும் கீழே		11
80- 89.9	85	7
90- 99.9	95	14
100-109.9	105	29
110-119.9	115	7
120-129.9	125	3
130-ம், அதற்கு மேலும்		2
		73

* *தவணை தவறியவை, திவாலானவை, வழக்கு குறித்து மேற்பார்வையில் உள்ளவை ஆகிய கார்ப்பரேஷன் பத்திரங்கள் தவிர்க்கப்பட்டன.*

80-க்குக்கீழ் 11 குறிப்புகள் மிகவும் சிதறலாக உள்ளன. இது 'திறந்த பிரிவாக' இருப்பதாலும், அளவுத் திட்டத்தின் மேல் முனையும் இதே மாதிரித் திறந்த பிரிவாக இருப்பதாலும், இப்

பட்டியலில் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்பது இயலாததாகிறது. இங்கே முகட்டைக் காண்பதே பொருத்தமானது.

100-லிருந்து 109·9 வரை எல்லைகளையுடைய பிரிவில்தான் குறிப்புகள் எண்ணிக்கையில் அதிகம். எனவே, இதுதான் முகட்டுப் பிரிவாக இருக்கவேண்டும். இதன் மையப் புள்ளியான 105 ஐ இப்போதைக்கு முகட்டின் தட்டிய மதிப்பாக எடுத்துக்கொள்ளலாம். ஆனால், வெவ்வேறு வகையான பாகுபாடுகளை மேற்கொள்ளும்போது, வெவ்வேறு முகட்டு மதிப்புகள் கிடைக்கும். வெவ்வேறான பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்டு கொடுக்கப்பட்டுள்ள பத்திர மதிப்புகளைப் பாகுபாடு செய்தால், 4-13 பட்டியலில் கண்டபடி முடிவுகள் கிடைக்கும்.

பட்டியல் 4–13

வேறுபட்ட பிரிவு அளவுகள்

5 சதவீதப் பத்திரங்களின் பரவல்

(a)		(b)		(c)		(d)	
பிரிவு இ.வெ. = 5		பிரிவு இ.வெ. = 5		பிரிவு இ.வெ. = 2·5		பிரிவு இ.வெ. = 1	
பிரிவு இ.வெ.	f	பிரிவு இ.வெ.	f	பிரிவு இ.வெ.	f	பிரிவு இ.வெ.	f
85- 89.9	4	82.5- 87.4	4	97.5- 99.9	5	100-100.9	3
90- 94.9	7	87.5- 92.4	3	100.0-102.4	9	101-101.9	5
95- 99.9	7	92.5- 97.4	7	102.5-104.9	8	102 102.9	2
100-104.9	17	97.5-102.4	14	105.0-107.4	8	103-103.9	5
105-109.9	12	102.5-107.4	16	107.5-109.9	4	104-104.9	2
110-114.9	3	107.5-112.4	7	110.0-112.4	3	105-105.9	3
						106-106.9	5
						107-107.9	4

(மையப் பிரிவுகளின் அளவுகளே தரப்பட்டுள்ளன; முழுப் பட்டியலையும் இந்தக் கணிப்புக்குத் தரவேண்டிய தேவை இல்லை.) பிரிவு இடைவெளி 5 எனக் கொண்டால், 102·5 முகடாகக் கிடைக்கிறது. ஆனால், அதே 5 என்ற பிரிவு இடைவெளிகொண்டு பிரிவு வரம்புகளை மாற்றும்போது 101·25 என்ற மதிப்பு முகடாகக் கிடைக்கிறது. 2·5 என்ற பிரிவு இடைவெளிக்கு 101·23 என்ற மதிப்பு கிடைக்கிறது. இறுதியாக 1 என்ற பிரிவு இடைவெளிக்கு 101·5, 103·5, 106.5 என்ற மூன்று வேறுபட்ட முகடுகள் கிடைக்கின்றன. இதுபோல இன்னும் வேறு வகையான பாகுபாடுகளுக்கு இன்னும் வேறுவேறு

முகட்டு மதிப்புகள் கிடைக்கும். எனவே, முகடானது மாறு படும் தன்மையுடைய புதிரான சராசரியாகத் தோன்றுகிறது. பிரிவு இடைவெளிகளின் அளவுக்கு ஏற்பவும், பிரிவு எல்லைகளின் இட அமைப்புக்கு ஏற்பவும் அதன் மதிப்பு மாறுபடும் எனத் தோன்று கிறது.

ஆராயப்படுகின்ற மாதிரி அளவில் சிறியதாக இருப்பதே இக் குறைபாடுகளுக்குக் காரணமாகும். வரம்பற்ற தன்மையுடைய மிகப் பெரிய மாதிரி ஒன்றிருக்குமாயின், அதில் மிகுந்த தடவை காணப்படும் மதிப்பே உண்மையான முகடு. இதனைச் சரிவரக் கண்டு பிடிக்க வேண்டுமானால், மாதிரியின் அளவை மிக அதிகமாக உயர்த்தி, குறிப்புகளை அதிகரிக்கவேண்டும். போதிய அளவு குறிப்புகள் தரப்பட்டால், பிரிவு இடைவெளி குறைய, முகட்டின் கிட்டிய மதிப்பு உண்மையான மதிப்பினை நெருங்குகிறது. பிரிவு இடைவெளி பெரி தாகும்போது, விவரங்களின் தெளிவு குன்றும். எதிர்மாறாக, பிரிவு கள் குறையும்போது, தெளிவு மிகுந்து பரவலின் உண்மை அமைப்பு புலனாகிறது. ஆனால், பெரும்பாலான ஆய்வுப் பணிகள் சிறிய மாதிரி களைக்கொண்டே நடைபெறுவதால், பிரிவுகள் அதிகமாகும்போது பிரிவுகளில் இடையீடுகளும் ஒழுங்கின்மையும் மலிகின்றன; சமச்சீர் மிகவும் கெட்டு, எப் புள்ளியில் அதிகபட்ச அடர்த்தி இருக்கிறதென்ற ஐயப்பாடும் தோன்றிவிடுகிறது. பத்திர மதிப்புகளின் பல்வேறு பட்டியல் அமைப்புகளே இதனை நன்கு எடுத்துக்காட்டி விளக்கும்.

எண்ணற்ற மதிப்புகள் இல்லாமலேயே கணித முறைகளைக் கையாண்டு முகட்டின் உண்மையான மதிப்பைக் கண்டுபிடித்துவிட லாம். இழைக்கும் முறைபற்றி முன்னரே சுருக்கமாகக் கூறப்பட்டது. கொடுக்கப்பட்ட அலைவுப் பரவலுக்குப் பொருத்தமான விழுமிய (ideal) அலைவு வளைகோட்டைப் பொருத்துவது இழைக்கும் முறைகளில் ஒன்றாகும். கருதுகோள்படி இதன்மூலம் கிடைக்கும் பரவல், முதலில் குறிப்பிட்ட செயல்முறைப்படி கிடைப்பதாகும். அதாவது, பிரிவு இடைவெளியை நுண்ணிதாகக் குறைத்து, குறிப்புகளை வரம் பிலாது அதிகரித்து, உருவாக்கப்படும் பரவலே இது. இதுபோன்று விழுமியதாகப் பொருத்தப்பட்ட வளைகோட்டின் உச்ச குத்தாயத்திற்கு இசைந்த x மாறியின் மதிப்புதான் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட முகடாகும்.[8]

சாதாரணத் தேவைகளுக்கு முகட்டின் தோராய மதிப்புகளே போதுமானவை. இவற்றை எளிய முறைகளில் பெறமுடியும். முதலில்

[8] உண்மை முகட்டுக்குத் தோராயம் காணும் முறை 6ஆம் அத்தியாயத்தில் விவாதிக்கப்பட்டுள்ளது.

முன் குறிப்பிட்டபடி உச்ச அலைவுள்ள பிரிவின் நடுமதிப்பையே முகடு என மிகவும் தோராயமாக எடுத்துக்கொள்ளலாம். முன் ஒரு பகுதியில் பாகுபாடு செய்வதற்கெனக் குறிக்கப்பட்ட பொது விதிகளைப் பின்பற்றியிருந்தால், இவ்விதமாக எடுத்துக்கொண்ட முறையில் பொதுவாக அதிகப் பிழை இருக்காது.

ஓர் ஒழுங்கான பரவல் தரப்பட்டிருந்தால், முகட்டுப் பிரிவின் மையத்தினை முகடாக ஏற்றுக்கொள்வதைவிட இடைவைப்பு முறை மூலம், மேலும் திருத்தமாக முகட்டினை அறியமுடியும். 4-12 பட்டிய லில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பத்திர விலைகளின் பட்டியலை மறுபடியும் கவனித்தால், பரவல் இருபுறமும் சமச்சீராக இல்லை என்பது தெரிய வரும். 105-ஐ மைய மதிப்பாகக் கொண்ட பிரிவே முகட்டுப் பிரிவு ஆகும். அதனை அடுத்துள்ள கீழ்ப்பிரிவு 95-ஐ மைய மதிப்பாகக் கொண்டது; 14 குறிப்புகள் உடையது. அதனை அடுத்த மேல்பிரிவு, 115-ஐ மைய மதிப்பாகக் கொண்டது; 7 குறிப்புகள் உடையது. இச் சதவீத பின்னம் (disproportion) வருகின்ற பிரிவுகளிலும் காணப்படுகிறது. முகட்டுப் பிரிவுக்கு மேலுள்ள பிரிவுகளைவிடக் கீழுள்ள பிரிவுகளில் குறிப்புகள் அடர்த்தியாகக் காணப்படுகின்றன. பிற சமயங்களில் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் மேல்கீழ் எல்லைகளுக்கிடையே குறிப்புகள் ஒரே சீராகப் பரவியுள்ளன என்று புனைந்துகொண் டோம். ஆனால், தற்சமயம் முகட்டுப் பிரிவுக்குக் கருத்து பொருத்த முடையதாகத் தெரியவில்லை. இப் பிரிவின் புறத்தேயுள்ள பரவலின் தன்மையை ஆராயும்போது, பிரிவு இடைவெளியின் மேல்பாதியைவிடக் கீழ்ப்பாதியில்—அதாவது 100-லிருந்து 105-க்குள்—அதிக அடர்த்தி இருப்பதாகத் தோன்றுகிறது. எனவே, முகடு மையப் புள்ளியான 105 என்ற புள்ளியிலேயே அமையாது, அதற்கும் கீழே இருப்பதாகத் தோன்றுகிறது. அளவுத் திட்டத்தின் அடிமுனையில் 14 என்ற பளு வும் (அதற்கும் கீழுள்ள பிரிவின் அலைவு), மேல்முனையில் 7 என்ற பளுவும் (அதற்கும் மேலுள்ள பிரிவின் அலைவு) கொண்டு நிறையிட்டு முகட்டை இடங்காணலாம். பின் குறிப்பிட்ட குறியீடுகளைக் கையாண்டு ஒரு வாய்பாடுமூலம் இதனைத் தருவோம்:

$l=$ முகட்டுப் பிரிவின் கீழெல்லை.

$f_1=$ முகட்டுப் பிரிவுக்கு அடுத்துக் கீழுள்ள பிரிவின் அலைவு மதிப்பு.

$f_2=$ முகட்டுப் பிரிவுக்கு அடுத்து மேலுள்ள பிரிவின் அலைவு மதிப்பு.

$h=$ பிரிவு இடைவெளி.

இடைவைப்பு வாய்பாடு (interpolation formula)

$$Mo = l + \left(\frac{f_2}{f_1+f_2} \times h\right) \qquad (4.7)$$

எனவரும் பட்டியல் 4-12-ல் இவ் வாய்பாட்டைக் கையாண்டு

$$Mo = 100 + \left(\frac{7}{21} \times 10\right) = 100 + 3.33 = 103.33$$

என்று பெறுவோம். சிலவேளைகளில் இன்னும் திருத்தமான மதிப்பைப் பெறுவதற்காக முகட்டுப் பிரிவினை அடுத்த இரண்டு அல்லது மூன்று மேல், கீழ் பிரிவுகளின் அலைவுக் கூடுதலை (இவற்றை f_1, f_2 எனக் குறிப்போம்) பளுவாகக் கொண்டு முகட்டினைக் கணக்கிடுவது உண்டு. இந்த எடுத்துக்காட்டில் முகட்டுக்கு இருபுறமும் இரு பிரிவுகளை எடுத்துக்கொண்டு கணக்கிட்டால், பத்திர விலைகளின் முகடாக 103.23 என்ற மதிப்பு கிடைக்கும்.

மேற்கண்ட விளக்கத்தில் குறிப்புகளின் செறிவு ஒரே புள்ளியில் இருப்பதாகக் காண்போம். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட புள்ளியில் குறிப்புகள் செறிந்து இருக்கும்போது முகட்டைக் கணிப்பது மேலும் சிக்கலாக இருக்கும். இத்தகைய பரவல் இருபடி முகடு (Bi-modal) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இதனை வரைபடமாக அமைக்கையில் இரண்டு உச்சங்களையுடைய அலைவு வளைகோடு கிடைக்கும். விவரங்கள் ஒரேபடித்தாக (homogeneous) இருக்கும்போது, இத்தகைய பரவல் கிடைத்தால், விவரங்களின் பற்றாக்குறையும் பாகுபாடு முறைகளும் இதற்குக் காரணமாக இருக்கவேண்டும். மாதிரியில் அடங்கும் விவரங்களை நோக்கிப் பிரிவுகள் மிகச் சிறியதாக இருந்திருக்கலாம். இத்தகைய சமயங்களில், திட்டவட்டமான முகட்டு வகுப்புகள் கிடைக்கும்வரையில் பிரிவு எல்லைகளை நகர்த்தியும் பிரிவு இடைவெளியைப் பெரிதாக்கியும், ஒரே முகட்டு அமைப்பு கிடைக்கும்வரை மாற்றங்கள் செய்துகொண்டே போனால் இறுதியில் தோராயமாக முகட்டைத் தீர்மானிக்கலாம். குறிப்புகள் எண்ணிலியாக (infinite) இருக்கும்போது உண்மை முகட்டைக் கண்டுபிடிக்கக் கையாளும் முறைக்கு எதிர்மாறான முறை இது. மாதிரி சிறியதாக இருக்கும்போது அதனால் விளையக்கூடிய சீர்குறைவுக்கு ஈடுசெய்யவேண்டுமானால், பிரிவு இடைவெளியின் அளவை விரிவுபடுத்தித்தான் குறிப்புகளின் அடர்த்தி எங்கு அதிகமாக இருக்கிறதோ அந்தப் புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்க முடியும்.

பிரிவு இடைவெளி, பிரிவு வரம்புகள் ஆகியவற்றை மாற்றிய பின்னருங்கூட பரவல் இரு முகடுடையதாக இருக்குமானால், மாறுபட்ட பல சக்திகளின் ஆற்றல்களுக்கு விவரங்கள் ஆட்படுவது

காரணமாக இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, அந்திரசைட் (anthracite) கரிச் சுரங்கத் தொழிலாளர்களின் மாதிரி ஒன்றின் மணி ஊதியத்தோடு, ஹோட்டல் தொழிலாளர்கள் மாதிரி ஒன்றின் மணி ஊதியத்தை இணைத்து ஒரு பரவலை உண்டாக்கினால், அக் கூட்டுப் பரவலில் இரண்டு முகட்டுப் புள்ளிகளை எதிர்பார்க்கலாம் (பக்கம் 123, பட்டியல் 4--10-ல் சராசரிகளைப் பார்க்கவும்). பல வேறுபட்ட தொகுதிகளின் குறிப்புகளைக் கலந்ததாக ஓர் அலைவுப் பரவல் இருந்தால் அதில் ஏதும் சிறப்பு கிடையாது.

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்தும், இடைநிலையிலிருந்தும் முகட்டு மதிப்பைக் கண்டுபிடித்தல் : முகட்டுக்குக் கிட்டிய மதிப்பு ஒன்றைக் கண்டுபிடிக்க மற்றொரு வழி யிருக்கிறது. கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றை இணைக்கும் ஒரு வாய்பாடு, சில சமயங்களில் முகட்டுக்கு மதிப்பு காணப் பயனாகும். முற்றிலும் சமச்சீரான பரவலில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு மூன்றும் இணைந்திருக்கும். பரவலில் சமச்சீர் குறையக் குறைய அளவுத் திட்டத்தில் இவை மூன்றும் பிரிந்து விலகும். சமச்சீர் ஓரளவே குன்றியிருக்கும் போது, இம் மூன்று புள்ளிகளுக்கு இடையேயும் ஓரளவு மாறாத உறவு இருக்கிறது. அதாவது இடைநிலைக்கும் கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள தூரம் இடைநிலைக்கும் முகட்டுக்குமுள்ள தூரத்தில் மூன்றில் ஒரு பங்காக இருக்குமாறு, கூட்டுச் சராசரியும் முகடும் இடைநிலைக்கு இருபுறங்களிலும் அமைகிறது. (சமச் சீரின்மை மிகுந்து காணப்பட்டால் இந்த உறவு சரியாக இருக்காது.) ஓரளவு சமச்சீருடைய அலைவுப் பரவலில் மேற்கண்ட மூன்று சராசரிகளில் இரண்டு தெரிந்தால் மூன்றாவதைத் தோராயமாக மதிப்பிடலாம். பார்க்கப்போனால், முகடு கண்டுபிடிக்கவே இந்த உறவினைப் பயன்படுத்த வேண்டும். ஏனெனில், மற்ற இரண்டு சராசரிகளையும் பிறவழிகளில் சரிவரக் கணித்துவிட முடியும். இந்த உறவினால் முகட்டின் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கும்போதுகூட, மேலும் திருத்தமாகக் கண்டுபிடிக்கப் பிற முறைகள் பயன்படாது என்ற நிலையில்தான் இந்த உறவினைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

மேற்சொன்ன தொடர்பை வெளியிடும் வாய்பாடு பின்வருமாறு :

$$Mo = \text{Mean} - 3\,(\text{Mean} - Md) \qquad (4.8)$$

3-10 பட்டியலில் கண்ட டெலிபோன் கம்பங்கள்பற்றிய விவரங்களுக்கு இவ் வாய்பாட்டின்மூலம், முகட்டுக்குப் பின்வரும் விடை கிடைக்கும் :

$$Mo = 9.33 - 3\ (9.33 - 9.015) = 8.385.$$

முகட்டின் மதிப்பு, வகுப்பின் நடு மதிப்பான 8·5-க்கு சற்றுக் குறைவாக இருக்கிறது. (ஒவ்வொரு பக்கமும் 4 வகுப்புகளை எடுத்துக்

கொண்டு) நிறையிட்டுக் கண்ட மதிப்பான 8·49-க்கும் குறைவாகவே இம் மதிப்பு இருக்கிறது.

சில சமயங்களில்—குறிப்பாக அளவுகளுக்குப் பதிலாக வீதமும் விகிதாசாரமும், பயனுகும் சமயங்களில்—மேற்கூறிய சராசரிகள் யாவும் பயனற்றுப் போய்விடுகின்றன. அத்தகைய சமயங்களில் பெருக்குச் சராசரியும் ஹார்மானிக் சராசரியும் பொருத்தமுடைய தாக அமைந்து விளக்குகின்றன.

பெருக்குச் சராசரி

n அளவைகளைப் பெருக்கி, அதன் n படி மூலம் (nth root) கண்டால் அதுவே பெருக்குச் சராசரி. அதன் மதிப்புப் பின் வருமாறு :

$$M_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdot \cdot a_n} \qquad (4{\cdot}9)$$

$$M_g = \sqrt[3]{2 \times 4 \times 8}$$

$$= \sqrt[3]{64}$$

$$= 4$$

மேற்கூறிய அளவுகளில் ஏதேனும் ஒன்று 0 ஆக இருக்குமாணுல் பெருக்குச் சராசரியும் 0 ஆக இருக்கும் என்பது வெளிப் படை.

லாகிருதங்களைப் பயன்படுத்தினுல் பெருக்குச் சராசரி காண்பது எளிதாகும். இம்முறையில்,

$$\text{Log } M_g = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \ldots + \log a_n}{N} \qquad (4.10)$$

பெருக்குச் சராசரியின் லாகிருதம், தனி அளவுகளின் லாகிருதங்களின் கூட்டுச் சராசரி ஆகும்.

அளவைகளுக்கு நிறை தந்து பெருக்குச் சராசரி காணவேண்டுமாயின், அந்த நிறைகளை அந்தந்த அளவைகளுக்குப் படிகளாக (exponents) அமைக்கவேண்டும். $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n$ ஆகியவை உறுப்புகள். $w_1, w_2, w_3 \ldots . w_n$ அவற்ருேடு இயைந்த நிறைகள். நிறைகளின் கூடுதல் N. பெருக்குச் சராசரி வாய்பாடு

$$M_g = \sqrt[N]{a_1^{w_1} \cdot a_2^{w_2} \cdot a_3^{w_3} \ldots a_n^{w_n}} \qquad (4.11)$$

என வரும். இது ஒவ்வோர் உறுப்பையும் அதன் நிறை எந்த எண்ணே அத்தனை தடவை எடுத்துக்கொள்வதற்குச் சமமாகும்.

(நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி காணும்போதும் நாம் செய்வது இது தான்).

லாகிருதங்களைப் பயன்படுத்துகையில் நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரியின் வாய்பாடு இது,

$$\text{Log } M_g = \frac{w_1 \log a_1 + w_2 \log a_2 + w_3 \log a_3 + \ldots + w_n \log a_n}{N} \quad (4.12)$$

பெருக்குச் சராசரியைக் கணிக்கும் முறை 4-14 பட்டியலில், ஈவு வீதத்தில் 58 முன்னுரிமைப் பங்கு (preferred stock prices) விலைகளின் பரவல் விளக்கப்பட்டிருக்கிறது.

பட்டியல் 4–14

முன்னுரிமைப் பங்கு விலைகளிலிருந்து பெருக்குச் சராசரி

பிரிவு இடைவெளி	X	f	$\log X$	$f \log X$
\$ 20-\$ 39.9	30	3	1.47712	4.43136
40- 59.9	50	5	1.69897	8.49485
60- 79.9	70	10	1.84510	18.45100
80- 99.9	90	18	1·95424	35.17632
100- 119.9	110	19	2.04139	38.78641
120- 139.9	130	3	2.11394	6.34182
		58		111.68176

$$\text{Log } M_g = \frac{111.68176}{58} = 1.92555$$

$$M_g = \$\ 84{\cdot}25$$

இப் பட்டியலினுல் 1948 டிசம்பர் 31, நியூயார்க் ஸ்டாக் எக்ஸ்சேஞ்ச் (New York Stock Exchange), நியூயார்க் கர்ப் எக்ஸ்சேஞ்ச் (New York Curb Exchange) ஆகியவற்றின் இறுதி விலைகளின் அடிப்படை தயாரிக்கப்பட்டது.

பெருக்குச் சராசரியின் பண்புகள்: எந்த உறுப்புகளுக்குப் பெருக்குச் சராசரி பிரதிநிதியாக விளங்குகிறதோ அவற்ருேடு அது கொண்டுள்ள தொடர்பினுல் அதன் பண்புகளை அறிந்துகொள்ளலாம்.

ஒரு தொடரில் அமைந்த ஒவ்வோர் எண்ணுக்கும் பதிலாக, அவற்றின் கூட்டுச் சராசரியினை எடுத்துக்கொண்டால் கூடுதல் தொகை வேறுபடுவதில்லை. 2, 4, 8 ஆகிய எண்களின் கூடுதல் 14. இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி $4\frac{2}{3}$. மூன்று எண்களுக்கும் பதிலாக இதே எண்ணைப் பயன்படுத்தினுல் கூடுதலாகக் கிடைப்பதும் 14 தான். அதேபோல, ஒவ்வோர் எண்ணுக்கும் பதிலாக அவற்றின் பெருக்குச் சராசரியைப் பயன்படுத்தினுல் பெருக்குத் தொகை

வேறுபடுவதில்லை என்பது பெருக்குச் சராசரியின் பண்பாகும். சான்ருக, 2, 4, 8 ஆகியவற்றின் பெருக்குத்தொகை 64. இம்மூன்று எண்களின் பெருக்குச் சராசரி 4. எனவே இந்த மூன்று அளவைகளுக்கும் பதிலாக இதனையே கையாண்டாலும், பெருக்கிக் கிடைக்கின்ற தொகை 64 ஆகவே இருக்கிறது.

கூட்டுச் சராசரிக்கு மேலுள்ள எண்களின் விலக்கங்களின் கூடுதல் (குறிப்புகளைப் புறக்கணித்து விட்டால்), கீழுள்ள எண்களின் விலக்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமமாக இருக்கிறது.

பெருக்குச் சராசரியினைவிட மிகுந்த குறிப்புகளுக்கும் பெருக்குச் சராசரிக்குமுள்ள விகிதங்களின் பெருக்குத்தொகையானது, பெருக்குச் சராசரிக்குள்ள விகிதங்களின் பெருக்குத் தொகைக்கு மதிப்பில் சமமாக இருக்கும். 3, 6, 8, 9 ஆகிய எண்களின் பெருக்குச் சராசரி 6; எனவே பின்வரும் சமன்பாடு கிடைக்கும்:

$$\frac{6}{3} \times \frac{6}{6} = \frac{8}{6} \times \frac{9}{6}$$

கடைசி எடுத்துக்காட்டு, பெருக்குச் சராசரியின் மிகவும் முக்கியமான பண்பை வெளியிடுகிறது. இது விகிதங்களைச் சராசரி செய்யும் முறைபற்றியது. விலைகளின் குறியீட்டு எண்களைக் கணக்கிடுகையில் விலை வீதங்களின் மாற்றத்தைக் குறித்தே நாம் அக்கறை காட்டுகிரேம். அப்போது ஒப்பீட்டு அடிப்படையில் சமமான மாற்றங்கள் சமமான சிறப்புடையனவாகவே கருதப்படும். இத்துறையில் வீதங்களுக்குச் சராசரி காண்பது முக்கியமாகப் பயன்படுகிறது. மிகவும் அதிகமாக வழக்கிலுள்ள எடுத்துக்காட்டு ஒன்று தருவோம். ஒரு விலை மாற்றம் பத்து மடங்கு உயருகிறது—அதாவது 100-லிருந்து 1,000 ஆகிறது. மற்ருென்று பத்தில் ஒரு பங்காகக் குறைகிறது—அதாவது 100-லிருந்து 10 ஆகிறது. 1,000-க்கும் 10-க்கும் கூட்டுச் சராசரி 505, பெருக்குச் சராசரி $\sqrt{1,000 \times 10} = 100$. சராசரியின் வகை, பெருக்குச் சராசரியானுல், இரு சமமான மாற்ற வீதங்களும் ஒன்றையொன்று நேர் செய்துகொள்கின்றன என்பது தெரிகிறது. 505 என்ற கூட்டுச் சராசரி விலைமாற்ற வீதத்தை வெளியிடும் அளவையாதற்கு ஏற்றதன்று. குறியீட்டு எண்கள் என்ற அத்தியாயத்தில் இதனை விரிவாக விவாதிப்போம்.

லாகிருத முறைப்படி படம் வரைவதிலுள்ள பயன் முன் ஒரு பகுதியில் விரித்துக்கூறப்பட்டுள்ளது. இது பெருக்கல் சராசரிக்குத் தொடர்புடைய முறை, எனவே சில வேளைகளில் பெருக்குச் சராசரியை லாகிருதச் சராசரி என்றுகூட அழைப்பதுண்டு. ஏனெனில், இச் சராசரியின் லாகிருதம், இதன் உறுப்புகளின் லாகிருதங்களின் கூட்டுச் சராசரி ஆகும். மாற்றங்களில் சதவீதங்களுக்குச் சராசரி எடுக்கும்

போதெல்லாம், அதாவது தனித்த வேறுபாடுகளை விடுத்து விகிதங் களைக் கணக்கில் எடுக்கும்போது, பெருக்குச் சராசரியைப் பயன் படுத்துவதே ஏற்றது.

கூட்டு வட்டிமூலம் ஓர் அசல் வளர்ச்சி அடைகிற வீதத்தைக் குறித்த கணக்கு, பெருக்குச் சராசரியின்பாற்பட்டது. p_o காலத் துவக்கத்தில் அசல், p_n கால முடிவில் அசல், r வட்டி வீதம், n ஆண்டு கள், கால எண்ணிக்கை. வட்டி ஆண்டுதோறும் கூட்டப்படுமானல் p_o அசல் n ஆண்டுகளின் முடிவில் பெறுகின்ற வளர்ச்சி பின்வரும் சமன்பாட்டால் தரப்படும் :

$$p_n = p_o(1+r)^n \tag{4.13}$$

இதிலிருந்து,

$$r = \sqrt[n]{\frac{p_n}{p_o}} - 1 \tag{4.14}$$

அதாவது \$ 1,000 என்ற அசல், கூட்டு வட்டியால் வளர்ந்து, **\$ 1,600** ஆக 12 ஆண்டுகளில் ஆகுமானல், அதிகரிப்பு 60 சத வீதமாகும். சராசரிப்படி அதிகரிப்பு 5 சதவீதமே. ஆனல் உண்மை யில் இது பணத்தின் அதிகரிப்பு வீதத்தைக் காட்டவில்லை. உண்மை வீதமாவது :

$$r = \sqrt[12]{\frac{1,600}{1,000}} - 1$$

$$= \sqrt[12]{1{\cdot}60} - 1$$

$$= 1.04 - 1$$

$= .04$, அல்லது 4%

அதிகரிப்பு வீதம் அல்லது குறைவடையும் வீதம் சம்பந்தப்பட்ட கணக்குகள் எல்லாம் இத்தன்மைத்தே; இவற்றிற்கெல்லாம் கூட்டுச் சராசரி தவறான விடையையே தரும்.

மையநிலைப் போக்கு அளவையாகப் பெருக்குச் சராசரி : பெருக்குச் சராசரியானது எத்தகைய அலைவுப் பரவலின் மையநிலைப் போக்கினை வெளியிடுவதற்குப் பொருத்தமுடையது என்ற கேள்வி எழுகிறது. தனித்த (absolute) அளவைகளை எண்கணிப்பு அளவுத் திட்டத்தில் (arithmetic scale) குறிக்கும்போது, சமச்சீரான பரவல் கிடைத்தால், அத்தகைய பரவல்களுக்குப் பெருக்குச் சராசரியைவிட கூட்டுச் சராசரியே சிறந்தது. தனித்த அளவைகளைக் குறிக்கும் பொழுது சமச்சீரில்லாத அலைவு வளைகோடு கிடைத்து, அவற்றின்

லாகிருதங்களைக் கொண்டு அமைக்கும்போது அலைவு வளைகோடு சமச்சீருடையதாக இருக்குமானால், அத்தகைய பரவல்களுக்குப் பெருக்குச் சராசரியே ஏற்புடையது. இத்தகைய பரவல்களில் மைய நிலையிலிருந்து ஒப்பிட்டுப் படை விலக்கங்கள் (relative deviations) விகிதமாக அமைந்த விலக்கங்கள்—தனித்த விலக்கங்கள் அல்ல, சமச்சீராக இருக்கும். இப் பல்வேறு அளவைகளின் லாகிருதங்களின் கூட்டுச் சராசரியே (இதன் மதிப்பு மூல அளவைகளின் பெருக்குச் சராசரியின் லாகிருதத்துக்குச் சமம் என்பது முன்னரே குறிக்கப்பட்டது) இத்தகைய பரவல்களின் மைய நிலைப் போக்கினை வெளியிட ஏற்ற பிரதிநிதி ஆகும். இவ்விதம் குறிப்புகளின் லாகிருதங்களால் உருவாக்கப்பட்ட வளைகோடு, பெருக்குச் சராசரியின் லாகிருதத்தோடு ஒரே சமச்சீராக இருக்கும். மாற்றங்களின் சதவீதங்களை லாகிருதமெடுத்து அலைவு வளைகோடு வரைந்தால், அதில் இந்த (சதவீத) மாற்றங்களின் பெருக்குச் சராசரியின் லாகிருதத்தையொட்டி சமச்சீர் காணப்படும். இச் சதவிகித மாற்றங்களையே இயற்கை எண்களாகக் கருதினால், சமச்சீரில்லாத வீதத்தில் தொகுப்பாக அமையும். கூட்டுச் சராசரியினை மிஞ்சிய விலக்கங்களின் வீச்சு கீழுள்ள விலக்கங்களின் வீச்சைவிட மிக அதிகமாக இருக்கும். ஏனெனில், கொடுக்கப்பட்ட பொருள்களின் விலைகள், கொடுக்கப்பட்ட அடிப்படையினின்று 1,000 சதவிகிதமோ அதற்கு மேலோ அதிகரிக்கலாமே ஒழிய கொடுக்கப்பட்ட அடிப்படைக்கு 100 சதவீதத்துக்கும் அதிகமாகக் குறைவுபட முடியாது. இந்த நிலையைப்பற்றிப் பின்னர் குறியீட்டு எண்கள் பற்றிய பத்தியில் விரிவாக விளக்கப்படும்.[9]

ஒவ்வொரு குறிப்பின் லாகிருதத்தையும் பட்டியலாக அமைப்பதற்குமுன் தீர்மானிக்க வேண்டியிருப்பின், லாகிருதங்களைப்

[9]வால்ஷ் (Walsh), (து.நா.ப. 187) சராசரிகளின் பயன்கள்பற்றிப் பின்வரும் கட்டளை விதிகளை (criteria) அமைத்துள்ளார்.

(a) ஒரு தொடராக அமைந்த உறுப்புகளின் மதிப்புகளுக்குக் கீழ் அல்லது மேல் எல்லைகளை எண்ணிப் பார்க்கவோ, குறிப்பிடவோ முடியாத நிலையில் கூட்டுச் சராசரியைப் பயன்படுத்தவேண்டும்.

(b) சுழியிலோ அல்லது அதற்கு மேலோ வரையறை செய்யக்கூடிய கீழ் எல்லை அமைந்து, மேல் எல்லையை எண்ணவோ குறிப்பிடவோ முடியாத நிலையில் பெருக்குச் சராசரியைப் பயன்படுத்தவேண்டும். விலை மாற்றங்களில் இத்தகைய நிலை நிலவுவதால் விலைமாற்றங்களின் குறியீட்டு எண்களுக்கு, பெருக்குச் சராசரியே பொருத்தம் என வால்ஷ் நம்புகிறார்.

(c) நடைமுறையிலோ, இயற்கை அமைப்பிலோ, சில மேல், கீழ் எல்லைகளிலிருந்து, மேற்கண்ட கட்டளை விதிகளைப் பயன்படுத்த முடியாவிட்டால், குறிப்புகளின் உண்மையான பரவல்பற்றி ஆராயவேண்டிய தேவை எழுகிறது. கூட்டுச் சராசரிக்கு அண்மையில் முகடு காணப்பட்டால், அக் கூட்டுச் சராசரியும், பெருக்குச் சராசரிக்கு அருகே முகடு காணப்பட்டால், அச் சராசரியும் பயன்படுத்தப்படவேண்டும்.

பட்டியலாக அமைத்த அலைவுப் பரவலை உருவாக்குவது மிகவும் கடினமாக இருக்கும். அப்படியின்றிப் பிரிவு இடைவெளிகளும் லாகிருத மதிப்பின் மாறிலியாக இருக்கும்போது, ஒரு மெய்யான லாகிருதப் பரவலை உருவாக்குவது அதிகச் சிரமமாக இருக்காது. 4-14 பட்டியலில், முன்னுரிமைப் பங்குகளில் 58 மதிப்புப் புள்ளிகள் (quotations) தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் வீச்சு $ 23·00-லிருந்து $ 124·50 வரை ஆகும். 23·00-ன் லாகிருதம் 1·36173 ஆகும். 124·50-ன் லாகிருதம் 2·09517 ஆகும். லாகிருதங்களில் வீச்சு 0·73344. தற்போது நடைமுறை உபயோகத்திற்கு 0·12-ஐ, ஏற்ற லாகிருதப் பிரிவு இடைவெளியாகத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். விவரங்களை எளிமையாகப் பட்டியலாக அமைப்பதற்காகப் பிரிவு எல்லைகளை இரு வகையான தொடர்களில் அமைப்போம். ஒன்றை லாகிருதங்களிலும், மற்றதை அவற்றுக்கு இசைந்த இயற்கை எண்களிலும் உருவாக்குவோம். பிறகு வரும் கணிப்புகள் யாவற்றையும் லாகிருதங்களிலேயே செய்யலாம். இந்தப் பரவல் 4-15 பட்டியலில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

ஒரு கொடுக்கப்பட்ட தொடருக்குப் பெருக்குச் சராசரி பொருத்தமுடையதாகக் கருதப்படுமானல், 4-15 பட்டியலில் காட்டப்பட்ட பரவல்

பட்டியல் 4–15

மார்க்கெட் விலையின் அடிப்படையில் 5 சதவீத சலுகைப் பங்குகளின் பரவல்

பிரிவு இடைவெளி (இயற்கை எண்களில்)	பிரிவு இடைவெளி (லாகிருதங்களில்)	மையப்புள்ளி (லாகிருதங்களில்) X	அலைவு f	fX
$ 22.39-$ 29.51	1.35-1.46999	1.41	1	1.41
29.52- 38.90	1.47-1.58999	1.53	1	1.53
38.91- 51.28	1.59-1.70999	1.65	3	4.95
51.29- 67.60	1.71-1.82999	1.77	10	17.70
67.61- 89.12	1.83-1.94999	1.89	12	22.68
89.13- 117.49	1.95-2.06999	2.01	27	54.27
117.50- 154.88	2.07-2.18999	2.13	4	8.52
			58	111.06

வகை 4-14 பட்டியலில் காட்டப்பட்டதைவிட, காரணகாரிய முறைப்படி பொருத்தமானதாக இருக்கும். எனவே, 4-15 பட்டியலில் கிடைக்கின்ற வருணனை அளவுகள் மற்றதிலும் பொருத்தமுடையன. 4-15 பட்டியலில் முன்னுரிமைப் பங்குகளின் விலைகளில் லாகிருதங்களின்

சராசரியை, $\Sigma f X$-ஐ (அதாவது 111·06-ஐ) 58ஆல் வகுத்துப் பெறலாம். அப்படிக் கிடைக்கின்ற மதிப்பு 1·91483. இதன் எதிர் லாகிருதம் $ 82·19; இதுவே பரவலின் பெருக்குச் சராசரி. 4-14 பட்டியலில் பெற்ற மதிப்பான $ 84·25-லிருந்து இது சற்றே வேறு படுகிறது. ஓரளவு இந்த வேறுபாட்டுக்குக் காரணம், இரண்டு பகுப்பு களிலும் வெவ்வேருன பிரிவு இடைவெளிகளேயும், பிரிவு எல்லே களேயும் பயன்படுத்தியதேயாகும். கண்டறிந்த குறிப்புகளின் எண்ணிக்கை குறைவாக இருக்கையில், இவ்விதமான வேறுபாடு களால் கிடைக்கக்கூடும் முடிவுகள் மாறுபட்டதாக இருக்குமென்பது எதிர்பார்க்கக்கூடியதே. இவ்வகையான இரு முடிவுகளின் வேறு பாட்டுக்கு வெவ்வேறு பிரிவுகளின் பரவல்களின் உள் அமைப்பு பற்றிய வெவ்வேருன தற்புனேவுகளும் காரணமாக இருக்கலாம். 4-15 பட்டியலிலிருந்து பெற்ற மதிப்பு, 4-14 பட்டியலில் கிடைத்த மதிப் பினும், பெருக்குச் சராசரியின் உண்மை மதிப்புக்கு நெருங்கிய தோராயமாக இருக்கக்கூடும்.

வருமானப் பரவல் பற்றிய விவரங்களே வெளியிடுவதற்கு இயற்கை எண்களேப் பயன்படுத்துவதைவிட, அந்த எண்களின் லாகிருதங்களின் அடிப்படையில் அலேவு வளேகோடு அமைப்பது மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும். இயற்கை எண்களேக் குறிக்கும் போது, வருமானப் பரவலின் வீச்சு மிகப் பெரியதாக இருப்பதால், வளேகோட்டின் எல்லாப் பகுதிகளினுடைய சிறப்புத் தன்மைகளேயும் உணர்த்துமாறு ஒரு படத்தினேத் தயாரிப்பது நடைமுறையில் கடின மாக இருக்கலாம். அப்படிப்பட்ட விவரங்களே இரட்டை லாகிருதத் தாளில் குறித்தால், (அதாவது x, y ஆகியவற்றின் லாகிருதங் களேக் குறிப்பதற்கு இது சமம்) இந்த இடையூற்றை வெல்லலாம். இதன்மூலம் முழுப் பரவலின் உண்மை உருவத்தையும், அதன் பகுதிகளிடையேயுள்ள தொடர்புகளேயும்பற்றிய உண்மையான வடி வத்தையும் பெறுவதோடு, இயற்கை அளவுத்திட்டத்தில் அமைந்த படத்தில் மறைந்து காணப்படுகின்ற சில முக்கியமான சிறப்பு களேயும் கண்டுகொள்ளமுடியும். குறிப்பாகக் கூறினல் முகட்டுக்கு மேற்புறம் அமைகின்ற வளேகோட்டின் பகுதி இச் செயல்முறையால் நேர்கோடாக இழைக்கப்படுவது தெரியவரும். இந்த உண்மையினேப் பயன்படுத்தியே வில்ஃபிரடோ பாரட்டோ (Vilfredo Pareto) என்பவர் வருமானப் பரவல் பற்றிய ஒருவிதியினேக் கண்டார். இது பாரட்டோ விதி எனப்படும். அமெரிக்க நாட்டில் நேஷனல் பீரோ ஆஃப் எக்கனமிக் ரிசர்ச் (National Bureau of Economic Research) வருமானங்களின் பரவல்பற்றி நடத்திய தீவிர ஆராய்ச்சியின் விளேவாக, அவ் ஆய்வுக் குழுவினர் பாரட்டோவின் பொதுமை யான முடிவுகள்பற்றி சில மறுப்புகளே எழுப்பியுள்ளனர். எனினும்,

வருமான விவரங்களை வெளியிடுவதற்கு இரட்டை லாகிருத அளவுத் திட்டம் மிகவும் பயனுடையது என்பது ஏற்கப்பட்டது.

ஹார்மானிக் சராசரி (Harmonic Mean)

ஹார்மானிக் சராசரி குறிப்பிட்ட துறைகளில்மட்டுமே பயனுகக் கூடிய ஒரு சராசரி. ஆனால் சில வகையான விவரங்களைக் கையாளும் போது, பிழையைத் தவிர்க்க இதனையே மேற்கொள்ள வேண்டி யுள்ளது. கால வீதங்களின் சராசரியைக் காண இதனைக் கையாள வேண்டும். சில வகை விலை விவரங்களில் இதனைப் பயன்படுத்து வதால் சில சிறப்பான நலன்கள் உண்டு. குறியீட்டு எண்கள் (Index Numbers) பற்றிய 13ஆம் அதிகாரத்தில் கூட்டுச் சராசரி உள்ளாகும் பிறழ்ச்சிகளின் (biases) எதிர்மாறான பிறழ்ச்சிகட்கு ஹார்மானிக் சரரசரி உட்படுவதைக் காண்போம். இதன்மூலம் பிறழ்ச்சிகளை ஒன்றை ஒன்றால் ஈடுகட்டுவது இயலும். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு ஹார்மானிக் சராசரியினைக் கையாளும் வீதத்தைக் காட்டுகிறது.

ஒரு பொருள் மூன்று கடைகளில் 'டாலருக்கு நான்கு', 'டாலருக்கு ஐந்து', 'டாலருக்கு இருபது' என விலையிடப்பட் டிருக்கிறது. ஒரு அலகுக்குச் (unit) சராசரி விலை என்ன எனக் கணக்கிட வேண்டும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களின் (4, 5, 20) கூட்டுச் சராசரி $9\frac{2}{3}$. டாலருக்கு விற்பனை செய்யப்பட்ட சர்சரி எண்ணிக்கையாக இதனைக் கருதினால், ஒன்றின் சராசரி விலை \$ $1{\cdot}00 \div 9\frac{2}{3}$ அல்லது $10\frac{10}{29}$ சென்டுகள் எனத் தோன்றும். ஆனால் மூல விலைப் புள்ளிகள்படி ஓர் அலகின் விலை 25 சென்டுகள், 20 சென்டுகள், 5 சென்டுகள் என்பன. இவ்விலைகளின் கூட்டுச் சராசரி ஒன்றுக்கு $16\frac{2}{3}$. 'ஒரு டாலருக்கு இத்தனை' என்ற வடிவத்தி லுள்ள விலைப் புள்ளிகளுக்குக் கூட்டுச் சராசரியினைப் பொருத்த மில்லாது பயன்படுத்திக் கணக்கிடுவதனால்தான் $10\frac{10}{29}$ சென்டு, $16\frac{2}{3}$ சென்டுகள் ஆகிய இரு விடைகளுக்குமிடையே வேற்றுமை காணப் படுகிறது. அத்தகைய சராசரி, உண்மையிலேயே நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியாகும். இதில் அதிக எண்ணிக்கையுடைய பொருள் அலகுகளைக் கொண்ட விலைப்புள்ளிகளுக்கு அதிக முக்கியத்துவ மளிக்கிறோம்.

மூன்று விலைப் புள்ளிகளுக்கும் ஹார்மானிக் சராசரி கண்டால் சரியான விடையைப் பெறலாம். எண்களாலான தொடரொன்றின் ஹார்மானிக் சராசரி, அந்த எண்கள் ஒவ்வொன்றின் தலைமாற்றுப் பின்னங்களின் கூட்டுச் சராசரியின் தலைமாற்றுப் பின்னமாகும். $r_1, r_2, \ldots r_n$, என்பதால் எண்களைக் குறித்தால், H என்ற ஹார்மானிக் சராசரியின் வாய்பாடு,

$$\frac{1}{H}=\frac{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\ldots\ldots+\frac{1}{r_n}}{N} \qquad (4.15)$$

என்பதாகும்; மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில்,

$$\frac{1}{H}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}}{3}$$

$$=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$$

$$H = 6$$

4, 5, 20 ஆகியவற்றின் இசைச் சராசரி 6 ஆகும். இதுவே டாலருக்கு விற்பனை செய்யப்படும் அலகுகளின் சராசரி எண்ணிக்கை. ஓர் அலகுக்கு சராசரி விலை $16\frac{2}{3}$ செண்டுகள்.

தலைமாற்றுப் பின்னங்களின் முன்கூட்டியே தயாரிக்கப்பட்ட பட்டியல்கள் நமக்குக் கிடைக்கின்றன.[10] அவற்றைப் பயன்படுத்துவதன்மூலம் தொடர் அளவைகளுக்கு ஹார்மானிக் சராசரியை எளிமையாகக் கணிக்கலாம்.

பல்வேறு சராசரிகளிடையேயுள்ள தொடர்புகள்

கொடுக்கப்பட்ட கண்டறிந்த குறிப்புகளின் தொடருக்கு, பல்வேறு சராசரிகளையும், கண்டறியும்போதும் கணிக்கும்போதும் அவற்றுக்கிடையே சில தொடர்புகள் நிலவக் காண்கிறோம்.

1. ஒரு சமச்சீர் பரவலில், கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு மூன்றும் ஒன்றுகின்றன.
2. ஓரளவுக்குச் சமச்சீருடைய பரவலில் இடைநிலையானது, சராசரிக்கும் முகடுக்கும் இடையில், அச்சின் வழியே முன்னதுக்கு உள்ள தூரத்தில் ஏறக்குறைய மூன்றில் ஒரு பங்கு தூரத்தில் பின்னதிலிருந்து அமைகிறது. எனவே, இவ்வகைப் பரவல்களில் பின்வரும் உறவு தோராயமாகப் பொருந்தும்.

$$Mo = M - 3\,(M - Md)$$

3. எந்த அளவைத் தொடரிலும் கூட்டுச் சராசரி அவற்றின் பெருக்குச் சராசரியினும் பெரியது.
4. எந்த அளவைத் தொடரிலும் பெருக்குச் சராசரி, அவற்றின் ஹார்மானிக் சராசரியினும் பெரியது. தொடரின் அளவைகள் யாவும் சமமாக இருக்கும்போது கடைசியாகக் கூறப்பட்ட விதிகள்

[10] Barlow's Tables of Squares, Cubes, Square Roots, Cube Roots and Reciprocals, (New York) (Spar and Chamberlain).

இரண்டும் பொருந்தாது நேரும், அப்போது கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, ஹார்மானிக் சராசரி ஆகிய மூன்றும் சமம்.

5. இரண்டு உறுப்புகளின் பெருக்குச் சராசரி, அவற்றின் கூட்டுச் சராசரி, ஹார்மானிக் சராசரி ஆகியவற்றின் பெருக்குச் சராசரிக்குச் சமம். காட்டாக, 2, 8 ஆகிய உறுப்புகளின் ஹார்மானிக் சராசரி $3\frac{1}{5}$, பெருக்குச் சராசரி 4, கூட்டுச் சராசரி 5. ஆனால் 4 என்பது $3\frac{1}{5}$, 5 ஆகியவற்றின் பெருக்குச் சராசரியு மாகும். பெருக்குத் தொடரல்லாத (geometric series) பிற தொடர்களில் இரண்டுக்கும் மேற்பட்ட உறுப்புகள் இருந்தால் இந்த விதிகள் பொருந்தா.

6. x அளவுத் திட்டத்தில் விவரங்களை இயற்கை எண்களால் குறிக்கையில் விவரங்களின் பரவல் சமச்சீராக அமைகின்ற போக்கை உடையதாக இருக்குமானால், பொதுவாக முகடும், இடைநிலையும் பெருக்குச் சராசரியைவிட கூட்டுச் சராசரிக்கு அணித்தாக இருக்கக் காணலாம். விவரங்களை லாகிருத (அல்லது வீத) x அளவுத் திட்டத்தில் குறிக்கையில் பரவல் சமச்சீராக அமைகின்ற போக்கை உடையதாக இருக்குமானால், பொதுவாக முகடும் இடைநிலையும் கூட்டுச் சராசரியைவிட பெருக்குச் சராசரிக்கு நெருக்கமாக இருக்கக் காணலாம்.

முக்கிய சராசரிகளின் சிறப்புப் பண்புகள்

கூட்டுச் சராசரி

1. தொடரின் ஒவ்வோர் அளவையிலும் கூட்டுச் சராசரியின் மதிப்பு பாதிக்கப்படும். சில சமயங்களில் சராசரியிலிருந்து புறக் கோடியில் அமைந்த விலக்கங்களினால் கூட்டுச் சராசரி மிகவும் பாதிக்கப்படும்.

2. கூட்டுச் சராசரியினைக் கணித்தல் எளிது. ஒவ்வொரு சமயத் திலும் அதனைக் கணித்தல் இயலும்.

3. கூட்டுச் சராசரி கணிக்கப்பட்ட சராசரியாதலால் இயற்கணிப்பு களுக்கு எளிதில் பயன்படும் வல்லமை உடையது.

4. மாதிரி அமைப்புகளில் கூட்டுச் சராசரி நிலைத்ததன்மை பெற்றி ருக்கும். (இக் கூற்றின் சிறப்புப் பொருள் பின்னர் விளக்கிக் கூறப்படும்.)

இடைநிலை

1. இடைநிலையின் மதிப்பு புறக்கோடி மதிப்புகளால் பாதிக்கப் படுவதில்லை.

2. தொடரிலுள்ள குறிப்புகளை அளந்து அறியமுடியாத நிலையில் கூட இடைநிலையை இடங்காண முடியும்.

3. விவரங்கள் முற்றுப் பெருத நிலையில்கூட, விவரங்கள் எல்லாவற்றின் எண்ணிக்கைகளையும் இட அமைப்புகளையும் தெரிந்து, பரவலின் மையத்துக்கு அருகிலுள்ளவைகளைப்பற்றித் திருத்தமான செய்திகளும் தெரிந்திருந்தால் இடைநிலையைக் கணிக்க முடியும்.

முகடு

1. சராசரியிலிருந்து மிகுந்த அளவில் விலக்கங்களுடைய மதிப்பு களால் முகட்டின் மதிப்பு பாதிக்கப்படுவதில்லை.

2. முகட்டின் கிட்டிய மதிப்பை எளிதில் இடங்காணலாம் எனினும், முகட்டின் உண்மை மதிப்பை நீண்ட கணிப்புக்குப் பின்னரே தீர்மானிக்க முடியும்.

3. அளவைகளின் எண்ணிக்கை அதிக அளவில் இருக்கும்போதும், தெளிவாக மையப் போக்கை உடையதாக இருக்கும்போதும் மட்டுமே முகட்டுக்குப் பொருள் உண்டு.

4. மிகவும் செறிவுடைய புள்ளியில் முகடு அமைவதால், பரவலின் உண்மையான இனங்காட்டும் சராசரி, முகடே ஆகும்.

பெருக்குச் சராசரி

1. கூட்டுச் சராசரியைவிட, பெருக்குச் சராசரி புறக்கோடி மதிப்பு களுக்குக் குறைவாகவே பாதிக்கப்படுகிறது.

2. நேர் மதிப்புகளைச் சராசரியிடும்போது திட்டமாகத் தீர்மானிக்கக் கூடியது இது.

3. மாற்ற வீதம் அல்லது அளவைகளின் விகிதம் ஆகியவற்றுக்குச் சராசரி காணவேண்டியிருக்கும்போது பெருக்குச் சராசரியே ஏற்ற சராசரி; ஏனெனில், இக் கணிப்பில் மாற்றவீதங்கள் சம நிறையினதாகக் கருதப்படுகின்றன. சிறப்பாக, விலைமாற்ற வீதங்களைச் சராசரியிடுவதற்கு இது உகந்தது.

4. இயற்கணிப்புகளுக்குப் பெருக்குச் சராசரி பயன்படும்.

ஹார்மானிக் சராசரி

1. கால வீதங்களையும், அதற்கொத்த வீதங்களையும் சராசரி செய்வதற்கு ஹார்மானிக் சராசரி ஏற்றது. விலை இயக்கங்களில் அளவை அறியும் பொருட்டு, பொருளாதாரப் புள்ளியியல் துறையில் இது பயனுகிறது.

2. இயற்கணிப்புகளில் ஹார்மானிக் சராசரி பயன்படும்.

ஒவ்வொரு வகை சராசரியும் அதற்கென்று அமைந்த தனித் துறையில் பயன் மிகுந்து விளங்குவதைக் காட்டுவதே இப் பொழிப்புரையின் நோக்கம். சில சூழ்நிலைகளில் ஒவ்வொன்றும் தனியாக மிகச் சிறந்து விளங்குகிறது. ஒவ்வொன்றின் பண்புகளையும் குறைபாடுகளையும் நன்கு அறிந்தால்தான் அவற்றை ஏற்ற முறையில் பயன்படுத்தமுடியும். ஓர் அலைவுப் பரவலை முற்றிலும் தீர்மானிப்பதற்கு, இரண்டு அல்லது மூன்று முக்கிய சராசரிகளும் அதோடு வேறு சில புள்ளிவிவர அளவைகளும் தேவைப்படுகின்றன. கூட்டுச் சராசரியே தனிச் சராசரிகளில் மிகவும் பயனுள்ளது என்று கூறவேண்டும். இயற்கணிப்புகளில் கணிப்பின் எளிமை, பயனுகும் ஆற்றல், அதன் பொருளை எளிமையாக வரையறுத்துக் கூறமுடியும் என்ற உண்மை ஆகியவற்றால், இச் சராசரி, புள்ளியியல் பணிகளில் மிகவும் பயன்படுகிறது. எனினும் அது எல்லாத் துறைகளுக்கும் பயனுகும் எனக் கூற முடியாது. அதற்கு உகந்த சூழ்நிலைகள் நிலவும்போதே அதனைப் பயன்படுத்த வேண்டும். பெருக்குச் சராசரியின் தனிச் சிறப்புகள் நன்கு வெளியாக வெளியாக, பல வகையான புள்ளியியல் பணிகளில் அதனைப் பயன்படுத்துவதும் அதிகரிக்கிறது.

துணை நூல்கள்

Croxton, F. E. and Cowden, D. J., 'Applied General Statistics', Chap. 9.

Dixon, W. J. and Massey, F. J. Jr., 'Introduction to Statistical Analysis', Chap. 3.

Freund, J. E., 'Modern Elementary Statistics', Chap. 4.

Lewis, E. E., 'Methods of Statistical Analysis in Economics and Business', Chap. 3.

Riggleman, J. R. and Frisbee, I. N., 'Business Statistics', 3rd ed., Chap. 8.

Rosander, A. C., 'Elementary Principles of Statistics', Chap. 4.

Simpson, G. and Kafka, F., 'Basic Statistics', Chaps. 10, 11, 12.

Spurr, W. A., Kellogg, L. S. and Smith, J. H., 'Business and Economic Statistics', Chap. 10.

Treloar, A. E., 'Elements of Statistical Reasoning', Chap. 3.

Waugh, A. E., 'Elements of Statistical Method', 3rd ed., Chaps. 4, 5.

Wilks, S. S., 'Elementary Statistical Analysis', Chap. 3.

Yule, G. U. and Kendall, M. G., 'An Introduction to the Theory of Statistics', 14th ed., Chap. 5.

இந்த அத்தியாய முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள பதிப்பித்தோர் பெயரும் பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டும், நூலின் இரண்டாம் பாக இறுதியில் உள்ள துணைநூல் பட்டியலில் காணலாம்.

5. அலைவுப் பரவலின் சில பண்புகள்: மாற்று அளவைகளும் கோட்ட அளவைகளும்.

இதற்கு முந்தைய அத்தியாயங்களில் முழுமையின் தன்மையை எளிதில் அறியுமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் திரளைக் குறைக்கும் முறைகளை முதலிற் கண்டோம்; பின்பு திரட்டிய விவரங்களை வருணனை செய்யும் முறைகளைக் கண்டோம். அலைவுப் பரவலை அமைப்பதன்மூலம் விவரங்களின் திரளைக் குறைத்தோம். பரவலின் மையநிலைப் போக்கான சராசரிபோன்ற அளவைக் கண்டு பிடிப்பதன்மூலம் ஒரு தனி மதிப்பைக்கொண்டு முழுமையை அறிய முயன்றோம். அதன்மூலம் விவரங்களை வருணனை செய்வதில் ஓரளவு வெற்றி கண்டோம். ஆனால், அலைவுப் பரவலின் தன்மை முழுவதையும் ஒரு சராசரியினால்மட்டும் வருணனை செய்துவிட முடியாது. பரவலின் முக்கியத் தன்மைகளை வரையறை செய்ய இதனைத் தவிர பிற மதிப்புகளையும் காணவேண்டியுள்ளது. அப்போது தான் கொடுக்கப்பட்ட பரவலை மற்றப் பரவல்களோடு நுணுக்கமாக ஒப்புநோக்க முடியும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள் மைய மதிப்பி லிருந்து எந்த அளவிற்கு விலக்கம் அடைந்திருக்கிறது என்பதனைக் கண்டுபிடிப்பது இவ் வகையின் முதற்படியாகும். அதாவது, மாறுபாடு (variation) அல்லது சிதறல் (dispersion) எந்த அளவுக்கு இருக்கிறது என்று கண்டுபிடிக்க வேண்டும். இரண்டாவதாகப் பரவலின் மைய மதிப்பின் இருபுறமும் நிரவலாக, சமச்சீருடையதாக (symmetry) இருக்கிறதா என்று கண்டுபிடிக்க வேண்டும்; அதாவது, சமச்சீரின் அளவையைத் தீர்மானிப்பது. சில வேளைகளில், மூன்றாவதாக, மையத்திற்கு அருகிலுள்ள பிரிவுகளிலும், பரவலின் ஓரங்களிலுள்ள பிரிவுகளிலும் விவரங்கள் எங்ஙனம் பரவியுள்ளன என்ற அடிப்படையையும் ஆராய்வது உண்டு. இது கர்டாஸிஸ் (Kurtosis) எனப்படும். இதனைப் பின்னர் விளக்குவோம். இந்த அத்தியாயத்தில் மாற்ற அளவை

களையும் (Measures of Variation), கோட்ட அளவைகளையும் (Measures of Skewness) காண்போம்.

மாறுபாட்டின் இயல்பும் சிறப்பும்

முந்திய பகுதிகளில், அளவு சம்பந்தப்பட்ட விவரங்களின் தொகுப்பில் காணப்படும் மாறுபாடுகள்பற்றியும், இவை எந்த அளவிற்குப் புள்ளிவிவர ஆய்வாளரின் வேலையைப் பாதிக்கின்றன என்பதுபற்றியும் கண்டோம். சமூகம், உயிரியல், பொருளாதாரம் ஆகிய துறைகளில் சேகரிக்கப்பட்ட அளவின் விவரங்களில் அனேகமாக எல்லாவற்றிலும் மாறுபாடு நிலவக் காணலாம். அதாவது, அவற்றின் தனித்தனி உறுப்புகளுக்குள் அளவின் மாறுபாடு காணப்படும். அவைகளுக்கிடையேயுள்ள ஒரே குடும்பச் சாயலைப் போலவே இந்த மாறுபாடும் முக்கியமானது. பரிணாம வளர்ச்சியில் உயிரியல் மாறுபாடுகள் அடிப்படையான காரணக் கூறாக இருந்து வருகிறது. உயரம் முதலான உடற்கூறு குறித்த அளவைகளின் தொகுப்புக்கு, அவற்றின் சராசரி மாறுபாடுபற்றிய ஓர் அளவையும் தெரிந்தால்தான், அத் தொகுப்புப்பற்றி முழுமையாக விளங்கிக் கொள்ள முடியும். ஒரு நாட்டு மக்களின் பொருளாதார வளம், வருமானம் பெறுவோரது சராசரி வருமானத்தின் அளவையோடு அவர்களது வருமானங்களிலுள்ள மாறுபாடுகளையும் பொறுத்தே இருக்கும். பொருளாதார மாறுதல்களுக்கு அடிப்படையான விலை மாற்றங்கள், விலை அமைப்புத்துறைகள் முழுவதுக்கும் ஒரே சீராக இருப்பதில்லை. ஒரு துறைக்கும் மறுதுறைக்கும் மாறுபாடுகள் காணப்படும். இந்த ஏற்றத்தாழ்வுகளின் பயனாக இத் துறைகள் ஒன்றுக்குள் ஒன்று பிரதிபலித்துப் பொருளாதார ரீதியான சீரமைவுகளைத் தோற்றுவிக்கின்றன.

புள்ளிவிவர ஆய்வு முறைகள் முழுவதையும் மாறுபாடுகளை ஆயும் சாதனமாகக் கருதலாம். இந்த மாறுபாடுகளின் அடிப்படையில்தான் பல்வகையான அலைவுப் பரவல்கள் பிறக்கின்றன. பல்வகை அளவைகட்கு நடுவேயுள்ள மாற்றங்களை ஆய்வதற்காகவே உடன் தொடர்பு ஆய்வுகளிலும் (correlation analysis) பல சக்திவாய்ந்த அளவைகளை உருவாக்குகிறோம். பல்வித மாற்ற அளவைகளை ஒப்பு நோக்குவது, எடுகோள்களைச் சோதனை செய்வதற்கும் அடிப்படையாக அமைகிறது. புள்ளிவிவர அளவைகளைக் குறித்துப் பொதுமையான முடிவுகளைச் செய்தபின்னர், அந்தப் பொதுமையான முடிவுகள் அந்த எல்லைகளுக்குட்பட்டுச்சரியாக இருக்கும் என்பதனை வரையறை செய்வதற்கும், வேறு மாற்ற அளவைகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். காலத்திற்கேற்ப ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட விவரங்களை, அதாவது கால ஒழுங்கு இன்றியமையாத விவரங்களைக் கையாளும்போதும், மாறுபாட்டின் சில புதிய அம்சங்களை நாம் மேற்கொள்ளவேண்டியிருக்

கிறது. மாதத்திற்கு மாதம், ஆண்டுக்கு ஆண்டு தேசீய வருமானம், மொத்த விலைகளின் நிலை, உற்பத்தி அளவு போன்றவைகளில் நிகழும் மாற்றங்கள் பொருளாதார முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை. தொழிற்சாலைகளில் தயாராகும் பொருள்கள் மிக நுட்பமாகக் கட்டுப்படுத்தப்பட்டாலுங்கூட, ஒன்றுக்கொன்று சில மாற்றங்களைப் பெற்றே இருக்கும். இந்த மாற்றங்களின் அளவையை ஆராய்வதற்காக ஒரு புதிய முக்கியமான புள்ளிவிவர ஆய்வுமுறை (தரக்கட்டுப்பாடு) கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளது. இதன்மூலம், தரத்தில் காணப்படுகிற மாறுபாடுகளில் எவை முற்றிலும் 'வாய்ப்பினால்' இயைபிலாக் காரணக் கூறுகளால் தற்செயலாக நடக்கின்றன என்பதனையும், எவை (கட்டுப்படுத்தக்கூடிய) பிற கோளாறுகளால் ஏற்படுகின்றன என்பதையும் வேறுபடுத்திக் காண்கிறோம்.

மாறுபாடுகளைச் சரியாகவும் நுணுக்கமாகவும் அளந்தறிவது பல்வகையான புள்ளிவிவர ஆய்வுகளிலும் பல நிலைகளிலும் இன்றியமையாதது. தற்போது நாம் ஈடுபட்டுள்ள செயலின் அலைவுப் பரவலின் தன்மையினை ஆராயும் முயற்சியிலே, மைய நிலைப் போக்கு அளவைகளினோடு இவைகளும் சேர்ந்து எங்ஙனம் உதவுகின்றன என்பதனை வலியுறுத்துவோம். கொடுக்கப்பட்ட அலைவுப் பரவலின் மாற்ற அளவையும் அறிந்தாலொழிய, சராசரியைமட்டும் எடுத்துக் கொண்டு அதிகமான செய்திகளைக் கூறிவிட முடியாது. மைய நிலைப் போக்கு இல்லையென்றாகும் அளவிற்கு மாறுபாடுகள் மிக அதிகமானால், சராசரியின் மதிப்பு மிகவும் குறைந்துவிடும். மாறுபாட்டின் அளவு குறைவாக இருக்கும்போதுதான் சராசரி பொருளுடையதாக இருக்கும்.

மூல அளவையில் பயனாகும் அலகுகளைக் கொண்டே மாறுபாட்டை அளக்கலாம். அல்லது மூல அலகுகளைப் புறக்கணித்துக் கருத்தியல் எண்ணாக — சதவீதம்போன்று—மாற்றி வேறுபாட்டை வெளியிடலாம். மூல அலகுகள் பயனாகும்போது, அதன் தனித்த (absolute) மாறுபாட்டினை அளக்கிறோம். மற்றதில் ஒப்பீட்டு (relative) அடிப்படையில் மாறுபாட்டைக் காண்கிறோம். முன்னதை விடப் பின்னது ஒப்புமை செய்ய ஏற்றது. முதலில் தனித்த மாறுபாட்டு அளவைகள்பற்றிக் காண்போம்.

குறியீடு: இதுவரையில் பயனாகாத இந்த அத்தியாயத்தில் பயன்படுத்தப்போகும் குறியீடுகள் சிலவற்றைக் காண்போம். இவற்றின் விளக்கங்கள் பின்னால் வரும். முக்கியமான சிலவற்றை முன் கூட்டியே காண்பது பயனுள்ளதாகும்.

s : கூற்றின் தரவிலக்கம்.

s^2 : கூற்றின் மாறுபாடு (variance).

s_2^2: எதேச்சை மூலம் ஒன்றிலிருந்து விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் சராசரி.

s': முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கத்தின் மதிப்பீடு (சிறிய-மாதிரிகளிலேயே இக் குறியீட்டைப் பெரிதும் பயன்படுத்துகிறோம்).

s'^2: முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டின் மதிப்பீடு (சிறிய கூறுகளிலேயே இக் குறியீட்டைப் பெரிதும் பயன்படுத்துகிறோம்).

σ: முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கம்.

σ^2: முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு.

$M.D.$: சராசரி விலக்கம்.

Q_1: கீழ்க் கால்மானம்.

$Q.D.$: கால்மான வீச்சு.

D_8: எட்டாம் பதின்மானம்.

V: மாற்றக் கெழு

sk: பரவலின் கோட்டம்.

மாறுபாடுகளின் அளவைகள்
(Measures of Variation)

வீச்சு

மாறுபாட்டுக்கு மிகத் தோராயமான ஓர் அளவை, வீச்சாகும். இது, மிகச் சிறிய குறிப்பின் மதிப்புக்கும், மிகப் பெரிய குறிப்பின் மதிப்புக்குமுள்ள தனித்த (absolute) வேறுபாடாகும். மூன்றும் அத்தியாயத்தில் தரப்பட்ட ஆலைத் தொழிலாளர்களது வார வருமானத்தை வெளியிடும் பட்டியலில் மிகக் குறைந்த குறிப்பு \$38·80, மிகப் பெரியது \$67·60. எனவே, வீச்சு \$67·60—\$38·80 அல்லது \$28·80. மூல விவரங்கள் முழுவதும் தெரியாவிட்டாலுங்கூட அலைவுப் பரவலிலிருந்து வீச்சினைத் தோராயமாக அறிய முடியும்; இது மேல்பிரிவின் உச்ச எல்லைக்கும், கீழ்ப்பிரிவின் கீழ் எல்லைக்குமுள்ள வேறுபாடேயாகும். குறுக்கு வலிமைக்கேற்பச் செங்கல் பாகுபாடு செய்யப்பட்டிருந்த (3ஆம் அத்தியாயம், பட்டியல் 3–13) எடுத்துக்காட்டில், வீச்சு 225லிருந்து 2025 வரை, அதாவது, 1800 பவுண்டுகள் (சதுர அங்குலத்திற்கு).

இரண்டு முனைக் கோடிகளிலுமுள்ள மதிப்புகளையொட்டியே வீச்சின் மதிப்பு அமைகிறது என்பது தெளிவு. இயற்கைக்குப் புறம்பான, ஒரு தனிப்பட்ட குறிப்புகூட வீச்சினைக் கணிசமான அளவுக்கு மாற்றியமைக்கக்கூடும். எனவே, ஒரு தவறான அளவை கூட அலைவுப் பரவலின் இயற்கையான தன்மையைக் கெடுத்துவிடும். சிறிய மாதிரிகளில், குறிப்பாக, மாதிரி எடுக்கும் முறை திரும்பத்திரும்பக் கையாளப்பட்டு அடுத்தடுத்த முடிவுகளின் சராசரி

-யைப் பயன்படுத்தும்போது, வீச்சு காண்பதனால் சில சிறப்பான நன்மைகள் உண்டு. எனவே, தொழில்துறை உற்பத்திப் பொருள்களின் தரங்களை ஆராய்வதற்குப் பயன்படும் பரிசோதனை முறைகளில் வீச்சு பெரிதும் கையாளப்படுகிறது.

தரவிலக்கமும் மாறுபாடும் (The Standard Deviation and the Variance)

மாறுபாட்டு அளவைகளில் மிக அதிகமாகப் பயனாவது தரவிலக்கமாகும். சராசரியினின்று தனித்த குறிப்புகள் பெறுகின்ற விலக்கங்களின் வர்க்கங்களைக் கண்டு அவற்றின் சராசரியின் வர்க்க மூலத்தைக் கண்டால் இது கிடைக்கும். இத்தகைய விலக்கங்களை எச்சம் (residuals) என்போம். எப்போதும் எச்சங்களைக் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்தே அளக்கிறோம். ஏனெனில், எச்சங்களின் வர்க்கக் கூடுதல், பிற சராசரிகளைவிடக் கூட்டுச் சராசரியிலேயே மிகக் குறைவாக இருக்கிறது. புள்ளிவிவர ஆய்வுகளில் தரவிலக்கத்தின் வர்க்கம் அதிகமாகப் பயனாவதைப் பார்க்கிறோம் (அதாவது, மாதிரியில் s^2, முழுமைத் தொகுதியில் σ^2). இதனை மாறுபாடு (variance) என்போம்.

மாதிரி ஒன்றின் தரவிலக்கம்: s^2 கணித்து s-ஐக் கணிக்கும் முறை எளியதோர் எடுத்துக்காட்டினால் 5-1 பட்டியலில் விளக்கப் பட்டுள்ளது.

பட்டியல் 5-1

தரவிலக்கக் கணிப்பு

X	d	d^2		
3	-6	36	$\bar{X}=9$	
6	-3	9	$s^2=\Sigma d^2/N$	(5.1)
9	0	0	$=\frac{90}{5}=18$	
12	$+3$	9	$s=\sqrt{\Sigma d^2/N}$	(5.2)
15	$+6$	36	$=\sqrt{18}=4.24$	
		90		

இந்த ஐந்து குறிப்புகளுக்கும், சராசரியினின்று பெற்ற விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 90 எனக் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. இதன் சராசரி 18. இதுவே மாறுபாடு. 18-ன் வர்க்க மூலம் 4·24. இதுவே தரமான விலக்கம்.

s என்ற குறியீடு ஒரு மாதிரியின் தரவிலக்கத்தினைச் சுட்டிக் காட்டுவதற்குப் பயனாகிறது ; $\Sigma d^2/N$ என்பதன் வர்க்க மூலம் இது. இந்நிலையில் s' என்று சிறிது மாறுபட்ட அளவை ஒன்றினை மாணவர் அறிந்துகொள்வது அவசியமாகிறது.

$$s' = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N-1}} \qquad (5.3)$$

இந்த எடுத்துக்காட்டில் $s' = \sqrt{\frac{90}{4}} = 4{\cdot}74$. இந்த அளவை, மாதிரிக் கொள்கையில் மிகுந்த முக்கியத்தை உடையது. மாதிரி சிறிதாக இருக்கையில் இது பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஆய்வாளர் மாதிரி முடிவுகளிலிருந்து, இந்த மாதிரி எந்த முழுமைத் தொகுதியினின்று பிரித்து எடுக்கப்பட்டதோ அந்த முழுமைத் தொகுதிக்கு மதிப்பீடுகள் செய்யும்போது, s என்ற அளவைக்குப் பதிலாக s' என்ற அளவே பலன் தருவதாக உதவும். இந்த வேறுபாட்டை விளக்கும்முகத்தான் சுருக்கமாக இங்கே சில கருத்துகளைக் காண்போம். இதன் விவரம் பின்வரும் அத்தியாயங்களில் விரிவாகக் கூறப்படும்.

முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கத்தை மதிப்பீடு செய்தல்: பொதுவாக, ஒரு மாதிரியிலிருந்து ஒரு புள்ளிவிவர அளவைக் கணிப்பது முழுமைத் தொகுதியில் அந்த அளவை எத்தகையது என்பதனை மதிப்பீடு செய்வதற்கு ஓர் அடிப்படையேயாகும். ஒரு மாதிரியின் சராசரி, மாதிரி பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்குத் தோராய மதிப்பாகும். ஒரு மாதிரியின் தரவிலக்கம் முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கமான σ-க்குத் தோராயமான தொன்றுகும். பின்னல் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியும் தரவிலக்கமும் தெளியாதபொழுதுகூட வேறுபாட்டினை மதிப்பீடு செய்ய முயலுவோம். இவ்வகையான அடிப்படையோடு பல அடுத்தடுத்த விவரங்களால் கிடைக்கின்ற செய்தியின் இயற்கைபற்றி ஆராய்வோம். ஒரு தனிக் குறிப்பு, முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியினை மதிப்பீடு செய்ய அடிப்படையாயிருக்கும். ஆனல், முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டினை மதிப்பீடு செய்ய இந்த அடிப்படை போதாது. ஏனெனில், முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்புகள் யாவும் இத் தனித்த குறிப்புக்குச் சமமான ஒரே மதிப்பை உடையனவாக இருக்கலாம். ஆனல், இரண்டு குறிப்புகள் இருக்கும்போது, முழுமைத் தொகுதியில் வேறுபாட்டை மதிப்பீடு செய்ய அடிப்படை கிடைக்கின்றது. மூன்று குறிப்புகள் இருக்கும்பொழுது, மதிப்பீடு செய்வதற்கு அடிப்படை மேலும் வலுவடைகிறது. புள்ளிவிவர மொழியில் கூறவேண்டுமானல், முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டினை மதிப்பீடு செய்ய இரு குறிப்புகள் ஒரு வரையற்ற டிகிரியையும் (one degree of freedom), மூன்று குறிப்புகள் அத்தகைய மதிப்பீட்டிற்கு இரண்டு வரையற்ற டிகிரிகளையும் (two degrees of freedom) தருகின்றன. மாதிரியில் உள்ள குறிப்புகளேயன்றி, முழுமைத் தொகுதிகுறித்து வேறு செய்திகள் இல்லாத நிலையில், மாறுபாட்டை மதிப்பீடு செய்தால், ஒரு வரையற்ற டிகிரியை இழந்து

விடுகிறோம். வேறு ஏதேனும் வழியில் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியை அறிய முடியுமானால், அத்தகைய மதிப்பீட்டைச் செய்யும் போது வரையற்ற டிகிரிகளில் இழப்பு ஏற்படுவதில்லை. ஒரு தனிக் குறிப்பு முழுமைத் தொகுதியின் தெரிந்த சராசரியிலிருந்து பெறுகின்ற விலக்கத்தை அளந்து காண முடியுமாதலால், மாறுபாட்டை மதிப்பீடு செய்யத் தனிக் குறிப்பு ஒன்றினைக்கொண்டே அடிப்படையை அமைத்துக்கொள்ள முடியும்; ஆனால், இத்தகைய சுயேச்சையான செய்தி நமக்குக் கிடைப்பது அரிது. எனவே, இத்தகைய செய்தி இல்லாத நிலையில் ஒரு வரையற்ற டிகிரியைப் பயன்படுத்தியே சராசரியை மதிப்பீடு செய்கிறோம். எனவே, விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதலை Nஆல் வகுப்பதற்குப் பதிலாக, இந்தக் காரியத்திற்காகக் கிடைக்கும் வரையற்ற டிகிரிகளால் வகுக்கிறோம். பின்னர் நாம் பயன்படுத்த இருக்கும் செயல்முறைகளில், வரையற்ற டிகிரிகளைக் கணிக்க வேறு அமைப்புகள் பயனாவதைக் காண்போம். s'^2 ஐ இது போன்று கண்டுபிடித்தால் $\sqrt{s'^2}$ என்பது σ-ன் பிறழ்ச்சியற்ற (unbiased) [1] மதிப்பீடாகும்.

N பெரிதாக இருக்கும்போது, அதாவது, 100-க்கும் மேல் மதிப்புடையதாக இருக்கும்போது $N—1$ ஆல் வகுப்பதற்குப் பதிலாக N-லேயே வகுப்பதில் தவறுமில்லை; அதுவே வசதியானதுங்கூட. ஏனெனில் N-க்கும் $N—1$ க்குமுள்ள வேறுபாடு புறக்கணிக்கத்தக்கது. s, s' இரண்டுமே σ-க்குப் பொருத்தமான மதிப்பீடுகளே. (பொதுவாக, பெரிய மாதிரிகளில் s-க்கும் s'-க்கும் நாம் பேதம் கற்பிப்பதில்லை.) சிறிய மாதிரிகளில்கூட, நாம் காணப்போகின்ற அளவையை முழுமைத் தொகுதியின் அளவைக்கு மதிப்பீடு காணப் பயன்படுத்தாது வருணனை அளவையாக மட்டும் பயன்படுத்திக்கொள்வது நமது நோக்கமானால் Σd^2ஐ N-லேயே வகுக்கலாம்.

தரவிலக்கக் கணிப்பு : 5-1 பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டில் 5 குறிப்புகள் தொகுக்கப்படாமல் இருக்கின்றன. ஆனால், குறிப்புகள் அலைவுப் பரவல்களாகத் தொகுக்கப்பட்டிருக்கும் போது, தரவிலக்கத்தைக் கணிக்கும் முறை சற்று மாறுபடும். விலக்கங்களை ஏதேனும் ஓர் எதேச்சை மூலத்திலிருந்து அளப்பது கணிப்பினை எளிதாக்கும். இத்தகைய செயல்முறையில்— மாதிரி பெரியதாயிருக்கும்போது—தரவிலக்கத்தினைக் கணிக்கும் வாய்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம். f என்பது பிரிவு அலைவையும், d என்பது அந்தப் பிரிவின் மையம் கூட்டுச் சராசரியினின்று பெறும் விலக்கத்தையும், N என்பது மொத்தக் குறிப்புகளின் எண்ணிக்கையையும் குறிக்குமானால்,

[1] ஏழாம் அத்தியாயத்தில் மதிப்பீட்டு முறைகள் பற்றி விரிவாகக் காண்போம்.

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}} \qquad (5\cdot4)$$

தரவிலக்கத்தின் வர்க்கத்தைக் காணவேண்டுமானல்,

$$s^2 = \frac{\Sigma fd^2}{N}$$

எதேச்சை மூலத்திலிருந்து விலக்கத்தை d' என்றும், இந்த மூலத்திலிருந்து விலக்கங்களின் வர்க்கச் சராசரியை s_a^2 என்றும் குறிப்போமானல்,

$$s_a^2 = \frac{\Sigma f(d')^2}{N}$$

சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களின் வர்க்கச் சராசரியான (s^2), அளவுத் திட்டத்தின் வேறு எந்தப் புள்ளியிலிருந்தாவது காணப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கச் சராசரியைவிடக் குறைவாக இருக்கும். எனவே, s_a^2 என்பது s^2 ஐவிடப் பெரிது. உண்மையான சராசரிக்கும் எதேச்சை மூலத்திற்குமுள்ள வேறுபாட்டை c என்று குறிப்போம். இதனின்று [2]

$$s^2 = s_a^2 - c^2 \qquad (5.5)$$

என்பதனை நிறுவமுடியும். தரவிலக்கத்தின் மதிப்பை, s_a^2-ஐயும் c^2-ஐயும் கணிப்பதன்மூலம் எளிதில் மதிப்பிடலாம். 1946 ஜனவரியில் 83,114 ரசாயனத் தொழிலாளர்கள் பெற்ற சராசரி மணி வருமானத்தின் பரவலான 5-2 பட்டியலில் இச் செயல்முறை விளக்கப்பட்டுள்ளது.

கணிப்பு முழுவதும் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளால் செய்யப்பட்டிருப்பதையும், கணக்கு முடிவில் மூல அலகுகளுக்கு மாற்றப்படுவதையும் கவனிக்கவும். மொத்த விலக்கங்களின் இயற்கணிப்புக் கூடுதலை (algebraic sum) மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுத்தால், எதேச்சை மூலத்திற்கும் உண்மைச் சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாடான c கிடைக்கும். c-ஐ மூல அலகுக்கு மாற்றி எதேச்சை மூலத்தோடு (இயற்கணிப்பு ரீதியில்) கூட்டி, கூட்டுச் சராசரியைக் கண்டுபிடிக்கலாம். ஆனல், இது இங்குத் தேவையில்லை. தரவிலக்கக் கணிப்பில் சராசரியின் மதிப்பு நேரிடையாகத் தேவைப்படாது.

[2] ஏனெனில், $s^2 = \frac{\Sigma d^2}{N}$ ஆனல் $\Sigma d = 0$

$$s_a^2 = \frac{\Sigma (d')^2}{N}$$
$$d' = d + c$$
$$(d')^2 = d^2 + 2cd + c^2$$
$$\Sigma (d')^2 = \Sigma d^2 + 2c\Sigma d + Nc^2$$
$$\therefore \quad \Sigma (d')^2 = \Sigma d^2 + Nc^2$$
$$\frac{\Sigma (d')^2}{N} = \frac{\Sigma d^2}{N} + c^2$$
$$s_a^2 = s^2 + c^2$$
$$s^2 = s_a^2 - c^2$$

பட்டியல் 5-2

தாவிலக்கக் கணிப்பு

1946 ஜனவரியில், அமெரிக்காவிலுள்ள ரசாயனத் தொழில் நிறுவனத் தொழிலாளர்களின் நேர்காலச் சராசரி மணி ஊதியம்

பிரிவு இடைவெளி (மணிக்கு சென்டுகளில்)	மையப் புள்ளி (சென்டுகளில்) X_m	அலைவு f	d'	fd'	$f(d')^2$	$(d'+1)^2$	$f(d'+1)^2$
30.0- 39.9	35	1	— 8	— 8	64	49	49
40.0- 49.9	45	5	— 7	— 35	245	36	180
50.0- 59.9	55	422	— 6	— 2,532	15,192	25	10,550
60.0- 69.9	65	1,600	— 5	— 8,000	40,000	16	25,600
70.0- 79.9	75	3,661	— 4	— 14,644	58,576	9	32,949
80.0- 89.9	85	6,004	— 3	— 18,012	54,036	4	24,016
90.0- 99.9	95	10,564	— 2	— 21,128	42,256	1	10,564
100.0-109.9	105	13,136	— 1	— 13,136	13,136	0	0
110.0-119.9	115	15,048	0	0	0	1	15,048
120.0-129.9	125	13,116	1	13,116	13,116	4	52,464
130.0-139.9	135	8,219	2	16,438	32,876	9	73,971
140.0-149.9	145	4,565	3	13,695	41,085	16	73,040
150.0-159.9	155	4,519	4	18,076	72,304	25	112,975
160.0 169.9	165	1,051	5	5,255	26,275	36	37,836
170.0-179.9	175	988	6	5,928	35,568	49	48,412
180.0-189.9	185	82	7	574	4,018	64	5,248
190.0-199.9	195	91	8	728	5,824	81	7,371
200.0-209.9	205	17	9	153	1,377	100	1,700
210.0-219.9	215	10	10	100	1,000	121	1,210
220.0-229.9	225	6	11	66	726	144	864
240.0-249.9	245	2	13	26	338	196	392
250.0-259.9	255	2	14	28	392	225	450
270.0-279.9	275	1	16	16	256	289	289
310.0-319.9	315	2	20	40	800	441	882
340.0-349.9	345	2	23	46	1,058	576	1,152
		83,114		— 3,210	460,518		537,212

$N = 83{,}114$

பிரிவு இடைவெளி = 10 சென்டுகள்

c (பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில்) $= \dfrac{-3210}{83114} = -.03862$

c^2 (பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில்) $= \cdot 00149$

s^2 (பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில்) $= \dfrac{460518}{83114} = 5.54080$

s^2 (பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில்) $= s_a^2 - c^2 = 5.54080 - 00149 = 5.53931$

s (பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில்) $= 2.35357$

s (மூல அலகுகளில்) $= 2.35359 \times 10$ சென்டுகள் $= 23.5357$ சென்டுகள்

பட்டியல் 5-2-ல் காணப்படும் பரவலின் மாறுபாடு

$$s^2 = (23 \cdot 5357)^2 = 553 \cdot 93$$

இதனை 5-2 பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு நேரிடையாகவே கணக்கிடலாம்; பிரிவு இடைவெளி அலகுகளிலுள்ள s^2(5·5393)ஐப் பிரிவு இடைவெளியின் வர்க்கத்தால் (100) பெருக்க, விடை கிடைக்கும்.

தொகுப்பதனால் ஏற்படும் பிழைகளுக்குத் திருத்தம்: முன்னொரு பகுதியில் அலைவுப் பட்டியலில் கணிப்பீடு செய்யும்போது, ஒரு பிரிவிலுள்ள மதிப்புகள் யாவும் பிரிவின் மையப் புள்ளியைச் சார்ந்து செறிந்திருப்பதாக எடுத்துக்கொண்டோம். அதாவது, குறிப்புகள் யாவும் பிரிவின் எல்லைகளுக்கிடையே சீராகப் பரவியிருப்பதாகவும் கொண்டோம். உண்மையில் இந்த எடுகோளுக்கு ஆதாரமில்லை. 5-2 பட்டியலின் கட்டுக்கோப்பைக் கவனிப்போமானால், இரு முனைகளிலிருந்தும் முகட்டுப் பிரிவை நோக்கி நெருங்க நெருங்க விவரங்களின் செறிவு அதிகமாவதைப் பார்க்கலாம். இதிலிருந்து, விவரங்கள் தொடர் மாறியினைப் பற்றியதானால் செறிவின் அதிகரிப்பு அப் பிரிவிலடங்கும் குறிப்புகளோடு, பிற பிரிவுக் குறிப்புகளையும்பற்றிய ஒரு சிறப்பியலைக் காட்டுகிறது என்று ஊகிக்கலாம். பொதுவாகவே, ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியிலும் முகட்டை நோக்கியுள்ள பாதிப் பகுதியில், முகட்டுக்குத் தொலைவிலுள்ள மற்றப் பாதிப் பகுதியைவிட அதிகக் குறிப்புகள் அடங்கியிருக்கும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட பிரிவிலுள்ள குறிப்புகளின் சராசரி அந்த மையப் புள்ளியோடு ஒன்றாது; மையப் புள்ளியிலிருந்து முகட்டின் திசை நோக்கி விலகியே இருக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட பரவல் ஓரளவுக்காவது சமச்சீராக இருக்குமானால் சராசரியினைக் கணக்கிடும்போது ஏற்படும் பிழை ஒழுங்கு முறையாக இருக்காது; ஏனெனில், சராசரியிலிருந்து ஒருபுறத்தே அளக்கப்படும் விலக்கங்களில் ஏற்படும் நேர்பிழைகள் (positive errors), மறுபுறத்தே அளக்கப்படும் விலக்கங்களின் எதிர்பிழைகளால் (negative errors) சரி செய்யப்படும். ஆனால், தரவிலக்கக் கணிப்பிலும், மாறுபாட்டின் கணிப்பிலும் செய்வதுபோல, விலக்கங்களை வர்க்கமாக்கும்போது பிழை ஒழுங்குமுறையாக இருக்கும். (மொத்தப் பரவலின் சராசரியிலிருந்து) ஒரு பிரிவின் மையப் புள்ளியின் விலக்கத்தின் வர்க்கம், அந்தப் பிரிவில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள குறிப்புகளின் சராசரிக்கும் பரவலின் சராசரிக்குமுள்ள விலக்கத்தின் வர்க்கத்தினும் கூடுதலாக இருக்கும். எனவே, 5-2 பட்டியலில் கண்டபடி தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களின் விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதல், விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் உண்மைக்கூடுதலைவிட அதாவது தொகுக்கப்படாத விவரங்களிலிருந்து கண்டறியக்கூடிய கூடுதலைவிட—பெரிதாக இருக்கும்.

டபிள்யு. எஃப். ஷெப்பர்ட் (W. F. Sheppard) (Ref. 139) என்பவர், தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து கிடைக்கின்ற மாறுபாட்டைப் பயன்படுத்தினுல், பிரிவு இடைவெளியின் வர்க்கத்தில் 12-ல் 1 பங்கு பிழை ஏற்படும் என்று கண்டறிந்துள்ளார். இது ஏற்படக்கூடிய இரண்டு சூழ்நிலைகள் பின்வருமாறு :

1. தொகுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள் தொடர்மாறியினைக் குறித்தனவாக இருக்கவேண்டும்.
2. இரு முனைக் கோடிகளையும் நோக்கி அலைவுகள் சரிந்து செல்லவேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட பரவலுக்குப் பொருத்தப்படுகிற அலைவு வளைகோடு, இரு வால்புறத்திலும் 'உயர் தொடுகை' (high contact) என்ற பண்பினைப் பெற்றிருக்க வேண்டும் என்பதையே இரண்டாம் நிபந்தனை வரையறை செய்கிறது.

ஷெப்பர்டினுடைய (Sheppard) திருத்தங்களைக் கையாளும் முறை மிக எளிது. s^2 என்பது பிழை திருத்தப்படாத மாறுபாடானுல் (5-2 பட்டியலிலுள்ள மாறுபாட்டின் மதிப்பு 5·53931),

$$\text{திருத்தப்பட்ட மாறுபாடு} = s^2 - \frac{1}{12} \qquad (5.6)$$

விலக்கங்கள் மூல அலகுகளிலிருந்து, h என்பது அந்த அலகுகளில், பிரிவு இடைவெளியைக் குறிக்குமானுல்,

$$\text{திருத்தப்பட்ட மாறுபாடு} = s^2 - \frac{h^2}{12} \qquad (5.7)$$

இந்தத் திருத்தத்தை 5-2 பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவைகளுக்குத் தருவோமானுல், பிரிவு இடைவெளி அளவுகளில் திருத்தப்பட்ட மாறுபாடு 5.45598, மூல அலகுகளில் திருத்தப்பட்ட தரவிலக்கம் 23.3580 சென்டுகள்.

மேற்குறிப்பிட்ட அடிப்படையான நிபந்தனைகளுக்கு இணங்காத சமயத்தில் (U வடிவமுடைய பரவல், J வடிவமுடைய பரவல், மற்றும் மிகுந்த கோட்டமுடைய பரவல்கள்) ஷெப்பர்டு திருத்தங்களைச் செய்வோமானுல், மாறுபாடு, தரவிலக்கம் ஆகியவற்றின் மதிப்பீட்டில் பிழை திருத்தப்படுவதற்குப் பதிலாக மேலும் அதிகரிக்கும். மேலும், பட்டியலமைந்த குறிப்புகளின் எண்ணிக்கை குறைவானதானுல், அதாவது 500-க்கும் குறைவாக இருக்குமானுல், இந்தத் திருத்தத்தை மேற்கொள்ளக்கூடாது.

சார்லியர் (Charlier) **சரிபார்க்கும் முறை :** 5-2 பட்டியலில் 7ஆவது 8ஆவது பத்திகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு நமது கணிப்பினைச் சரிபார்க்கலாம். தரவிலக்கத்திற்குத்

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட எதேச்சை மூலத்திற்குப் பதிலாக, ஒரு பிரிவு இடைவெளி கீழே தள்ளி ஒரு மூலத்தைத் தேர்ந்தெடுத்து விலக்கங்களை அளப்போமானால், $d'+1$-க்குச் சமமான மதிப்புகள் கிடைக்கும். 7ஆவது பத்தியில் இம் மதிப்புகளின் வர்க்கங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றோடு இணையான அலைவுகளைப் பெருக்கினால் கிடைக்கக்கூடிய அளவுகள் 8ஆவது பத்தியில் தரப்பட்டுள்ளன; இவற்றின் கூட்டுத் தொகை 537,212. இக் கூடுதல் தரவிலக்கக் கணிப்புக்குக் கிடைத்துள்ள மதிப்புகளோடு பின்வருமாறு தொடர்பு பெற்றுள்ளது. எப்படியெனில்,

$$\Sigma f(d'+1)^2 = \Sigma f[(d')^2 + 2d' + 1]$$
$$= \Sigma f(d')^2 + 2\Sigma fd' + \Sigma f$$

அல்லது $$\Sigma f(d'+1)^2 = \Sigma f(d')^2 + 2\Sigma fd' + N \qquad (5.8)$$

மேற்கண்ட கடைசிச் சமன்பாட்டில் இந்த மதிப்புகளைப் பதிலிட்டு, 5-2 பட்டியலிலுள்ள கணிப்புகளைச் சரிபார்ப்போமானால்,

$$537,212 = 460,518 - 6,420 + 83,114$$
$$= 537,212$$

அலைவுப் பரவலாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள குறிப்புகளுக்குத் தரவிலக்கத்தைக் கணிக்கும் முறையில் கையாளப்படும் செயல்முறை வழிகளின் சுருக்கம் பின்வருமாறு :

1. பரவலின் மையத்திற்கு அருகே ஒரு பிரிவின் மையப் புள்ளியை எதேச்சை மூலமாகத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

2. ஒவ்வொரு பிரிவின் குறிப்புகள் மேற்சொன்ன புள்ளியிலிருந்து அடையும் விலக்கத்தைப் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் அளக்கவும். இதற்கிசைந்த பிரிவு அலைவுகளோடு பெருக்கவும்.

3. இந்த விலக்கங்களின் இயற்கணிப்புக் கூடுதலை N-ஆல் வகுக்கவும் இதன்மூலம் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் c கிடைக்கும். c^2ஐக் கணக்கிடவும்.

4. விலக்கங்களை வர்க்கங்களாக்கி, அவற்றுக்கிசைந்த பிரிவு அலைவுகளைப் பெருக்கவும்.

5. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலை N-ஆல் வகுக்கவும். இதனின்று பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் s_a^2 கிடைக்கும்.

6. $s^2 = s_a^2 - c^2$ என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து s^2ஐக் கணக்கிடவும். இதன் வர்க்கமூலத்தைக் கண்டால், பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் s கிடைக்கும்.

7. மேற்கண்டபடி கிடைத்த sஐப் பிரிவு இடைவெளியால் பெருக்க, மூல அலகுகளில் s கிடைக்கும்.

முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டை மதிப்பிட வேண்டுமானல்,

$$s'^2 = \frac{\Sigma d^2}{N-1}$$

என்ற வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தவும். அல்லது

$$s'^2 = s^2 \frac{N}{N-1}$$

என்பதனின்றும் மதிப்பீடு பெறலாம்.

தரவிலக்கத்தின் சில பண்புகளேயும், பிற சிதறல் அளவுகளோடு அதற்குள்ள தொடர்பையும் பின்னர் காண்போம்.

சராசரி விளக்கம்

சற்று உபயோகம் குறைந்த மற்றுமொரு சிதறல் அளவை பின்வருமாறு கிடைக்கிறது. மாதிரியின் மைய மதிப்பிலிருந்து ஒவ்வொரு குறிப்பின் விலக்கத்தையும் தனித்த எண்ணுக (absolute terms) அளந்து இவற்றின் சராசரியைக் காணும் முறையே இது.

பட்டியல் 5–3

சராசரி விலக்கக் கணிப்பு

X	f	d	
3	1	6	$M=9$
6	1	3	$M.D. = \frac{18}{5} = 3.6$
9	1	0	
12	1	3	
15	1	6	
		18	

5·3 பட்டியல்மூலம் ஓர் எளிய எடுத்துக்காட்டு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதில் சராசரி (கூட்டுச் சராசரியும் இடைநிலேயும் ஒன்றி) 9 என்ற மதிப்பைப் பெற்றிருக்கிறது. இயற்கணிப்புக் குறிகளேக் (algebraic signs) கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ளாது, விலக்கங்களேக் கூட்டி, கூடுதலே மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுக்கவேண்டும். இச் செயல்முறையைப் பின்வரும் வாய்பாட்டால் எழுதலாம் :

$$M.D. = \frac{\Sigma |d|}{N} \qquad (5.9)$$

இதில், | | என்பது இயற்குறிகளேக் கணக்கிலெடுத்துக்கொள்ளவில்லே என்பதனேக் குறிக்கிறது.

பொதுவாகக் கூறவேண்டுமானல், அளவைகளின் தொடரொன்றுக்குச் சராசரியிலிருந்தோ, இடைநிலேயிலிருந்தோ பெறுகின்ற விலக்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியே சராசரி விலக்கமாகும். கூட்டும்போதும், சராசரி எடுக்கும்போதும் விலக்கங்களின் இயற்குறிகளைக் கணக்கிலெடுத்துக் கொள்வதில்லை. இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம் மிகவும் குறைவாக இருக்குமாதலால், சராசரி விலக்கத்தைக் காண்பதற்கு இடைநிலையினின்று விலக்கங்களை அளப்பதே நல்லது.

குறிப்புகள் அதிகமாக இருக்கும்போது சராசரி விலக்கத்தினைக் காண்பது அத்துணை எளிதன்று. குறிப்புகள் அலைவுப் பரவல்களாகத் தொகுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, இடைநிலையிலிருந்து விலக்கங்களை அளந்து, பிரிவு அலைவெண்களால் பெருக்கலாம்; அல்லது இடைநிலையையோ (சராசரியையோ)உடையபிரிவின் மையப்புள்ளியிலிருந்து விலக்கங்களை அளந்து, பின்னர் இடைநிலைக்குப் (சராசரி) பதிலாக, பிரிவின் மையப் புள்ளியை மூலமாக எடுப்பதனல் ஏற்படக்கூடிய பிழையைத் திருத்திக்கொள்ளலாம். மிக விரிவாக ஆய்வுகள் தேவைப்படாதபொழுது கொடுக்கப்பட்ட குறிப்புகள் கொஞ்சமாக இருக்கும்போதும் சராசரி விலக்கம் காண்பது பயனுள்ளது. இதன் தர்க்கரீதியான, கணிதரீதியான குறைபாடுகள் விலக்கங்களைக் கணிக்கும்போது (நேர். எதிர்க்குறிகளைப் புறக்கணிப்பது இயற்கணிதரீதிப்படி பொருத்தமில்லாதது), இதனை விரிவாகப் பயன்படுத்த இடந்தருவதில்லை. அலைவுப் பரவலாக விவரங்கள் அமைந்திருக்கும்போது இதனை மிகக் குறைவாகப் பயன்படுத்துகிறோம்.

மதிப்பளவை (Quantiles)

கொடுக்கப்பட்ட x மாறியின் பரவலின் முக்கியமான தன்மையான மாறுபடும் தன்மையைத் தேர்ந்தெடுத்த சில மதிப்பளவைகளால் அறியலாம். மதிப்பளவை என்பது x அளவுத் திட்டத்தில் மொத்த அலைவுகளைக் குறிப்பிட்ட விகிதங்களில் பிரிக்கும் புள்ளிகளை வரைசெய்யும் அளவைகளுக்குப் பொதுவாகப் பயனுகும் பெயர். நாம் முன்னர் கண்டபடி, இடைநிலை என்பது மொத்த அலைவுகளை இரண்டு சம பங்குகளாகப் பிரிக்கும் நடு மதிப்பளவை. கால்மானம் (quartiles) என்பது அதனுடைய பெயரே குறிக்கின்றபடி மொத்த குறிப்புகளின் எண்ணிக்கையைப் பரவலின் நான்கு சமப் பிரிவுகளாகப் பிரிக்கும் மதிப்புகள். அதாவது, முதல் கால்மானம் என்பது x அளவுத் திட்டத்தில், மொத்தக் குறிப்புகளில் கீழே கால்பங்கு இருக்குமாறும், மேலே முக்கால் பங்கு இருக்குமாறும் பிரிக்கின்ற புள்ளி. (இரண்டாவது கால்மானமும் இடைநிலையும் ஒன்றே என்பது தெளிவு.) பதின்மானங்கள் என்பன மொத்த அலைவுகளைப் பத்து சம பங்குகளாகப் பிரிப்பன; சதமானம் என்பன 100

சம பங்குகளாகப் பிரிப்பன. மதிப்பளவைகள் மிகவும் எளியன; எளிதில் அறிந்துகொள்ளக்கூடியன; சிதறலின் தன்மையையும் அளவையும் நன்கு உணர்த்துவன. ஒப்புமை விலைகளின் (price relatives) பரவல்களிலும், பிற மாறிகளிலும் வெஸ்லி சி. மிட்சல் (Wesley C. Mitchel) மிக விரிவாக இவ் வளவைகளைப் பயன்படுத்தியுள்ளார் (து.நூ.ப. 105, 106).

மதிப்பளவை இடம் கண்டறிவதற்கு எப்பொழுதுமே x அளவுத் திட்டத்தின் கீழ்முனையிலிருந்து எண்ண ஆரம்பிக்கவேண்டும். கீழ் வரும் இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளும் இச் செயல்முறையை விளக்கும்.

முதல் கால்மானக் கண்டுபிடிப்பு (Q_1), குடும்ப வருமானங்கள் (பட்டியல் 4-11 பார்க்கவும்)

$$N/4 = 9{,}319.75$$
$$Q_1 = \$\,1{,}500 + (2{,}385.75/3{,}280) \times \$\,500$$
$$= \$\,1{,}863.68$$

எட்டாவது பதின்மானக் கண்டுபிடிப்பு (D_8), குடும்ப வருமானங்கள் (பட்டியல் 4-11 பார்க்கவும்)

$$N/10 = 3{,}727.9 \qquad D_8 = \$4{,}500 + (1{,}491.2/1{,}752) \times \$500$$
$$8N/10 = 29{,}823.2 \qquad = \$4{,}925.57$$

இடைநிலையைப்போன்று, மதிப்பளவையும், (தொகுக்கப்படாத) மாறிகளின் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கிடையே அமையும்போது, மற்ற மதிப்புகளைக் கண்டுபிடித்தல் இயலாது. அத்தகைய சமயங்களில் இரண்டு எல்லை மதிப்புகளுக்கிடையே நடுமதிப்பைத் தேர்ந்து கொள்கிறோம்.

கால்மான வீச்சு (The Quartile Deviation)

சிதறலை மதிப்பளவைகளால் ஆராயும்போது, தரமான விலக்கம் அல்லது சராசரி விலக்கம்போன்ற ஒரு தனி அளவை கிடைக்காது. ஆனால், கால்மானங்களைக்கொண்டு வேறுபாட்டிற்கு அப்படி ஒரு தனி அளவையைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இரு கால்மானங்களுக்கிடையேயுள்ள வீச்சில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள குறிப்புகளில் ஒரு பாதி அடங்கிவிடுகின்றது. செறிவு அதிகமானால் இந்த இடைவெளி குறைவுபடுகிறது. எனவே, இந்த இரு கால்மானங்களுக்கு இடையேயுள்ள உறவினைக்கொண்டு ஒரு திருத்தமான சிதறல் அளவையைக் கண்டுபிடிக்க முடியும்; கால்மான வீச்சு எனப்படும் அளவை ஒன்றாவது, மூன்றாவது கால்மானங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரத்தின் பாதியாகும். அதாவது Q_1 என்பது

முதல் கால்மானமாகவும், Q_3 என்பது மூன்றும் கால்மானமாகவும், $Q.D.$ என்பது கால்மான வீச்சாகவும் இருந்தால்,

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \tag{5.10}$$

முதல், மூன்றும் கால்மானங்களுக்கு நடுப் பாதியில் அளவுத் திட்டத்திலுள்ள மதிப்பை K என்ற புள்ளியால் குறித்தால், அலைவுப் பரவலின் மொத்த அளவைகளில் ஒரு பாதி $K \pm Q.D.$ என்ற வீச்சுக் குள் அடங்கும். எடுத்துக்காட்டாக 5-2 பட்டியலில் கண்ட விவரமான 1946ஆம் ஆண்டு ரசாயனத் தொழிற்சாலைத் தொழிலாளர்கள் மணி வருமானம் பற்றிய (சென்டுகளில்) விவரத்தில் கண்டபடி,

$$\begin{aligned} Q_1 &= 98.60 \\ Q_3 &= 129.07 \\ Q.D. &= \frac{129.07 - 98.60}{2} \\ &= 15.235 \\ K &= 98.60 + 15.235 \\ &= 113.835 \end{aligned}$$

எனவே, 113.835 ± 15.235 என்ற வீச்சுக்குள் மொத்த அளவைகளில் ஒரு பாதி அடங்குகிறது. இந்த விளக்கத்தோடு, ரசாயனத் தொழிலாளர்களது அந்த வருடத்திய மணி வருமானக் கூட்டுச் சராசரியும் சேர்ந்து பரவலைப்பற்றி உபயோகமான வருணனை ஒன்றைத் தெரிவிக்கிறது. முழுவதும் சமச்சீரான பர வலில் K-ன் மதிப்பு இடைநிலையோடு ஒன்றும். (அதாவது, இடை நிலை Q_1 லிருந்து Q_3 வரையுள்ள அளவுத் திட்டத்தின் நடு மையத் தில் அமையும்.) கூலி விகிதங்களில் பரவல் கிட்டத்தட்ட சமச் சீராக இருப்பதால், இடைநிலையின் மதிப்பு 113.89 சதங்களாகவும், K-ன் மதிப்பு 113.835 சதங்களாகவும் ஒப்புமையுடையனவாக இருக் கின்றன.

நிகழ் பிழை (The probable error): வானியல் அளவைகளிலும், மற்றப் பருப்பொருள் அளவைகளிலும் மாறிலியான ஒரே அளவை யில், பலர் கண்டறியும்போது வேறுபாடுகள் இருக்கக் காண்கிறோம். எனவே, கண்டறியப்படும் முடிவுகளை எந்த அளவிற்கு ஏற்றுக் கொள்ளலாம் என்பதுகுறித்து மாறுபாட்டிற்கு ஓர் அளவையைக் காண்பது இன்றியமையாததாகிறது. அத்தகைய சமயங்களில் நிகழ் பிழை (probable error) என்ற அளவையைக் கையாளுவது வழக்கம். கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டு ஒன்றில், எந்த அளவு குறிப்பு களின் அரைவாசியின் பிழைகளால் விஞ்சப்படுகிறதோ அதனை நிகழ் பிழை ($P.E.$) என்கிறோம்.

இயல்நிலைப் பரவலில்—அளவைகள் பலவற்றில் ஏற்படக்கூடிய பிழைகளின் பரவல்கள் இதனையொட்டியே அமையக் காண்கிறோம். நிகழ் பிழை 0·6745σ-க்குச் சமம் ஆகும். இயல்நிலைப் பரவலில், நிகழ் பிழைக்குச் சமமான தூரத்தைக் கூட்டுச் சராசரியின் இரு புறத்திலும் வரம்புகட்டி அமைத்தால், அதற்குள் மொத்தக் குறிப்பு களுள் ஒரு பாதி அடங்கிவிடும்.

முதன்முதலில் பயன்படுத்தப்பட்ட துறையேயன்றிப் பிற துறை களிலும் இந்த வேறுபாட்டு அளவை கையாளப்படுவதால், நிகழ் பிழை என்ற பெயர் சில சமயங்களில் தவறான பொருள்களைத் தருகின்றது. அச் சமயங்களில் நிகழ் விலக்கம் என்ற பெயரைப் பயன்படுத்துவது பொருத்தமுடையதேயாகும். அதாவது, சராசரியி லிருந்து மொத்த விலக்கங்களில் ஒரு பாதி மிகைபட்டிருக்கும் தூர மாகும்.

இயல்நிலைப் பிழை விதிக்குக் கட்டுப்பட்டு அமைந்துள்ள பரவ லில்மட்டுமே, சிதறலின் அளவையாக நிகழ்பிழையைக் கையாள்வது மிகவும் ஏற்புடையதாகும். அத்தகைய பரவல்களில்தான் நிகழ் பிழை மிகவும் பொருத்தமான, உறுதியான பொருளைப் பெற்றிருக் கிறது. நிகழ் பிழையைக் கோட்டமுற்ற பரவலில் பயன்படுத்துவது தவறு; பயன்படுத்துவதும் முறையன்று.

மாறுபாட்டு அளவைகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு

இதுவரை கண்ட வேறுபாட்டு அளவைகளுக்கு இடையே ஒப்புமை காட்டி, அவைகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்புகளையும் சிறப்புகளையும் தொகுத்துக் காண்போம்.

1. அளவுத் திட்டத்தில் எல்லாக் குறிப்புகளும் அடங்குகின்ற தூரமே வீச்சு ஆகும்.
2. கால்மான வீச்சு அல்லது கால்மான விலக்கம் என்பது அளவுத் திட்டத்தின் இருபுறமும் இரு கால்மானங்களுக்கு இடையே மொத்தக் குறிப்புகளில் ஒரு பாதி அடங்குமாறு அமைகின்ற தூரமாகும்.
3. இயல்நிலைப் பரவல்கள் அல்லது அதிகக் கோட்டமில்லாத பர வல்கள் ஆகியவற்றில் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து பெற்ற சராசரி விலக்கம் தரமான விலக்கத்தில் 4/5 பாகமாகும். கூட்டுச் சராசரியினை மையமாகக்கொண்டு $7\frac{1}{2}$ பங்கு சராசரி விலக்கத்தை எடுத்துக்கொண்டால், அந்த வீச்சுக்குள் மொத்தக் குறிப்புகளில் 99 சதவீதம் கிட்டத்தட்ட அடங்கும்.

4. இயல்நிலைப் பரவல்களிலும், சிறிதே கோட்டமடைந்த பரவல்களிலும் சராசரியின் இருபுறமும் தரவிலக்கத்திற்குச் சமமான தூரத்தை அளந்துவைத்தால், மூன்றில் இருபங்கு குறிப்புகள் அதனுள் அடங்கும் (இயல்நிலைப் பரவலில் மொத்தக் குறிப்புகளில் 68.27 சதவீதம் அடங்கும்). சராசரியின் இருபக்கங்களிலும் தரவிலக்கத்தின் இருபங்கு தூரத்தை அளந்துவைத்தால், 95 சதவிகிதக் குறிப்புகள் தோராயமாக அதனுள் அடங்கும் (இயல்நிலைப் பரவலில் 95·45 சதவீதம் அடங்கும்). சராசரியின் இருபக்கத்திலும் மூன்று பங்கு தரவிலக்க தூரத்தை அளந்து வைத்தால், அதனுள் 99 சதவிகிதக் குறிப்புகள் அடங்கும் (இயல்நிலைப் பரவலில் 99·73 சதவீதம் அடங்கும்). சராசரியை மையமாகக் கொண்ட ஆறு பங்கு தரவிலக்க தூரமான வீச்சுக்குள் 99 சதவிகிதக் குறிப்புகள் அடங்கிவிடும் என்ற பொது விதி, கணிப்புகளைச் சரிபார்க்க உதவுகிறது.

6.5 படத்தின்மூலம் இயல்நிலைப் பரவலில் தரவிலக்கத்தின் சிறப்பினைக் கண்டுகொள்ளலாம்.

5. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலின் நிகழ் பிழை 0.6745σ-க்குச் சமமாக இருக்கும். சராசரியினை மையமாகக் கொண்டு இருமடங்கு நிகழ் பிழையை வீச்சாகக் கொண்டால், அதனுள் மொத்தக் குறிப்புகளில் 50 சதவீதம் அடங்கும். சராசரியை மையமாகக் கொண்டு 8 மடங்கு நிகழ் பிழையை வீச்சாக எடுத்துக் கொண்டால், மொத்தக் குறிப்புகளில் 99 சதவீதம் தோராயமாக அடங்கும்.

முக்கியமான மாறுபாட்டு அளவைகளின் சிறப்புப் பண்புகள்

வீச்சு

1. வீச்சை எளிதில் கணக்கிடலாம். அதன் சிறப்பு எளிதில் புரியும். மாறுபாட்டினைத் தோராயமாக அளப்பதற்கு வீச்சு பயன்படும்.

2. இரண்டு புறக்கோடிகளிலுள்ள மதிப்புகளின் அடிப்படையில் வீச்சு தீர்மானிக்கப்படுகின்றது. ஒரு தனிமதிப்பு சேர்க்கப்படுவதனாலோ, நீக்கப்படுவதனாலோ இந்த மதிப்பில் பெருத்த மாற்றம் விளையக்கூடும்; எனவே, இது மிகவும் நிலையற்றதோர் அளவை.

3. இருமுனை கோடி குறிப்புகளுக்கிடையேயுள்ள பரவலின் தன்மையைப்பற்றி இந்த அளவை எந்தச் செய்தியையும் கூறுது.

கால்மான விலக்கம்

1. மாறுபாட்டு அளவைகளில் ஒன்ருன கால்மான விலக்கத்தை எளிதில் கணக்கிடலாம்; சுலபமாகப் புரிந்துகொள்ளலாம். மாறுபாட்டின் வீதத்தைத் தோராயமாக அறிய வீச்சு பயன்படுகிறது.

2. எந்தக் குறிப்பிட்ட சராசரியினையும் ஒட்டி கால்மான விலக்கம் அமைவதில்லை.

3. முதலாவது, மூன்ருவது கால்மானங்களுக்கு இடையேயும் புறத்தேயும் அமைந்த குறிப்புகளின் பரவல் இந்த அளவையைப் பாதிப்பதில்லை. இரண்டு முற்றிலும் வேறுபட்ட பரவல்களுக்குக் கால்மான மதிப்புகள் ஒன்ருக இருக்குமானுல், கால்மான விலக்கமும் ஒன்ருகவே இருக்கும். தனிப்பட்ட குறிப்புகளின் விலக்கங்கள் இதனைப் பாதிப்பதில்லையாதலால் செம்மையான அளவையாக இதனை ஏற்பதற்கில்லை.

4. இயற்கணித முறையிலான கணிப்புகளுக்குக் கால்மான விலக்கம் ஏற்றதல்ல.

சராசரி விலக்கம்

1. சராசரி விலக்கம் ஒவ்வொரு குறிப்பின் மதிப்பினுலும் பாதிக்கப்படுகிறது. பரவலில் தனிப்பட்ட குறிப்புகளுக்கும், இடைநிலைக்கும் (சராசரிக்கும்) உள்ள சராசரி வேறுபாட்டை எடுத்துக் காட்டுவதால் இது தனிச் சிறப்புடையது.

2. புறக்கோடி (extreme) விலக்கங்களால், தர விலக்கத்தைவிடச் சராசரி விலக்கம் குறைந்த அளவிலேயே பாதிக்கப்படும்.

3. கணித ரீதியாகப் பார்க்கப்போனுல் சராசரி விலக்கமானது தர விலக்கத்தைப் போன்று, காரண காரிய அடிப்படையில் அமைந்ததன்று; வசதியானதுமன்று.

தர விலக்கம்

1. ஒவ்வொரு குறிப்பின் மதிப்பும் தர விலக்கத்தைப் பாதிக்கிறது.

2. (சராசரி விலக்கக் கணிப்பில்) இயற்குறிகளைப் புறக்கணிப்பது, இயற்கணிதத்தின்படி குற்றமுடைய முறை; (தர விலக்கக் கணிப்பில்) விலக்கங்களின் வர்க்கங்களைக் கண்ட பின்னரே கூட்டுவதால் இத் தவற்றைச் செய்வதில்லை.

3. தர விலக்கம் கணித அடிப்படையில் திட்டமான பொருளுடையது; இயற்கணித செயல்முறைக் கணிப்புகளுக்கு ஏற்றது.

4. பொதுவாக மாதிரிகளில் ஏற்படும் ஏற்றத்தாழ்வுகளினால் தர விலக்கம் மற்றச் சிதறல் அளவைகளைவிடக் குறைவாகவே பாதிக்கப்படுகிறது.

5. இயல்நிலைப் பிழை வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்புகளை வரையறை செய்வதற்குத் தர விலக்க அலகுகளையே பயன் படுத்துவது வழக்கம். (6ஆவது அத்தியாயம் காண்க.) எனவே, மாதிரி முறைக்கும் புள்ளிவிவர உய்த்துணர்வுகளிலும் தர விலக்கம் நடைமுறையில் பயன்மிகுந்து அமைகிறது.

நிகழ் பிழை

1. இயல்நிலை விதிக்குக் கட்டுப்படும் பரவலில், நிகழ் பிழைக்குச் சிறப்பான பொருள் உண்டு. மற்றப் பரவல்களுக்கு இந்தப் பொருள் பொருந்தாது. ஆகையால், அவற்றிற்கு இதைப் பயன்படுத்தல் ஆகாது.

2. இயல்நிலைப் பரவலில் நிகழ் பிழைக்கும் தர விலக்கத்திற்குமுள்ள உறவு, தர விலக்கத்தின் மதிப்பினைத் தீர்மானிப்பதற்குப் பயன்படுகிறது.

3. மாதிரிப் பிழைகளின் அளவினை வெளியிடும் குறியீடாகவே நிகழ் பிழை வழக்கமாக வந்தது. தற்போது அதன் பணியைச் செய்யப் பொதுவாக, தரப் பிழை பயன்படுத்தப்படுகிறது. (7, 8 அத்தியாயங்களில் இதனை ஆராய்வோம்.) மாதிரிப் பிழை யினைப் பயன்படுத்துவது ஏற்றதன்று.

மேற்கண்ட சிதறல் அளவைகளையெல்லாம் குறித்த காரியங் களுக்காகவே பயன்படுத்துகிறோம். ஆனால், மிகவும் திருத்தமான மதிப்பினை எதிர்பார்க்கும் எல்லாச் சமயங்களிலும் தர விலக்கமே சிறந்த பொது அளவையாக விளங்குகிறது. பார்க்கப்போனால், நிகழ் பிழை தர விலக்கத்தின் ஒரு பின்னமேயாகும்; வரையறை செய்யப்பட்ட ஒருசில துறைகளில்தான் அது பயன்படுகின்றது.

ஒப்பீட்டு மாறுபாட்டின் அளவை
(The Measurement of Relative Variation)

முந்திய பகுதியில் ஒப்பீடு இல்லாத தனித்த வேறுபாட்டைப் பற்றி ஆராய்ந்தோம். விவரங்கள் தனித்த அலகு அளவைகளால் மாறுபடுவதை வருணிக்கப் பலவகையான சிதறல் அளவைகளைப் பெறும் முறைகளைக் காண்போம். மணிக் கூலி விகிதத்தின்படி தொழிலாளர்களைப் பரவலாகப் பாகுபாடு செய்தால் தர விலக்கம் சென்டுகளில் இருக்கும். எஃகு உற்பத்திக்கேற்ப எஃகு ஆலை களின் பரவலின் தர விலக்கம் டன்களில் இருக்கும். ஒரே பொருளைக்

குறித்த தனிப்பட்ட அலைவெண் பரவல் இருக்குமானல், மூல அலகையே முழுவதற்கும் பயன்படுத்துவது உகந்தது. ஆனல், இரண்டு வேறுபட்ட பரவல்களின் மாறுபாட்டு அளவைகளை ஒப்பு நோக்க வேண்டுமானல் பல சிக்கல்கள் எழுகின்றன. எனவே, அலகு கள் வேறுபட்டால் சிக்கல்கள் எழுவது உறுதி. ஆனல், அலகுகள் ஒத்தனவாக இருக்கும்போதுகூட இதே கோளாறு நேர்கிறது. நாய்களுடைய நிறைகளின் மாறுபாட்டு அளவையும், குதிரைக ளுடைய நிறைகளின் மாறுபாட்டு அளவையும் பவுண்டுகளில்தான் கணக்கிடப்படுகின்றன. குதிரை நிறையின் தர விலக்கம், நாய் நிறையின் தர விலக்கத்தைவிடப் பெரிதாக இருக்குமானல், உடனே முன்னது பின்னதைவிட அதிக வேறுபாடுடையதென முடிவு கட்டி விட முடியாது. தனித்த மாறுபாட்டின் அளவை அதற்குத் தொடர் புடைய சராசரியோடு — விலக்கங்கள் எதிலிருந்து காணப்படுகின் றனவோ அதிலிருந்து—சேர்ந்துதான் பொருளுடையதாக இருக் கிறது. ஒப்புமை செய்வதற்கு, அதனை ஒப்பீட்டு அடிப்படையில் மாற்றி அமைக்கவேண்டியது அவசியம். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட மாறுபாட்டு அளவையை, எதனின்று விலக்கங்கள் அளக்கப்படுகின் றனவோ அந்த சராசரியின் சதவீதமாக அமைத்தலே ஏற்றதெனத் தோன்றுகிறது. இப்போது அந்த அளவு தனித்த உருவிலா (abstract) எண்ணுகிறது; கொடுக்கப்பட்ட குறிப்புகளின் ஒப்பீட்டு மாறுபாட்டுக்கு ஓர் அளவையாகிறது; இதனை மற்றப் பரவல்களில் கண்ட இத்தகைய எண்களோடு ஒப்பிடமுடியும்.

மாற்றக் கெழு (The Coefficient of Variation)

ஒப்பீட்டுமாறுபாட்டினை அளக்க, பொதுவாகப் பயன்படும் அளவை பியர்சனல் (Pearson) கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இதனை மாற்றக் கெழு என்போம்; V என்ற எழுத்தால் குறிப்போம். அது தர விலக்கத்தைக் கூட்டுச் சராசரியின் சதவிகிதமாகக் குறிப்பதாகும். அதாவது,

$$V = \frac{\sigma}{M} \times 100 \qquad (5.11)$$

இவ் வாய்பாட்டை 1946ஆம் ஆண்டு ரசாயனத் தொழிற்சாலைகளில் பணியாற்றும் தொழிலாளர்களது மணி ஊதியப் பரவலில் பயன் படுத்த

$$V = \frac{23{\cdot}54}{114{\cdot}61} \times 100$$

$$= 20{\cdot}54 \text{ சதவீதம்}$$

எனக் கிடைக்கிறது. 1933ஆம் ஆண்டு எஃகுத் தொழி லாளர்களது சராசரி மணி ஊதியத்திற்கு அமைக்கப்பட்ட பரவலில் கண்ட மாற்றக் கெழுவோடு இதனை ஒப்புநோக்கலாம். எஃகுத்

தொழிலாளர்களது மணி ஊதியத் தர விலக்கம் 18·68 சென்டுகள். 1946ஆம் ஆண்டில் ரசாயனத் தொழிலாளர்களுக்கிடையேயுள்ள சிதறலைவிட இது குறைவானது. ஆனால், (மந்த ஆண்டான) 1933-ல் எஃகுத் தொழிலாளர்களது சராசரி மணி ஊதியம் 50·14 சென்டுகள். அவர்களது மாற்றக் கெழு

$$V = \frac{18{\cdot}68}{50{\cdot}14} \times 100$$
$$= 37{\cdot}26 \text{ சதவீதம்}$$

1933-ல் எஃகுத் தொழிலாளர்கள் பெற்ற மணி ஊதியத்தின் ஒப்பீட்டு மாறுபாடு, 1946-ல் ரசாயனத் தொழிலாளர்கள் பெற்ற மணி ஊதியத்தின் ஒப்பீட்டு மாறுபாட்டைவிட அதிகம்; ஆனால், தனித்த மாறுபாடு எஃகுத் தொழிலைப் பொறுத்தவரையில் மிகக் குறைவாக இருக்கிறது.

சராசரியின் மதிப்பாலும் அதோடு தர விலக்கத்தின் அளவாலும் மாற்றக் கெழு பாதிக்கப்படுகிறது. சராசரி, மூலத்தோடு ஒன்றினால் (அதாவது $M = 0$ ஆனால்) சூனியத்தைத் தவிர தர விலக்கத்தின் பிற எல்லா மதிப்புகளுக்கும் V எண்ணிலிக்குச் (infinity) சமமாக இருக்கும். சராசரியின் மதிப்பு கிட்டத்தட்ட சூன்யமாக இருக்கும் பரவல்களுக்கு எடுத்துக்காட்டு (மந்தமானதோர் ஆண்டில் வரி ஊதியத்தின் அடிப்படையில் கார்ப்பரேஷன்களது பரவல்கள்) V-ன் மதிப்பு தெளிவற்றதோர் அளவையாக இருப்பதாகும்.

இடைநிலையைச் சராசரியாகப் பயன்படுத்தினால், V-ஐப் போன்ற மற்றொரு செப்பீட்டு மாறுபாட்டு அளவை கிடைக்கும். அதன் வாய்பாடு $\frac{M.D.}{Md}$. இதுபோலவே, K என்ற அளவை மையப் போக்குக்குப் பயன்படுத்தினால் ஒப்பீட்டு மாறுபாட்டை $\frac{Q.D.}{K}$ என்பதால் அளக்கலாம். தேவையானால் இந்த அளவைகளைச் சதவீதமாகவும் அமைக்கலாம்.

கோட்ட அளவைகள்

முந்திய பகுதிகளில் அலைவுப் பரவல்களின் மையப் போக்கினை வருணனை செய்யவும், செறிவின் அளவைக் கணக்கிடவும், மையப் போக்கையொட்டி சிதறலின் அளவை அறியவும் முறைகள் வகுத்தோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவலில் சமச்சீரின் அளவையும் அல்லது சமச்சீரின் மைய அளவையும் அறிந்துகொள்வதற்கு

மேலுமோர் அளவை தேவைப்படுகின்றது. அதாவது, கொடுக்கப் பட்டுள்ள பரவலில் குறிப்புகள் மைய அளவைச் சார்ந்து சமச் சீருடையனவாக இருக்கின்றனவா அல்லது சமச்சீரின்றி சிதறியுள்ளனவா என்பதனை அறியவேண்டியது அவசியமாகின்றது. இந்த அளவையும் தெரிந்துகொண்டுவிட்டால் அலைவுப் பரவலின் சிறப்பை மூன்று எளிய உறுப்புகளால் கோவைப்படுத்திக் கூற முடியும்—சராசரி ஒன்று, சிதறல் அளவை ஒன்று, கோட்ட அளவை ஒன்று. கோட்ட அளவையாக இரண்டு அளவைகள் வழக்கி லிருக்கின்றன.

அலைவு வளைகோட்டில், சமச்சீரிருக்கும்போது சராசரி, இடைநிலை, முகடு மூன்றும் ஒன்றும். பரவலில் சமச்சீரில்லாதபோது இம் மூன்றும் ஒன்றிலிருந்து ஒன்று விலகும். இவற்றுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடுகளில் சராசரிக்கும் முகட்டுக்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடு பெரிதாக இருக்கும். அதனால், இவ் வேறுபாட்டையே கோட்டத்தின் அளவையாகப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம். இத்தகைய சமயங்களில் ஒப்பீட்டு மாறுபாட்டினை அளந்தபோது செய்ததுபோலவே, விடையைப் புலனாகாத எண்ணாகக் கண்டோமானால், பிற பரவல்களில் கிடைக்கும் இத்தகைய எண்களோடு ஒப்பிட முடியும். இதற்காக பியர்சன் என்பார் பரவலில் சராசரிக்கும் முகட்டுக்கும் உள்ள தனித்த வேறுபாட்டைத் தர விலக்கத்தால் வகுத்துப் பின்வரும் கோட்ட அளவை வாய்பாட்டைக் கண்டார்.

$$sk = \frac{M - Mo}{s} \tag{5·12}$$

சமச்சீரான பரவலில், சராசரியும் முகடும் ஒன்றும்போது இவ் அளவையின் மதிப்பு 0 ஆக இருக்கும். பிற சூழ்நிலைகளில் அளவத் திட்டத்தில் அவ்விரு சராசரிகளும் அமைகின்ற இடத்தைப்பொறுத்து மதிப்பு நேராகவோ (positive), எதிராகவோ (negative) இருக்கும்.[3]

ஓரளவே கோட்டமடைந்த பரவல்களுக்குக் கோட்டத்தின் அளவை பின்வரும் வாய்பாட்டால் எளிதில் மதிப்பிடலாம்.

$$sk = \frac{3(M - Md)}{s} \tag{5·13}$$

இது ஏறக்குறைய முன்னர் கூறிய வாய்பாட்டிற்குச் சமமானது. ஏனெனில், ஓரளவே கோட்டமடைந்த பரவல்களில் சராசரிக்கும் முகட்டுக்கும் நடுவே, இடைநிலை முன்னதிலிருந்து பின்னதற்கு உள்ள தூரத்தில் $\frac{1}{3}$ பங்கு தூரத்தில் முன்னதிலிருந்து அமைந் துள்ளது.

[3] மாதிரி விவரங்களிலிருந்து sk-ஐத் தோராயமாக மதிப்பீடு செய்யும் வழி ஒன்று 6 ஆம் அத்தியாயத்தில் தரப்பட்டுள்ளது.

முகட்டை எளிய முறைகளால் கண்டுபிடிப்பது அரிதாதலால் பியர்சனின் வாய்பாட்டிற்குப் பதிலாக வேறு முறைகளால் கோட்ட அளவினைக் கண்டுபிடிப்பது சில வேலைகளில் எளிதாக இருக்கலாம். பௌலி (Bowley) என்பார் முதல் கால்மானம், மூன்றும் கால்மானம், இடைநிலை ஆகிய மூன்றையும் தொடர்புபடுத்தி ஒரு முறையைக் கண்டார். பரவல் சமச்சீராக இருக்கும்போது இவ்விரண்டு கால்மானங்களும் இடைநிலையிலிருந்து சம தூரத்திலிருக்கும். சமச்சீரில்லாத பரவல்களில் இவ்வாறிருக்காது. q_2 என்பது மேல் கால்மானத்திற்கும் இடைநிலைக்கும் உள்ள தூரத்தையும், q_1 என்பது இடைநிலைக்கும் கீழ்க் கால்மானத்திற்குமுள்ள தூரத்தையும் குறிக்குமாயின், கோட்டத்தை அளப்பதற்குப் பின்வரும் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$sk = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \qquad (5{\cdot}14)$$

இதன் மதிப்பு 0-லிருந்து $\pm$ 1 வரை வேறுபடும். முற்றிலும் சமச்சீரிருக்கும்போது $q_2 = q_1$. எனவே, அளவை 0. இடைநிலையும் ஒரு கால்மானமும் ஒன்றிக்கும் அளவு கோட்டமிருந்தால் q_2 அல்லது $q_1 = 0$ ஆகும்; எனவே, வாய்பாட்டில் கிடைக்கும் மதிப்பு $+1$ அல்லது -1. 0·1 என்ற மதிப்பு கிடைக்குமானால் கோட்டம் சுமாராக இருப்பதைக் குறிக்கிறது என்றும், 0.3 என்ற மதிப்பு கிடைக்குமானால் மிகுந்த கோட்டம் இருப்பதைக் குறிக்கிறதென்றும் பௌலி (Bowley) கூறியுள்ளார்.

இம் முறைப்படி கிடைக்கின்ற அளவைகளின் மதிப்புகள், பியர்சன் வாய்பாட்டின்படி கிடைக்கும் கோட்ட மதிப்புகளோடு ஒப்புடைமை உள்ளன அல்ல.

சிகரத்தன்மை அல்லது அதிகப்படி : தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களில் நான்காவது அளவை ஒன்றைப்பற்றி முன்னர் கூறப்பட்டது. குறிப்புகள் சராசரியினைச் சார்ந்து செறிதலையும் ஓரப்பகுதிகளில் செறிதலையும்பற்றிய தன்மை இது. கர்ட்டாசிஸ் (kurtosis) அல்லது சிகரத்தன்மை (peakedness) பற்றிய அளவைகள் ஆறுவது அத்தியாயத்தில் ஆராயப்படுகிறது.

துணை நூல்கள்

Croxton, F. E. and Cowden, D. J., 'Applied General Statistics,' Chap. 10.

Dixon, W. J. and Massey, F. J. Jr., 'Introduction to Statistical Analysis,' Chap. 3.

Freund, J. E., 'Modern Elementary Statistics,' Chap. 5.

Kendall, M. G., 'The Advanced Theory of Statistics,' 3rd ed., Vol. I, Chap. 3.

Lewis, E. E., 'Methods of Statistical Analysis in Economics and Business', Chap. 4.

Mills, F. C., 'The Behavior of Prices, Chap. 3, sec. 4.

Riggleman, J. R. and Frisbee, I. N., 'Business Statistics,' 3rd ed., Chap. 9.

Rosander, A. C., 'Elementary Principles of Statistics,' Chap. 4.

Spurr, W. A., Kellogg, L. S. and Smith, J. H., 'Business and Economic Statistics,' Chap. 11.

Treloar, A. E., 'Elements of Statistical Reasoning,' Chap. 4.

Waugh, A. E., 'Elements of Statistical Method,' 3rd ed., Chap. 6.

Wilks, S. S., 'Elementary Statistical Analysis,' Chap. 3.

Yule, G. U. and Kendall, M. G., 'An Introduction to the Theory of Statistics,' 14th ed., Chap. 6.

இந்த அத்தியாய முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணை நூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரும் பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டும் (நூலின் இரண்டாம் பாக) இறுதியிலுள்ள துணை நூல் பட்டியலில் காணலாம்.

6. புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு நிகழ் திறம்பற்றிய அறிமுகம்: ஈருறுப்புப் பரவல், இயல்நிலைப் பரவல்.

இந் நூலின் துவக்க அதிகாரத்தில், மாதிரிக்கும் முழுமைத் தொகுதிக்குமுள்ள சிறப்பான வேற்றுமையை வலியுறுத்திக் காட்டினோம்; ஒரு கொடுக்கப்பட்ட மாதிரியில் அடங்கும் கண்டறிந்த குறிப்புகளுக்கும் மேலே சென்று, உய்த்துணர்வுகள் செய்வதே புள்ளியியல் ஆய்வு முறைகளின் முக்கிய குறிக்கோள் என்பதையும் குறிப்பிட்டோம். இதற்கு முந்திய மூன்று அதிகாரங்களில் அலைவுப் பரவல்களை அமைப்பதுபற்றியும், அளப்பதுபற்றியும் கண்டபோது, முழுமைத் தொகுதிகள்பற்றியும் அவற்றின் தன்மைகள்பற்றியும் ஒருசில செய்திகளே தற்செயலாகக் குறிக்கப்பட்டன. கொடுக்கப்பட்ட பெருந்திரளான அளவின விவரங்களை ஒழுங்காக வகைப்படுத்தி அமைப்பதில் எழுகின்ற சிக்கல்களைப்பற்றியும், அங்ஙனம் அமைப்பதனால் கிடைக்கின்ற பரவல்களின் பண்புகளை வரையறை செய்வதுபற்றியுமே முந்திய அதிகாரங்களில் முக்கியமாகக் கண்டோம். புள்ளியியலாரின் பணியில் இங்ஙனம் ஒழுங்குபடுத்துவதும் வரையறை செய்வதும் துவக்கமே; கண்டறிந்த குறிப்புகளுக்கு அப்பாற்பட்ட நிலையில் பொதுமையான முடிவுகளைச் செய்ய வழி வகுப்பன இவை. இப்போது உய்த்துணர்வாகிய முக்கிய சிக்கலை ஆராய்வோம்.

பகுப்புமுறையும் தொகுப்புமுறையும்
(Deduction and Induction)

சில குறிப்பிட்ட விவரங்களை ஆராய்வதன்மூலம் பொதுமையான முடிவுகளைச் செய்யும் அளவை இயல் செயல்முறைக்குத் (logical process) தொகுப்புமுறையென்றும் (induction), அதற்கு மாறாக, பொதுமையான கருத்துகளிலிருந்து குறிப்பிட்ட தனி

முடிவுகளைச் செய்யும் அளவை இயல் செயல்முறைக்குப் பகுப்பு முறை (deduction) யென்றும் பெயர். இவ்விரண்டுக்குமுள்ள வேறு பாடு தெளிவானதே; எனினும், நாம் அவற்றைப் பயன்படுத்து வதனுல் எழுகின்ற அளவை இயல் சிக்கல்கள் பலவாதலால், அது குறித்துச் சுருங்கக் காணவேண்டிய தேவை எழுகிறது.

துணிபொருட் பதப்பிரமாணத்திலிருந்தும் (major premise), பக்கப்பொருட் பதப்பிரமாணத்திலிருந்தும் (minor premise) முடிவு (conclusion) காண்பதே தொகுப்பு முறை வாதமாகிய முக்கூற்று உண்மை (syllogism). அதன் வடிவும் பின்வருமாறு (தொன்று தொட்டுப் பயன்படுத்தப்படும் ஓர் எடுத்துக்காட்டைத் தருவோம்):

துணிபொருட் பதப்பிரமாணம்: மனிதர் யாவரும் இறப்பர்.

பக்கப்பொருட் பதப்பிரமாணம்: சாக்ரடீஸ் ஒரு மனிதர்.
முடிவு: சாக்ரடீஸ் இறப்பார்.

அல்லது

துணிபொருட் பதப்பிரமாணம்: இந்தப் (குறிப்பிடப்பட்ட) பையி லுள்ள மொச்சைகள் யாவும் வெள்ளை நிறத்தன.

பக்கப்பொருட் பதப்பிரமாணம்: இந்த மொச்சைகள் (அதாவது, ஒரு குறிப்பிட்ட கையளவு) இந்தப் பையிலிருந்து எடுக்கப் பட்டன.

முடிவு: இந்த மொச்சைகள் (இந்தக் குறிப்பிட்ட கையளவு) வெள்ளை நிறத்தன.

இத்தகைய முக்கூற்று முடிவுகள் பொருத்தமாக இருப்பதற்குத் தேவைப்படுகின்ற காரணங்கள் மூன்றைக் கவனிப்போம்:

1. கூறப்படுகின்ற கூற்றுகள் யாவும் அகத்தே முற்றிலும் முர ணின்றி இருக்கவேண்டும் (complete internal consistency).

2. முடிவுகள் யாவும் பதப்பிரமாணங்களிலிருந்து தோன்றுவன. அவை உலக முழுவதற்கும் பொருத்தமாக இருக்கக்கூடிய கூற்றுகளின் அடிப்படையில் பிறந்தன.

3. இத்தகைய முக்கூற்று உண்மையைப் பயன்படுத்தும்போது முற்றும் உள்ளடங்கியதோர் அமைப்புக்குள் வேலை செய் கிருேம். தேவைப்படுகின்ற விவரங்கள் யாவும் நமக்குத் தரப்பட்டிருக்கின்றன. அல்லது பதப்பிரமாணங்களிலிருந்து பெறப்படுவனவாக இருக்கின்றன.

முன்னர் தந்த எடுத்துக்காட்டுகளைத் தொகுப்பு முறையினைப் பயன்படுத்தி அமைப்போமானுல் பின்வரும் வடிவம் பெறும்.

பதப்பிரமாணம் : சாக்ரடீஸ், செனுபென், டெமாக்ரட்டீஸ் ஆகியோர் மனிதர்கள்.

பதப்பிரமாணம் : சாக்ரடீஸ், செனுபென், டெமாக்ரட்டீஸ் ஆகியோர் இறக்கக்கூடியவர்.

முடிவு : எல்லா மனிதர்களும் இறக்கக்கூடியவர்.

அல்லது,

பதப்பிரமாணம் : இந்த மொச்சைகள் (ஒரு குறிப்பிட்ட கையளவு) இப் (குறிப்பிட்ட) பையிலிருந்து எடுக்கப்பட்டன.

பதப்பிரமாணம் : இந்த மொச்சைகள் (இந்தக் குறிப்பிட்ட கையளவு) வெள்ளை நிறத்தன.

முடிவு : இப் பையிலுள்ள (குறிப்பிட்ட) எல்லா மொச்சைகளும் வெள்ளை நிறத்தன.

இவ் விருவகை ஆராய்ச்சிகளுக்குமிடையேயுள்ள கூரிய வேறுபாட்டை வலியுறுத்திக் காட்டுவோம். பகுப்புமுறை வாதங்களின் மூலமாகப் பெறுகின்ற முடிவுகளை எடுத்துக்கொண்டால், அம் முடிவுகள் ஒவ்வொன்றும் அவற்றினை அறிமுகப்படுத்தும் பதப்பிரமாணங்களிலேயே உள்ளடங்கி இருக்கின்றன. எனவே, பதப்பிரமாணங்கள் மெய்யாக இருந்தால் முடிவினைப்பற்றி எவ்வித கேள்விக்கும் இடமில்லை. முடிவினுல் புதிய செய்தி எதையும் பெற்றுவிடவில்லை. எனினும், பதப்பிரமாணங்களில் உள்ளடங்கியிருந்த உண்மைகளை வெளிப்படையாகக் காட்டுவதற்குப் பயனுகும் காரண காரியத் தொடர்பு மிகவும் முக்கியமானது. இதற்கு மாறுக, தொகுப்புமுறை வாதங்களினுல் பெறுகின்ற முடிவுகள் பதப்பிரமாணங்களால் பெறும் முடிவுகளைவிடப் பொதுத் தன்மையானவை. புதிதாகச் சில செய்திகள் கொண்டு சேர்க்கப்படுகின்றன. இவ்விதமாகப் பெற்ற முடிவுகள் மெய்யாக இருந்துவிட்டால் மனித அறிவு விரிவு பெறுகிறது. ஆனுல், இவ்வகையாக அறிவினை விரிவுபடுத்தும் முயற்சியில் ஒரு தீமையும் கலந்தே இருக்கிறது. தொகுப்பு முறை வாதங்கள் பயனுடையனவே; எனினும், ஆபத்து உடையன. தொகுப்புமுறையினுல் செய்யப்படுகின்ற முடிவுகள் எல்லாமே மெய்யாகத்தான் இருக்கவேண்டும் என்பதற்கு உறுதி கிடையாது. தொகுப்பு முறையின்மூலம் சக்தியற்ற, சில வேளைகளில் முற்றிலும் தவருன முடிவுகள்கூட செய்வதற்கு இடமுண்டு.

தொகுப்புமுறை வாதத்தின் முக்கியமான பண்புகளில் சிலவற்றைப் பின்வரும் கூற்றுகளால் தொகுத்துரைப்போம் :

1. தொகுப்பு முறையின்மூலம் கண்டறிந்த முடிவுகளைக் கண்டறிந்த குறிப்புகளுக்கேயன்றி பிறவற்றுக்கும் பயன்படுத்துவதே.

தொகுப்புமுறையின் வரையறை. எனவே, தொகுப்பு முறை வாதத்தினுல் மேற்கொள்ளப்படும் முடிவுகள் நிகழ் திறத்தின் அளவே பொருந்தி வருவன; உறுதியாகப் பொருந்துவன அல்ல. எனவே, தொகுப்புமுறை மனித அறிவினை விரிவு படுத்துவதற்கு மிகவும் பயனுள்ளதொரு வழியாக இருக்கின்ற தெனினும் நிச்சயமற்றமுறை. செய்யப்பட்ட முடிவுகளை இது வரை கண்டறியாத குறிப்புகளுக்கும் பொருத்துவது என்பது இருளில் தாவுவதற்கு ஒப்பானது.

2. பதப்பிரமாணங்களுக்குள் பொதிந்த உண்மைகளுக்கு அப் பாற்பட்ட சூழ்நிலைகளைப்பற்றி அறிவது இன்றியமையாதது. முற்றும் உள்ளடங்கியதோர் அமைப்புக்குள்ளே நாம் பணி யாற்றவில்லை. பரந்ததோர் அமைப்பின் ஒரு பகுதியினையே நேராகக் கண்டறிந்து பணியாற்றுகிறோம். கண்டறியாத பகுதி களில் பல நமது வாதத்துக்கும் முடிவுகளுக்கும் பொருந்தி வரலாம். பதப்பிரமாணங்களில் பெரும்பாலும் கூறப்படாத செய்திகளும் முடிவுகளின்மேல் நாம் கொள்ளும் நம்பகத்துக்குக் காரணமாக இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, பதப்பிரமாணங் களிலே பயன்பட்ட குறிப்புகளைக் கண்டறிந்த முறையும் ஒரு காரணக்கூருக அமையலாம். (ஒரு கைப்பிடி அளவு மொச் சைகள் என்ருேமே, அவை தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட விதம் என்ன?) தொகுப்பு முறை வாதத்தினைப் பாதிக்கக்கூடிய சூழ்நிலைகள் யாவற்றையும் குறித்து முற்றிலும் அறிவது இயலாது; எனவே, தொகுப்பு முறையினுல் செய்யப்படுகின்ற முடிவுகளை ஏற்பவர் கள், குறிப்புகளைக் கண்டறிந்து முடிவுகளை வரையறை செய் தவர்களுடைய அறிவுக் கூர்மையினையும் நாணயத்தையும் நம்பியே அவ்வண்ணம் செய்யவேண்டி யிருக்கிறது. இக் கருத்துக்குப் பொருத்தமாக, விளம்பர கோஷம் ஒன்றினைத் தொகுத்துக் கூறுவோம். 'ஒவ்வொரு தொகுப்பின் அடிப் படைச் சக்தி அதனைச் செய்வோரது கண்ணியத்தையும் நேர்மையையும்பொறுத்தே இருக்கிறது.' இதற்கும் மேலே ஒரு படி சென்று கூறத் தோன்றுகிறது: 'புள்ளி விவர ஆய்வாளர் களில் நாணயமற்றவரை ஏற்பதைவிடத் தொகுப்பு முறையில் வாதம் செய்யும் கணிதப் புலவர்களில் நாணயமற்றவரை ஏற்பது ஆபத்துக் குறைவானது.'

3. தொகுப்புமுறைக்குப் பயன்படுத்தப்படும் பிரமாணங்கள், முடிவுகள் ஆகியவற்றிற்கு அடிப்படையாய் அமைந்த செய்தி களின் தொகுப்பில், ஒரே ஒழுங்கான அமைப்பு இருப்பதாக நாம் புனைந்துகொள்ளவேண்டும். இதுவே தொகுப்புமுறை

மூலம் நாம் இருளில் தாவுவதாகக் கூறினோமே, அதற்கு உள்ளார்ந்த காரண அமைதி. இப் புனைவினை, இயற்கையின் ஒழுங்கமைதி என்றும், அனுபவ மரபு என்றும், இயற்கையில் காணப்படும் தனிச் சார்பிலா வகைகளின் எண்ணிக்கைக்கு அமைந்த கட்டுப்பாடு என்றும் பலவகையாகக் குறிப்பதுண்டு. இந்த அடிப்படையான, வெளிப்படையாகக் கூறப்படாத பிரமாணமே தொகுப்பு முறை வாதங்கள் எல்லாவற்றிலும் பயனாகும் ஒன்றாகவுள்ளது. இயற்கை முறையில் இத்தகைய ஏதோ ஓர் ஒழுங்கமைதி இல்லாவிட்டால், இயற்கை முற்றிலுமே முரண்பட்ட குழம்பிய நிலையில் அமைந்து இருந்தால், அடுக்கடுக்காக சான்றுகளை ஒன்று திரட்டினுங்கூடத் தொகுப்பு முறைக்கு அமைதி கூறமுடியாது. கண்டறியப்பட்ட விவரங்களுக்குள்ள எல்லையைத் தாண்டி புறத்தே நிலவுகின்ற சூழ்நிலைகளைப்பற்றி ஏதுமே கூறமுடியாது. இத்தகைய இயற்கை ஒழுங்கினைப் புனைந்து ஏற்றுக்கொள்வதற்கு, நடைமுறையில் கிடைத்த சான்றுகளுக்கு அப்பாற்பட்டே செல்லவேண்டி இருக்கிறது. அறிவுக்குப் பொருத்தமுடையதை, அறிவுக்குப் பொருத்தமில்லாதவற்றிலிருந்து வேறுபடுத்திக் காட்ட நமக்குத் துணைவருவது நமது அறிவுத் திறனும், நாம் பெற்ற அனுபவமும் சேர்ந்த கூட்டுக் கலவை; இதன் பயனாகவே, கொடுக்கப்பட்டதொரு சந்தர்ப்பத்தில் ஒருவிதமான ஒழுங்கமைதி இருப்பதாகப் புனைந்துகொள்ள நம்பிக்கையும் பிறக்கிறது. ஆனால், இந்த அனுபவம் சேர்ந்த அறிவு, காரணகாரிய வாதத்தின்பாற்பட்டது. இவ்விடத்தில் நாம் மேற்கொள்கிற செயலறிவைச் சார்ந்த முடிவில், பகுப்புமுறை ஆய்வு இடம் பெறுகிறது. (உண்மையில் பகுப்புமுறை, தொகுப்பு முறையிலிருந்து முரணியது அன்று.)

4. தொகுப்பு முறையினால் ஆராயவேண்டுமானால் காரணம் காட்டியே முடிவுகள் செய்யவேண்டும். பகுப்பு முறையில் கிடைக்கும் முடிவின் உண்மை முற்றிலும் அகத்தேயுள்ள முரணில்லா தன்மையிலேயே அமைகிறது. (எடுத்துக்காட்டு: கணித முடிவுகளின் கோவைப்படுத்திய ஆராய்ச்சி.) 'கணித உண்மை என்பது முரண் இல்லாமையே' என்று கூறப்பட்டிருக்கிறது. தொகுப்பு முறையினால் பெறப்படுகின்ற முடிவுகளை, இறுதியாகக் கண்டறிந்தவற்றால் சோதித்துப்பார்க்க வேண்டும். அப்போதும் அது பொருந்திவருமேயானால், அத்துறையில் இயற்கையில் காணப்படும் முரணில்லா ஒழுங்கமைதி தான் காரணமாக இருக்கவேண்டும்.

புள்ளிவிவர உய்த்துணர்வு

அளவையியல்பற்றிய பொதுவானதொரு செயல்முறையாகக் கருதி, தொகுப்புமுறைபற்றிய கூற்றுகளை இதுவரை கண்டோம். இங்கே நாம் கூறப்போவது புள்ளியியல் தொகுப்புமுறை (statistical induction) அல்லது புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு (statistical inference) பற்றியேயாகும். முன்பு விவரித்த பொதுமுறைக்குப் பயன்பட்ட அதே நான்கு சுருக்கமான கூற்றுகளின் அடிப்படையிலேயேதான் புள்ளிவிவர முறைகளைப் பொதுமைப்படுத்திக் கூறுவதான புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுகளும் செய்யப்படும். அதோடு இதற்கெனச் சில தனிப்பட்ட சிறப்புப் பண்புகளும் இருக்கின்றன. உய்த்துணர்வு ஆராய்கின்ற சிக்கல்கள் இரு வகையின—மதிப்பீடு செய்தல் (estimation), எடுகோள் சோதனை (testing of hypothesis).

மதிப்பீடு செய்தல்: மதிப்பீடு என்ற சிக்கலைப் பின்வருமாறு கூறலாம். ஒரு முழுமைத் தொகுதியினின்று பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரி விவரங்களிலிருந்து—சராசரியோ, தர விலக்கமோ, மாற்றக் கெழுவோ—ஏதோ ஒரு புள்ளிவிவர அளவை, கண்டுபிடிக்கப் பட்டுள்ளது. புள்ளியியலார் பயன்படுத்தும் 'முழுமைத் தொகுதி' (population) என்ற சொல்லாட்சிபற்றி வாசகருக்கு முன்பே அறிமுகப்படுத்தினோம்; பொதுவாக, ஒரு மாதிரி என்பதை வரம்புள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, அதாவது முழுவதையும் எண்ணிவிடக்கூடியது போன்றமைந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்டதாகக் கருதப்படுவதில்லை. அதற்கு மாருக வரம்பிலாத ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாகவே கருதுகிறோம்; அதாவது, இம்மாதிரி பிறப்பதற்கு, எத்தகைய ஆற்றல் அல்லது காரணக் கூறுகள் இயங்கினவோ, அவை எல்லையில்லாது இயங்குமானால் தோன்றக்கூடிய முழுமைத் தொகுதியினின்று பிறந்ததாகக் கருதுகின்றோம். இம் முழுமைத் தொகுதி நபர்களின் தொகுதியாகவோ, பொருள்களின் தொகுதியாகவோ, அளவைகளின் தொகுதியாகவோ இருக்கலாம். ஒரு சோதனையைப் பல தடவைகள் திரும்பத்திரும்பச் செய்வதனால் கிடைக்கக்கூடிய முடிவுகளை—'நிகழக் கூடியவைகளை'—ஆர். ஏ. ஃபிஷர் (R. A. Fisher) ஒரு முழுமைத் தொகுதியாக்கிக் காண்கிறார். ஒரு மாதிரியில் கிடைக்கின்ற அளவை—அதனை மாதிரி அளவை (statistic) என்போம்—அந்த மாதிரியின் பண்பு ஒன்றினை வரையறை செய்கிறது. இப்போது உய்த்துணர்வின் வேலை இந்த மாதிரி அளவைக்கிசைந்த முழுமைத் தொகுதியின் அளவைக்கு ஒரு மதிப்பீட்டைக் காண்பதே. முழுமைத் தொகுதியோடு சம்பந்தப்பட்ட அளவையை முழுமைத் தொகுதி அளவை (parameter) என்போம்.

அத்தகைய மதிப்பீடு முழுமைத் தொகுதி அளவையின் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பைக் குறிக்கலாம். இதனைப் புள்ளி மதிப்பீடு (point estimation) என்போம். அல்லது இந்த வகையான உய்த்துணர்வின் மூலம், முழுமைத் தொகுதி அளவை எந்த எல்லைகளுக்குட்பட்டு அமையுமென எதிர்பார்க்கப்படுகிறது என்பதோடு, நிகழ்கிற முறையில் இந்த முடிவினை எந்த அளவுக்கு நம்பலாம் என்ற அளவையோடு வெளியிடுகின்ற கூற்றாக, இந்த உய்த்துணர்வு அமையலாம். இதனை இடைவெளி மதிப்பீடு (interval-estimation) என்போம். இடைவெளி மதிப்பீட்டின் தனிச் சிறப்பு இது: தொகுப்புமுறை முடிவுகளுக்கு உரித்தான ஐயநிலை, உய்த்துணர்வு முடிவுகளையும் பீடிக்கிறதென்றாலும் புள்ளிவிவரக் குறிப்புகளின் அடிப்படையிலே மதிப்பீடுகளைச் செய்கின்றபோது இம் முடிவுகளின் ஐயநிலையின் தரத்தை அறிய ஓர் அளவையையும் சேர்த்துத் தருவதுதான் இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறையின் சிறப்பு. இதனைச் செய்யும் விதம் யாது என்பதை வருகின்ற அத்தியாயத்தில் காண்போம். இங்கே நாம் மீண்டும் வலியுறுத்திக் கூறுவதாவது: நாம் மாதிரிகளின் அளவையைப்பற்றிப் பெற்றுள்ள அறிவே, அதாவது மாதிரிகளின் தன்மைகள்பற்றி அளந்தறிந்து கண்டதே முற்றிலும் நம்பகமானது. நமக்கு ஒருசிறிதும் தெரியாத முழுமைத் தொகுதியின் அளவையை இயன்ற அளவு திருத்தமாகக் காண்பதற்கு நாம் பெற்றுள்ள அறிவைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

தொகுப்புமுறை வாதம்பற்றி நாம் கூறிய பிற பொதுக் கருத்துகள் யாவும் புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுக்கும் பொருந்தும். இயற்கை ஒரே சீராக அமைந்துள்ளது; அல்லது இயற்கையில் தனித்தனியான வேறுபட்டவகைகளின் எண்ணிக்கைக்கு வரம்புண்டு—இக் கருத்துகளைப் புள்ளிவிவர பரிபாஷையில், பேரினங்களின் நிலைத்த தன்மை (stability of large numbers) என்று கூறுவது வழக்கம். பிறப்பு வீதம், இறப்பு வீதம், விலை மாற்றங்கள், பருவகால மாற்றங்கள் ஆகியவற்றில் காணப்படுகின்ற ஒழுங்கு, இத்தகைய நிலைத்த தன்மைக்கு நன்கு தெரியவரும் எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

புள்ளியியல் நிலைத்த தன்மை, குறிப்பிட்டுக் காட்டுகின்ற இந்த ஒழுங்கு, செயல் முறையில் மிகவும் முக்கியமானது. அடுத்தடுத்த மாதிரிகளிலிருந்து பெறுகின்ற முடிவுகளில் ஓரளவுக்கு நிலைத்த தன்மை இருக்குமென்ற உறுதி நமக்கு இல்லையெனில், ஒருசில குறிப்புகளை ஆய்வு செய்வதன்மூலம் பொதுமையான முடிவு காண முயல்வது பொருத்தமுடையதன்று. எல்லாக் குறிப்புகளையும் அல்லது அளவைகளையும் உள்ளடக்கிய முழுமைத் தொகுதி முழுவதையும் ஆய்வதை விடுத்து, பிறவற்றை ஆய்வதில் ஏதும் சாரமே

இருக்காது என்றாலும், செய்முறையில் எல்லாவற்றையும் உள்ளடக்கி ஆய்வுகள் செய்வது இயலாது. விலைகள், கூலிகள், வாழ்க்கைச் செலவுகள், உற்பத்தி ஆகியவைபற்றிய குறியீட்டெண்கள், தொழில், சக்திபற்றிய மாதக் கணிப்புகள், நிறுவன ஆதாயம், நுகர்வு, செலவு முதலியவைபற்றிய சோதனைகள்—இவை யாவும் இந் நிலைத்த தன்மையைப்பற்றிய அடிப்படைக் கருத்தின் வலுவிலேயே மாதிரிச் சோதனைகளின்மூலமாகவே உருவாகவேண்டிய அவசியம் உடையன. எனவே, மொத்த விலைக் குறியீட்டெண் போன்ற ஓர் அளவையைப் பொதுமையாக்கும்போது பின்வருவதுபோன்ற ஒரு தற்புனைவின் அடிப்படையில் செய்கிறோம். நாம் அளந்து கண்டறிந்த பண்பானது, இம் முடிவை எந்தப் பெரிய முழுமைத் தொகுதிக்குப் பயன்படுத்த விரும்புகிறோமோ, அதில் ஓர் ஒழுங்குடன் காணப்படுமென்று கருதுவதில் தவறில்லை. இந்த ஒழுங்கின் காரணமாகத்தான் இந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து நாம் அடுத்தடுத்துப் பிரித்தெடுக்கின்ற ஒரே அளவுடைய மாதிரிகளிலிருந்து நாம் செய்கின்ற உய்த்துணர்வுகள் யாவும் பொதுவான, நிலைத்த, வரையறை செய்யக் கூடிய பண்புகளுடைய ஒரு குடும்பத்தைச் சேர்ந்தனவாக இருக்குமென நாம் எதிர்பார்க்கிறோம். இப் புனைவின் அடிப்படையில்தான் புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுகளுள் நம்பக அளவைகளை இணைக்க முற்படுகிறோம்.

'இப்படிக் கருதுவது பொருத்தமுடையதே' என்று கூறி, ஒரு புனைவினை நாம் மேற்கொள்ளும்போது, முற்றிலும் புள்ளியியல் முறைகளால் சரிபார்க்கமுடியாத ஓர் எடுகோளை அறிமுகம் செய்கிறோமென்பது வெளிப்படை. முன்னர் சுட்டிக்காட்டியபடி புள்ளியியல் பகுப்புமுறை முடிவு ஒவ்வொன்றிலும் இவ்விடத்தில்தான் காரணகாரிய வாதம் (a priori) இடம் பெறுகிறது. புள்ளியியல் முடிவுகள் என்றுமே தம் வலுவில் நிலைப்பதில்லை. அவற்றை நம்பவேண்டுமானால், காரணத்துக்கும் பகுத்தறிவுக்கும் பொருத்தமாக இருக்கவேண்டும்.

ஆஸ்கார் ஆண்டர்சன் (Oskar Anderson) என்பாரது கருத்துப்படி புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுகளின் பிரச்சினையாவது முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளைப்பற்றி மிகச் சிறந்த தோராயங்கள் கிடைக்கும் வகையில் மாதிரிகளைப் பயன்படுத்துவதே. இவ் வகையாக மதிப்பீடுகளைச் செய்வதில் இந்த முழுமைத் தொகுதிகள் நிலைத்த தன்மை உடையன என்றும், அதோடு அவற்றின் பண்புகள் யாவும் நிலைத்த தன்மை உடையன என்றும் புனைந்துகொள்கிறோம். அத்தகைய நிலைத்த தன்மையுடைய முழுமைத் தொகுதியின் ஒரு பண்பை ஒரே மாதிரியின் பண்பிலிருந்து முற்றிலும் தெரிந்து

கொண்டுவிட முடியாது என்பது உண்மையே. என்ருலும், ஒரு பண்பை வரையறை செய்ய, முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்படுகின்ற (அதாவது ஒரு முழுமைத் தொகுதியினின்று பிறந்த) பல மாதிரிகளிலிருந்து கண்டறிந்த அளவைகள், முழுமைத் தொகுதியின் எந்த அளவைகள், முழுமைத் தொகுதியின் எந்த அளவைக்கு அவை மதிப்பீடுகளோ அதைச் சார்ந்து ஓர் ஒழுங்குடன் பரவலாக அமையும். அத்தகைய மதிப்பீட்டுப் பரவலின் பண்புகளைப் பற்றி நுணுக்கமாக அறியவேண்டியது மதிப்பீடுகளின் நம்பகம் பற்றித் தீர்மானிப்பதற்கு இன்றியமையாதது. இத்தகைய பரவல்களைப் பற்றிய அறிவை நாம் வளர்த்தபோதுதான் புள்ளியியல் முறைகளின் ஆற்றலும் வளர்ச்சி பெற்றது.

எடுகோள்களின் சோதனைகள் : புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுகளின் வேருெரு வடிவமான எடுகோள்களின் சோதனைகளிலும் 'முழுமைத் தொகுதி' பற்றிக் குறிப்பிடுகிருேம். ஆனுல், இங்கே நமது பணி வேறுவிதமானது. ஒரு மாதிரி அளவை (statistic) (எடுத்துக்காட்டாக, மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி) தரப்பட்டுள்ளது; அந்த அளவைக்கிசைந்த முழுமைத் தொகுதியின் அளவையும் (parameter) தெரியும் அல்லது எடுகோளிலிருந்து கண்டுபிடித்துக் கொள்ளலாம். இப்பொழுது இந்த மாதிரி, முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்டதாக இருக்கக்கூடுமா என்பதைத் தீர்மானிப்பதே நமது பணி. மாதிரி அளவைக்கும் முழுமைத் தொகுதியின் அளவைக்கும் காணப்படுகின்ற வேறுபாடு, மாதிரி முறையினுல் ஏற்படும் ஏற்ற இறக்கங்களினுல் தற்செயலாக எழுந்ததா, அல்லது இந்த வேறுபாடு மாதிரி ஏற்ற இறக்கங்களினுல் பிறந்தது என்று கூறமுடியாத அளவுக்குப் பெரியதா? பெரும்பாலான எடுகோள்கள் சோதனைகளின் அல்லது சிறப்புக்காண் சோதனைகளின் (tests of significance) அமைப்பு இதுவே. இந்தக் கேள்விக்கு விடை எப்போதுமே நிகழ்திறத்தின் அடிப்படையிலேதான் காணப்படுகிறது. தற்செயல் நிகழ்வைக் கண்டறிந்த வேறுபாட்டுக்குக் காரணமாகக் காட்ட, நிகழ்திறம் மிகக் குறைவாக இருக்குமானுல் எடுகோள் தள்ளுபடி செய்யப்படுகிறது. வேறுபாடு சிறப்புடையதாகக் கருதப்படுகிறது. வேறுபாட்டுக்குத் தற்செயல் நிகழ்வினைக் காரணமாகக் காட்டுமளவு தரமுடியாத அளவுக்கு நிகழ்திறம் பெரிதாக இருக்குமானுல், கண்டறிந்த குறிப்புகள் எடுகோளுக்கு முரண்படவில்லை என்று கூறுகிருேம். இங்கே வேறுபாடு சிறப்புடையதுமன்று; எடுகோளும் தள்ளுபடி செய்யப்படுவதில்லை.

7, 8 அத்தியாயங்களில் புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுபற்றி வெளிப்படையான எடுத்துக்காட்டுகளை நாம் ஆராயும்போது இந்த உருப்புலனுகா (abstract) கூற்றுகளின் சிறப்பு நன்கு தெரியவரும்.

இப்போதைக்கு இதுவரை தந்த வாதத்தின் ஒரு பகுதியினைத் தொகுத்து வலியுறுத்திக் கூற விரும்புகிறோம்.

பகுப்பு முறை வாதங்களின்மேல் அமைந்த எல்லா முடிவுகளும் நிகழ்திற அடிப்படையிலேயே பொருத்தமுடையன. தொகுப்பு முறையினை வருணிக்க சார்லஸ் எஸ். பியர்ஸ் (Charles S. Peirce) என்ற அளவை இயல வல்லுநர் 'உறுதியில்லாத உய்த்துணர்வு' என்ற சொல்லைப் பயன்படுத்தினர். இச்சொல்லாட்சி, தொகுப்பு முறையின் சிறப்புத் தன்மையை நன்கு சுட்டுகிறது.

அளவின விவரங்களைப் பொதுமையாக்கிக் கூறுவதே புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுகள்; அத்தகைய உய்த்துணர்வுகள், அத்தகைய உய்த்துணர்வுகளின்மூலம் செய்யப்படுகின்ற முடிவுகளுக்கு நிகழ்திற அளவைகளைப் பிணைத்து அமைப்பதே புள்ளியியல் உய்த்துணர்வின் தனித் தன்மை; முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகள் எந்த எல்லைகளுக்கு உட்பட்டு அமையவேண்டும் என்பதற்கான மதிப்பீடுகளானாலும், அல்லது சிறப்புகாண் சோதனைகள்பற்றிய கூற்றுகளானாலும், இருவகை முடிவுகளுக்கும் மேற்கூறிய தனித்தன்மை பொருந்தும். புள்ளியியல் ஆய்வு என்ற பெரும் பணியிலே ஈடுபட்டிருக்கிற புள்ளியலாரின் வேலையாவது, இந்த நிகழ்திறங்களை வரையறை செய்யக் கருவிகள் காண்பதும், இக் கருவிகளைப் பயன்படுத்தி, வேலை செய்யும் முறைபற்றி விதிகளை வரையறை செய்வதும் ஆகும்.[1]

நவீனப் புள்ளியியலின் கோட்பாடுகளிலும், செயல்முறைகளிலும் நடுநாயகமாக அமைந்திருப்பது நிகழ்திறம்பற்றிய கருத்துகளே. நிகழ்திறம்பற்றிய சில அடிப்படைக் கொள்கைகள்பற்றி இப்போது விவாதிப்போம். நிகழ்திற கொள்கைபற்றி விரிவாகக் காண்பது இந் நூலுக்குப் புறம்பானது. இங்கே நாம் தரப்போகும் விளக்கம் நிகழ்திறம்பற்றி அறிமுகம் செய்வதாகவும், புள்ளியியல் செயல் முறைக்குப் பயனுகும் பரவல்களையும் சில கருத்துகளையும்பற்றி வலியுறுத்துவதாகவுமே இருக்கும்.

குறியீடு : இந்த அதிகாரத்தில் அறிமுகப்படுத்தப் போகும் குறியீடுகளைக் காண்பதற்கு எளிதாகயிருக்கும் முறையில் இங்கே

[1] புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுபற்றிய இந்த விளக்கத்தில், புள்ளியியல் முடிவுக் கோவைகள்பற்றிய பொதுக் கோட்பாட்டினை (general theory of statistical decision functions) விரித்துக் கூறவில்லை. தனிப்பட்ட சமயங்களில், மதிப்பீட்டுச சிக்கல்கள்பற்றியும், சிறப்புகாண் சோதனைபற்றியும், தொகுத்துக் கூறும் இப்பொதுக் கோட்பாட்டின் அடிப்படைகள், காலஞ்சென்ற ஆப்ரஹாம் வால்டு (Abraham Wald) அவர்களால், 1950-ல் எதிர்பாரா மரணம் எய்துவதற்குச் சில ஆண்டுகளுக்கு முன் எழுதிய திறமைமிக்க ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகளில் உருவாக்கப்பட்டது. (பார்க்க, து. நூ. ப. 184, வால்டு).

வரிசையாகத் தருவோம். இவற்றின் விளக்கங்கள் பின்னர் ஆங்காங்கே தரப்படும்.

p : ஒரு நிகழ்ச்சி (event) வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்திறம்.

q : ஒரு நிகழ்ச்சி வெற்றி பெருததற்கான நிகழ்திறம்.

n : ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான வழிகளின் எண்ணிக்கை; சோதனை ஒன்றில் நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை.

$n!$: ஃபேக்டோரியல் n (factorial n) : 1 முதல் n வரையான முழு எண்களின் பெருக்குத் தொகை.

μ (மியு) : ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி.

μ' : ஒப்பீட்டடிப்படை அலைவுகளாலான முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி.

σ' (சிக்மா) : ஒப்பீட்டடிப்படை அலைவுகளாலான முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கம்.

y : அலைவு வளைகோட்டின் குத்தாயம்.

y_0 : அலைவு வளைகோட்டின் உச்சிக் குத்தாயம்.

m' (1, 2, 3, ...என்ற ஒட்டுக் குறிகளுடன்) : எதேச்சை மூலத்திலிருந்து மொமெண்டுகள் (moments).

$\overline{m}$ (1, 2, 3, ...என்ற ஒட்டுக் குறிகளுடன்) : கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து திருத்தப்படாத மொமெண்டுகள்; மைய மொமெண்டுகள்.

m (1, 2, 3,......என்ற ஒட்டுக் குறிகளுடன்) : ஷெப்பர்டு திருத்தங்களுடன் மைய மொமெண்டுகள்.

μ (மியு) (1, 2, 3,..... என்ற ஒட்டுக் குறிகளுடன்) : முழுமைத் தொகுதியின் மைய மொமெண்டுகள்.

β_1 (பீட்டா) : வளைகோட்டு வகைக்கு ஒரு கட்டளை விதி (criterion) (பியர்சன் வகை).

β_2 : வளைகோட்டு வகைக்கு ஒரு கட்டளைவிதி (பியர்சன் வகை).

χ (சை) : கோட்டத்தின் ஓர் அளவை.

d : முகட்டின் விரிசல் (divergence) ; $\chi \times \sigma$

γ_1 (காமா) : கோட்டத்தின் ஓர் அளவை.

γ_2 (காமா) : சிகரத் தன்மையின் ஓர் அளவை.

நிகழ்திறம்பற்றிய ஆரம்பத் தேற்றங்கள்

ஒரு நிகழ்ச்சி n வழிகளில் (விதங்களில்) நடைபெறக்கூடும்; இந்த n வழிகளும் ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பன (mutually exclusive) நிகழ்வதற்குச் சமவாய்ப்பினை உடையன; இவற்றிலே a வழிகளில் நிகழ்ச்சி வெற்றியடைவதாகவும், b வழிகளில் நிகழ்ச்சி வெற்றி யடையாததாகவும் கருதப்படுகின்றன; இவ்விதமாக இருக்கையில் வெற்றி அடைவதற்கான நிகழ்திறத்தை (p)

$$p = \frac{a}{n}$$

என எழுதலாம்; வெற்றி அடையாததற்கான நிகழ் திறத்தை (q)

$$q = \frac{b}{n}$$

என எழுதலாம். இங்கே 'வெற்றி' 'வெற்றியல்லாதது' ஆகிய சொற்கள் பொது நிலையான பொருளில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன என்பதை அறியவும். (இதனையே வேறுவிதமாகக் கூறலாம்; ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பு கொண்டவற்றை a பகுதியிலும், அது இல்லாத வற்றை b பகுதியிலும் சேர்க்கிறோம் என்றாலும், சொற்களை மரபுக் கேற்பப் பயன்படுத்துவதே வசதியானது.) வெற்றி விளைவுகளையும், அது அல்லாத விளைவுகளையும் ஒன்று சேர்க்கக் கிடைப்பது நிகழ்ச்சி களின் மொத்த எண்ணிக்கை. அதாவது,

$$a + b = n$$

இதனை, n ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = 1$$

அல்லது

$$p + q = 1$$

எனவே, நிகழ்திறத்தை வீதமாக எழுதலாம். இப்படி எழுதப்படும் வீதபின்னத்தின் தொகுதி (numerator) வெற்றி அல்லது தோல்வி விளைவுகளையும், பகுதி (denominator) சாத்தியமான விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கையையும் குறிக்கின்றன. a என்பதால் குறிக்கப் படும் அத்தகைய விளைவு அல்லது விளைவுகள் நடைபெற இயலாது என்பதாக இருந்தால், இந்த வீதம் சுழி ஆக இருக்கும். இதற்கு எதிர்மாறாக, a என்பதால் குறிக்கப்படும் அத்தகைய முடிவு அல்லது முடிவுகள் மட்டுமே நடைபெறக்கூடியது என்றிருந்தால், a என்பது n-க்குச் சமமாக இருக்கும்; வீதத்தின் மதிப்பு ஒன்றாக இருக்கும். எனவே நிகழ்திறத்தின் அளவைத்திட்டம் நடைபெற இயலாதது

என்பதற்கான சுழியிலிருந்து துவங்கி உறுதியாக நடைபெறுவது என்பதற்கான ஒன்றுவரை பரந்து அமைகிறது

'நிகழ்திறம்', அலைவு வீதத்தோடு (frequency ratio) தொடர்புடையது என்ற கருத்து இன்று பொதுவாக ஏற்கப்படுகின்றது. எனினும், இக் கோட்பாட்டினை அனுபவ வழியில் கண்டறியப்படும் வீதங்களோடு பிணைத்துவிட்டால் நுட்பமும், பொதுமையும் இழந்து விடும்; ஆனால், கணித விளக்கம் தருவதற்காக இக் கோட்பாட்டை நுட்பமாகவும், பொதுமையாகவும் உருவாக்குவது நல்லது; எனவே, இக் காரணத்துக்குப் பயன்படுவதற்காக, கிராமெர் (Cramer) கூறுவதுபோல நிகழ்திற எண்ணை, அனுபவ வழி அலைவு வீதத்தின் 'கோட்பாட்டுப் பதிப்பு' என்று கருதலாம். ஆராய்ந்து கூறினால் நிகழ்திறம் என்பது ஒரு புலனாகாக் கோட்பாடே. ஒரு தடவை பகடையை வீசி எறிந்தால், 6 என்ற எண்ணைப் பெறுவதற்கான நிகழ்திறம் 1/6 என்று சரியாக இருக்குமாறு திருத்தமான பகடையைச் செய்வது இயலாததாக இருக்கலாம். ஆனால் p என்பதற்கு 1/6 என்ற மதிப்பு இருக்குமாறு ஒரு புலனாகா நிகழ்திறத்தைக் கருத்தில் கொண்டு அதன்மீது தேற்றங்களை உருவாக்கலாம். இத்தகைய புலனாகாக் கோட்பாடுகளும், அதற்கு அமைந்த நிகழ்திறங்களுமே நிகழ்திறக் கொள்கையின் அடித்தளம். இதன் விளைவாக, நவீனப் புள்ளியியலுடன் நேரிடைத் தொடர்புடைய இயைபிலாச் சோதனைகளின் முடிவுகளை ஆராய்வதற்குப் பொதுக் கருத்துத் தொடர்பான வரைச்சட்டத்தையும், நிகழ்திறத்தேற்றம் உருவாக்குகிறது.

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டினால் இரண்டு விளைவுகளே நிகழும்; ஒன்று தலை தெரியும் அல்லது பூ தெரியும். இந்த இரு நிகழ்தல்களையும் சமவாய்ப்புடையதாகக் கருதினால் (பலதடவை சுண்டிக் கிடைக்கும் அலைவு வீதங்களின் கோட்பாட்டுப்பதிப்பாக இவற்றைக் கருதுவோம்); தலை கிடைப்பதற்கு நிகழ்திறமாக

$$p = \tfrac{1}{2}$$

என்றும், பூ கிடைப்பதற்கு நிகழ்திறமாக,

$$q = \tfrac{1}{2}$$

என்றும் கிடைக்கிறது.

6 கிடைப்பதை வெற்றிவிளைவாகக் கருதி ஒரு பகடையை வீசினால்,

$$p = \tfrac{1}{6}$$

என்றும்,

$$q = \tfrac{5}{6}$$

என்றும் இருக்கும். 52 கார்டுகள் அடங்கிய சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை எடுக்க, அது இஸ்பேட்டு ஏசாக (ace of spades) இருப்பதற்

கான் நிகழ்திறம் $\frac{1}{52}$ ஆகவும், அம் முயற்சி தோல்வியடைய நிகழ்திறம் $\frac{51}{52}$ ஆகவுமிருக்கிறது.

நிகழ்திறங்களின் கூடுதல் : 52 சீட்டுகள் அடங்கிய ஒரு கட்டிலிருந்து ஒரே தடவையில் ஒரு இஸ்பேட்டு ஏசையோ அல்லது இஸ்பேட்டு இரண்டாம் பந்தையோ (two of spades) உருவுவதற்கான வாய்ப்பு என்ன ? ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் பல விளைவுகளில் ஒவ்வொன்றும் வெற்றியாகக் கருதப்படும் ஒரு சந்தர்ப்பத்தில், வெற்றியின் நிகழ்வாய்ப்பானது தனித்தனி நிகழ்திறங்களின் கூடுதலாக இருக்கும். இந்த எடுத்துக்காட்டில்,

$$p = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{1}{26}$$

இதுபோலவே, ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஆடுதன் சீட்டையே அல்லது இஸ்பேட்டு சீட்டையே எடுப்பதற்கான நிகழ் வாய்ப்பு

$$p = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{1}{2}$$

நிகழ்திறங்களின் பெருக்கல் : ஒன்றின் விளைவு மற்றதை பாதிக்காத இரு நிகழ்ச்சிகள் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் (independent events) என்று அழைக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பகடையினை ஒருமுறை எறிவதன் விளைவு, அடுத்த முறை பகடையினை எறிவதனைப் பாதிப்பதில்லை எனக் கருதுகிறோம். ஒரு கூட்டு நிகழ்ச்சியின் (அதாவது சார்பிலா இரு நிகழ்ச்சிகளின் சேர்க்கை) நிகழ்திறமாவது தனி நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்திறங்களின் பெருக்கல் தொகையாகும். எடுத்துக்காட்டாக, பகடைகளை அடுத்தடுத்து இரு தடவை உருட்டி 1 என்ற புள்ளியைத் தொடர்ந்து 2 என்ற புள்ளியைப் பெறுவதற்கான நிகழ்திறம்,

$$p = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

என்பதனால் கணிக்கப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட விளைவின் நிகழ்திறனை அறிவதற்கு நிகழ்திறங்களைக் கூட்டியும் பெருக்கியும் முடிவு காண்பது அடிக்கடி நடைபெறுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரேசமயத்தில் இரு பகடைகளை உருட்டி 5 என்ற கூடுதல் தொகையை அடைவதற்கான நிகழ்திறத்தைக் காண விரும்புவதாக வைத்துக்கொள்வோம். இரு பகடைகளையும் வேறுபடுத்தி a என்றும் b என்றும் குறிப்போம். 5 என்ற கூடுதல் பின்வரும் நான்கு சேர்க்கைகளில் ஏதாவது ஒன்றின்மூலம் கிடைக்கும்.

a என்ற பகடை	b என்ற பகடை
1	4
2	3
3	2
4	1

a என்ற பகடையிலிருந்து ஏசைப் பெறுவதற்கான நிகழ்திறம் $\frac{1}{6}$; b என்ற பகடையிலிருந்து 4-ஐப் பெறுவதற்கான நிகழ்திறம் $\frac{1}{6}$; இவற்றின் சேர்க்கைக்கான நிகழ்திறம் $\frac{1}{36}$. இதுபோலவே பிற மூன்று சேர்க்கைகளில் ஒவ்வொன்றின் நிகழ்வாய்ப்பும் $\frac{1}{36}$ ஆகும். ஆனால், இச் சேர்க்கைகளில் ஒவ்வொன்றுமே 5 என்ற முடிவைத் தருவதால் ஒவ்வொன்றும் வெற்றி நிகழ்ச்சியாகக் கருதப்படும். எனவே,

$$p = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{9}.$$

இந்த எடுத்துக்காட்டில் ஒரு கேள்விக்கு விடை கண்டோம்; அதாவது இரண்டு பகடைகளை உருட்டிச் சரியாக 5 பெறுவதற்கான நிகழ்திறம் என்ன? அதாவது, இரு பகடைகளை உருட்டி, குறைந்தது 5 பெறுவதற்கு நிகழ்திறம் என்ன? இதில் 5 அல்லது அதற்கு மேற்பட்டது, சாதகமான விளைவாகக் கருதப்படும். முந்திய எடுத்துக்காட்டைப்போலவே, வெற்றியாகக் கருதப்படும் ஒவ்வொரு முடிவையும் பெறுவதற்கான நிகழ்திறத்தைக் கணிக்கலாம். இந்தக் கூடுதல்கள் ஒவ்வொன்றும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்திறத்தைப் பின்வரும் பொழிப்புரையில் குறிப்பிட்டுள்ளோம்.

இரு பகடைகளால்	12	எறிவதற்கு	நிகழ்வாய்ப்பு	$=\frac{1}{36}$
,,	11	,,	,,	$=\frac{2}{36}$
,,	10	,,	,,	$=\frac{3}{36}$
,,	9	,,	,,	$=\frac{4}{36}$
,,	8	,,	,,	$=\frac{5}{36}$
,,	7	,,	,,	$=\frac{6}{36}$
,,	6	,,	,,	$=\frac{5}{36}$
,,	5	,,	,,	$=\frac{4}{36}$
மேற்கண்ட நிகழ்திறங்களின் கூடுதல்				$=\frac{30}{36}$

எனவே, இரு பகடைகளை உருட்டிக் குறைந்தது 5 எறிவதற்கான நிகழ்திறம் $\frac{30}{36}$ அல்லது $\frac{5}{6}$ ஆகும்.

ஈருறுப்பு விரிவுக் கோவையும் (Binomial Expansion), நிகழ்திறங்களை அளத்தலும்

இந்த அடிப்படை முடிவுகள் சிலவற்றை ஒரு பொதுமையான வடிவில் அமைத்துக் காட்டுவது இயலும். இவ்வண்ணம் தேவையான பொது முடிவைப் பெறுகின்ற முறையை விளக்க எளிமையான எடுத்துக்காட்டு ஒன்றைத் தரலாம்.

இரண்டு நாணயங்களை ஏககாலத்தில் சுண்டினால் நான்கு வகையான விளைவுகள் கிடைக்கலாம்.

$$\begin{array}{cccc} a\ b & a\ b & a\ b & a\ b \\ T\ T & T\ H & H\ T & H\ H \end{array}$$

(இந்த இரண்டு நாணயங்களையும் a, b என்ற எழுத்துகளால் குறிப்போம்.) கிடைக்கக்கூடிய விளைவுகளில், முதலாவதில் இரண்டு பூக்கள் கிடைக்கின்றன (TT). இவற்றை இரண்டு வெற்றிகளாகக் கருதினால், இந்தக் கூட்டு நிகழ்திறம் $p \times p = p^2$ ஆகும். தற்போதைய எடுத்துக்காட்டில் $p = \frac{1}{2}$. எனவே, கூட்டு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்திறம் $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. நான்கு வகையாகக் கிடைக்கக்கூடிய விளைவுகளிலே நான்காவது (HH) இரண்டு தோல்விகளைக் குறிக்கிறது. (இரண்டு நாணயங்களிலும் பூக்கள் விழவில்லை.) இந்த முடிவின் நிகழ்திறம் $\frac{1}{4}$ $(= q \times q = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2})$ ஆகும். மீதி இரண்டு விளைவுகளிலும் ஒவ்வொன்றும் (அதாவது இரண்டாவது மூன்றாவது விளைவுகள்) வெற்றி ஒன்றையும் (T), தோல்வி ஒன்றையும் (H) சேர்த்துக் கிடைத்ததாகும். இச் சேர்க்கைகளில் இரண்டாவதான TH-ன் நிகழ்திறம் $\frac{1}{4}$ $(= p \times q = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2})$ ஆகும். மூன்றாவது விளைவான HT-ன் நிகழ்திறம் $\frac{1}{4}$ $(= q \times p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2})$ ஆகும். ஒரு வெற்றியும் ஒரு தோல்வியும் (இவற்றில் எது முந்தியது என்பதுபற்றிக் கவலையில்லை) சேர்ந்த கூட்டு முடிவின் நிகழ்திறம், தனி விளைவுகளின் நிகழ்திறத்தைக் கூட்டினால்—இந்த எடுத்துக்காட்டில், $2pq$ அல்லது $\frac{1}{2}$ கிடைக்கும்.

பல சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளில் பல்விதச் சேர்க்கைகளின் நிகழ்திறங்களை மதிப்பீடு செய்யும் முறையைப் பொதுமையாக்கிக் கூறலாம்; ஏனெனில், தனி நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்திறங்கள் தெரிந்தால், பலவித சேர்க்கைகளின் நிகழ்திறங்கள் ஈருறுப்புக் கோவையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளால் கிடைக்கும். இவ்விதம் இரு நிகழ்ச்சிகள் அடங்கிய எளியதோர் எடுத்துக்காட்டிலே

$$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

என்று கிடைக்கும். இதில் p^2 என்பது இரண்டு வெற்றிகளின் நிகழ்திறம் என்று முன்னர் விளக்கப்பட்டதை மாணவர் கவனிக்க. $2pq$ என்பது ஒரு வெற்றி, ஒரு தோல்வி ஆகியவற்றின் சேர்க்கையின்

நிகழ்திறம் ஆகும். q^2 என்பது இரு தோல்விகளின் நிகழ்திறம் ஆகும். p என்பது (எடுத்துக்காட்டாக, பூ. விழுவதற்கான நிகழ் திறம்) q என்பதற்குச் சமமாக இருக்கும்போது, பல வேறுபட்ட விளைவுகளின் நிகழ்திறங்கள்,

$$\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}$$

என்பதால் கிடைக்கும்.

இதுபோல a, b, c என்னும் எழுத்துகளால் குறிக்கப்படுகின்ற மூன்று நாணயங்களை ஏககாலத்தில் சுண்டினால் 8 வகையான விளைவுகள் கிடைக்கும்.

abc	*abc*	*abc*	*abc*	*abc*	*abc*	*abc*	*abc*
TTT	*TTH*	*THH*	*THT*	*HTT*	*HTH*	*HHT*	*HHH*

விளைவுகளின் எண்ணிக்கையைக் கவனிக்கும்போது மூன்று நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் சுண்டும்போது மூன்று பூக்கள் கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு 1/8 என்பது தெரியும். இரண்டு பூக்கள் (ஒரு தலையோடு சேர்ந்து) கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு 3/8 ஆகும். ஒரு பூ (இரண்டு தலைகளோடு சேர்ந்து) கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு 3/8. பூக்கள் ஒன்றுமே கிடைக்காமல் இருப்பதற்கு வாய்ப்பு 1/8 ஆகும். இங்கே மூன்று சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் இருப்பதால் ஈருறுப்பின் படியாவது (exponent) மூன்றாகும். சாத்தியமான பல்வகையான முடிவுகளின் நிகழ்திறங்கள்

$$(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

என்ற கோவையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளால் கிடைக்கும்.

$p=q=\frac{1}{2}$ என்று இருக்கும்போது,

$$\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{8}+\tfrac{3}{8}+\tfrac{3}{8}+\tfrac{1}{8}$$

என்று வரும். மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில் நேரடியாக எண்ணும் போது, கிடைக்கக்கூடிய நிகழ்திறங்களும் இவையேதான்.

இந்தச் செயல்முறை பொதுவாகவே பயன்படும். n சார்பிலா வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் இருப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம். இவற்றில் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்ச்சி 'வெற்றிகரமாக' விளைவதற்கான நிகழ்வாய்ப்பு p என்றும், அது 'வெற்றியடையாது' வருவதற்கான நிகழ்வாய்ப்பு q என்றும் கொண்டால், n வெற்றிகள், n-1 வெற்றிகள், n-2 வெற்றிகள் முதலானவற்றிற்கு நிகழ்திறங்கள் $(p+q)^n$ என்ற ஈருறுப்பு விரிவுக் கோவையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளால் கிடைக்கும் என்று காட்டலாம்.

இப்படி தனித்த நிகழ்திறங்களை அறிவதற்குப் பதிலாகக் கொடுக்கப்பட்ட அளவு எண்ணிக்கையுடைய சோதனைகளில், பல்வேறு விளைவுகளின் நிகழ்திற அலைவுகளைக் காண்பதற்கு விரும்பினல், இவற்றை

$$N(p+q)^n \qquad (6.1)$$

என்ற கோவையிலிருந்து கணிக்கலாம். இதில் N என்பது சோதனைகளின் எண்ணிக்கை; n என்பது சோதனையில் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை. இதுபோல ஒவ்வொரு சோதனையிலும் இரண்டு சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் கொண்ட 200 சோதனைகள் இருந்தால் நிகழ்திற அலைவுகள்

$$200(p+q)^2 = 200(p^2+2pq+q^2)$$

என்பதால் கிடைக்கும். இதில் $p=q=\frac{1}{2}$ எனக் கொண்டால்

$$200\left(\frac{1}{4}\right) + 200\left(\frac{1}{2}\right) + 200\left(\frac{1}{4}\right) = 50+100+50$$

என்று வரும். இவை முறையே இரண்டு வெற்றிகள், ஒரு வெற்றி, ஒரு வெற்றியுமில்லாமை ஆகியவற்றுக்கான நிகழ்திற அலைவுகளைக் குறிக்கும்.

3 சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் இருக்குமாளுல், N சோதனைகளில் நிகழ்திற அலைவுகளை

$$N(p+q)^3$$

என்ற ஈருறுப்பு விரிவுக் கோவையிலிருந்து தீர்மானிக்கலாம். N என்பது 200க்குச் சமமாளுல்,

$$200\,(p^3+3p^2q+3pq^2+q^3)$$

என்று வரும். இதில் p என்பது $\frac{1}{2}$-க்குச் சமமாளுல்

$$200\left(\frac{1}{8}\right) + 200\left(\frac{3}{8}\right) + 200\left(\frac{3}{8}\right) + 200\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= 25 + 75 + 75 + 25.$$

என்று கிடைக்கும். இந்த உறுப்புகள் முறையே மூன்று வெற்றிகள், இரண்டு வெற்றிகள், ஒரு வெற்றி, ஒரு வெற்றியுமில்லாமை ஆகியவற்றின் நிகழ்திற அலைவுகளைக் குறிக்கின்றன. இந்தப் பெருக்கல்

முறையைக் கையாண்டு கிடைக்கின்ற அலைவுகளின் கூடுதலானது விரிவுக் கோவையிலிருந்து கிடைக்கும் எல்லா வகையான சாத்திய மான விளைவுகளுக்கான சோதனைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

எனவே, ஒரேமாதிரியான, ஆனால் சார்பிலாத நிகழ்ச்சிகளை முன்கூட்டியே அறிவோமானால்,[2] கொடுக்கப்பட்ட அளவுக்கு வெற்றிகள் அல்லது தோல்விகள் ஆகியவற்றின் நிகழ்திற அலைவு களைத் தீர்மானிக்க முடியும். p-யும் q-வும் சமமாக இருந்தாலும் சரி, இல்லாவிட்டாலும் சரி இது பொருந்தும். நமக்கு வேண்டுவன எல்லாம் p-யும் q-வும் மாறாது இருக்கவேண்டும் என்பதே. புள்ளியியல் கொள்கையின் வளர்ச்சிக்கு இவ்வுண்மை மிகுந்த முக்கியமுடையது.

ஈருறுப்புப் பரவல் (The Binomial Distribution)

சோதனைகள்மூலம் கிடைத்த முடிவுகளை, ஈருறுப்புக் கோவை யில் கருதுகோள் அலைவுகளோடு (theoretical frequencies) ஒப்பிடு கையில், சில முக்கியமான குறிப்புகள் தெரியவரும். 12 பகடைகள் பல தடவைகள் உருட்டப்படுகின்றன. 4, 5 அல்லது 6 தோன்று வது வெற்றி என்றும் 1, 2 அல்லது 3 தோன்றுவது தோல்வி என் றும் கருதப்படுகிறது. (எடுத்துக்காட்டாக, ஒருதடவை பகடை களை எறியும்போது, பின்வரும் புள்ளிகள் கிடைப்பதாகக் கொள் வோம்: 3, 1, 5, 1, 2, 4, 4, 6, 3, 2, 3, 5. இவற்றில் ஐந்து வெற்றி கள் உள்ளன எனக் கொள்ளவேண்டும்.) டபிள்யூ. எஃப். ஆர். வெல்டன் (W. F. R. Weldon)[3] என்பவரால் குறிக்கப்பட்ட சிறப் புடைய எடுத்துக்காட்டு ஒன்றை இங்கே கூறுவோம். மேற்கூறிய வாறு வெற்றியினைக் கருதி, 12 பகடைகள் 4,096 தடவைகள் உருட்டப் பட்டன. 6-1 பட்டியலில் இரண்டாவது பத்தியில் அந்த முடிவு

[2] மேற்கண்டது போன்ற, அனுபவ வாயிலாக உருவாக்கப்படும் முன்கூட்டி அறிந்த நிகழ்திறங்களுக்கும் கண்டறிந்ததன்வாயிலாக உருவாக்கப்படும் நடை முறை நிகழ்திறங்களுக்கும் ஒரு வேறுபாடு கற்பிக்கப்படுவதுண்டு. பின்கூறிய வகைக்கு எடுத்துக்காட்டு, 35 வயதான ஒரு நபர் 10 ஆண்டுகள் வாழ நிகழ்திறம் 74,173/81,822 என்ற விதமாகும்; இது அமெரிக்க ஆயுள் அனுபவப் பட்டியலி லிருந்து (American Experience Table of Mortality) 35 வயதில் உள்ள 81,822 நபர்களில் 10 ஆண்டு கழித்து 74,173 நபர்களே வாழ்ந்தனர் என்ற செய்தியின் அடிப்படையில் அமைக்கப்பட்டது. (தற்போதைய ஆயுள்துறை வளர்ச்சியை நோக்க இந்தப் பட்டியல் அமைப்பு வழக்குக் குன்றியது என்பதைக் கவனிக்கவும்.) முன்கூட்டி அறிந்த நிகழ்திறங்கள் உருப்பெறாத நிலையில் அமைபவை; எனவே, நடைமுறை நிகழ்திறங்களையும் நடைமுறை நிகழ்திறங்களை அளக்கும் அலைவு விதங் களின் கோட்பாட்டு அமைப்பான, கோட்பாட்டு நிகழ்திறங்களையும் வேறுபடுத்தி அறிவது (பார்க்க: கிராமர், து.நூ.ப. 29, 22, நேமன், து.நூ.ப. 118, 119).

[3] Encyclopaedia Britannica, 11ஆம் பதிப்பு, 22ஆம் தொகுதி, 394ஆம் பக்கத்தில் எஃப்.ஒய். எட்ஜ்வொர்த்தால் (F. Y. Edgeworth) எடுத்தாளப்பட்டது.

களையும், 6.1 படத்தில் அந்தப் பரவலையும் தந்துள்ளோம். இந்தப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரியும், தரவிலக்கமும் முறையே 6.139, 1.712 என்ற கணிப்பினால் நமக்குக் கிடைக்கின்றன.

12 குறையற்ற (அதாவது சரி நடு அமைதிவாய்ந்த) பகடைகளால் மேற்கூறிய சூழ்நிலைகளுக்கேற்ப நாம் எதிர்பார்க்கக்கூடிய முடிவுகளோடு ஒப்பிட்டுக் காண்போம். ஒவ்வொரு தடவையும் 12 பகடைகள் எறியப்படுகின்றன. ஆகையால் இங்கே 12 பிணைப்பிலா நிகழ்ச்சிகளுள்ளன. 4,096 சோதனைகள் நடத்தப்படுகின்றன. 4, 5 அல்லது 6 வெற்றியாகக் கருதப்படுவதால் $p = q = \frac{1}{2}$.

ஈருறுப்பு விரிவுக் கோவையின் உறுப்புகள்

$$(p + q)^n = p^n + np^{n-1}\, q + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^{n-2} q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{n-3} q^6 + \ldots + q^n$$

எனக் கிடைக்கும். தற்போது நாம் ஆராயும் எடுத்துக்காட்டில்

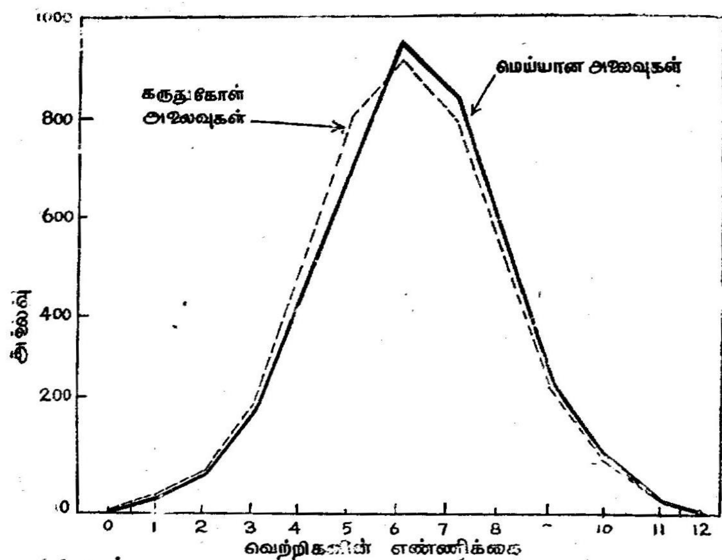
$$4{,}096 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right]^{12}$$

என்று வருகிறது. இதனை விரிவுபடுத்தி எழுதினால்,

$$4{,}096\left(\frac{1}{4{,}096} + \frac{12}{4{,}096} + \frac{66}{4{,}096} + \frac{220}{4{,}096} + \frac{495}{4{,}096} + \frac{792}{4{,}096} + \frac{924}{4{,}096} + \frac{792}{4{,}096} + \frac{495}{4{,}096} + \frac{220}{4{,}096} + \frac{66}{4{,}096} + \frac{12}{4{,}096} + \frac{1}{4{,}096}\right)$$

என வரும். மேலே காட்டப்பட்ட பெருக்கல்களை முற்றிலும் செய்து, 4,096 தடவைகள் 12 பகடைகளை எறிந்து பெறக்கூடிய வெற்றிகளின் கருதுகோள் அலைவுகளைக் கணக்கிடலாம். இவற்றை 6-1 பட்டியலில் 3ஆம் பத்தியில் தந்துள்ளோம்.

6.1 படத்தில், கருதுகோள் அலைவுகளைக் கண்டறிந்த அலைவுகளோடு பரவலாகக் காட்டியுள்ளோம். இந்த இரண்டு பரவல்களுக்குமுள்ள உறவு நெருக்கமாகத் தோன்றுகிறது. (இந்த 'நெருக்கம்' எத்தகைய அளவினது என்பது பின்னர் விளக்கப்படும்.)



6.1.படம்.

பகடை உருட்டும் சோதனை ஒன்றில் மெய்யான அலைவுகளையும் கருதுகோள் அலைவுகளையும் ஒப்புநோக்கியது.

பட்டியல் 6–1

பகடை உருட்டும் சோதனை ஒன்றில், மெய்யான அலைவுகளையும் கருதுகோள் அலைவுகளையும் ஒப்புநோக்கியது

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை (1)	கண்டறிந்த அலைவுகள் (2)	கருதுகோள் அலைவுகள் (3)
0	0	1
1	7	12
2	60	66
3	198	220
4	430	495
5	731	792
6	948	924
7	847	792
8	536	495
9	257	220
10	71	66
11	11	12
12 n=12	0	1
	N = 4,096	4,096

6-1 பட்டியலில் (1), (3) பத்திகளில் குறிக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஏற்ற பரவலும், 6.1 படத்தில் ஒடிந்த கோடுகளால் வரைபடமாகக் காட்டப்பட்டிருப்பதுமான ஈருறுப்புப் பரவலானது (binomial distribution) புள்ளியியல் கொள்கையிலும் புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்துவதிலும் மிகுந்த முக்கியமுடையது. ஈருறுப்புப் பரவலின் பொது வாய்பாடாவது பின்வருமாறு :

$$y = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \qquad (6.2)$$

இதில் n என்பது ஒரு சோதனையில் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை; p என்பது ஒரு தனி நிகழ்ச்சியின் வெற்றியின் நிகழ்திறம் ; q என்பது தோல்வியின் நிகழ்திறம்; x என்பது குறிப்பிடப்பட்ட அளவுள்ள வெற்றிகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்திறம்; $n!$ என்ற குறியீடு ' ஃபேக்டோரியல் n ' என்பதைக் குறிப்பதாகும் ; இது 1-லிருந்து n வரையுள்ள முழு எண்களின் பெருக்குத்தொகை; இதேபோல ஃபேக்டோரியல் x-ஐ $x!$ என்று குறிப்போம். இந்த வாய்பாட்டின் பயனை எடுத்துக்காட்டால் விளக்குவோம். நான்கு நாணயங்களைச் சுண்டும் ஒரு சோதனையில் சரியாக மூன்று தலைகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்திறத்தை அறிய விரும்புகிறோம். கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைச் சமன்பாட்டிலிட்டு (அதாவது n என்பதற்கு 4-ம், x என்பதற்கு 3-ம், p என்பதற்கு 1/2-ம், q என்பதற்கு 1/2-ம் பதிலிட்டால்)

$$y = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)(1)} \left\{ (\tfrac{1}{2})^3 \cdot (\tfrac{1}{2})^1 \right\} = \frac{24}{6} (\tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{2}) = 4/16$$

என்று கிடைக்கும்.

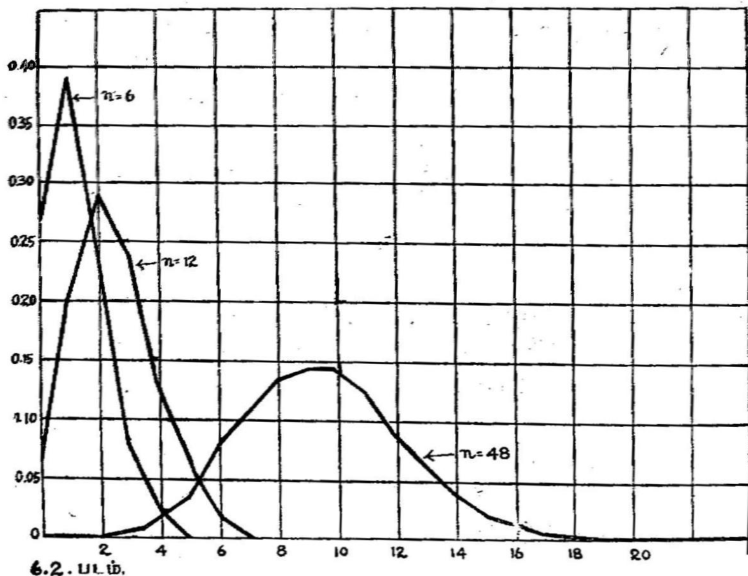
எனவே, நான்கு நாணயங்களைச் சுண்டும்போது மூன்று தலைகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்திறம் 4/16 ஆகும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் சில பண்புகள் தொகுக்கப்பட்டுக் கீழே சுருக்கமாகத் தரப்பட்டுள்ளன.

இந்தப் பரவல் தொடர்ச்சியற்றது. 6.1 படத்தில் காட்டப்பட்டிருக்கும் வகைபோல இதனுடைய வரைவடிவம் தொடர்பற்று அமைந்திருக்கும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டில் p, n (q என்பது $1-p$க்குச் சமமாக இருப்பதால் அதனைத் தனி அளவு என்று கருதுவதில்லை) ஆகிய முழுமைத் தொகுதியளவைகளைப் (parameter) பொறுத்தே அதனுடைய வடிவம் அமையும். n என்ற முழுமைத் தொகுதியளவை எப்போதுமே ஒரு நேர் முழு எண்ணாகவே (positive integer) இருக்கும்.

p, q என்பன சமமாக இருக்கும்போது பரவல் இருபுறமும் சமச்சீராகவும் p, q சமமில்லாதபோது சமச்சீரின்றியும் இருக்கும். ஆனால் n அதிகமாகும்போது p-ம் q-ம் (சமமில்லாதவை) மாற்றமடையாதிருந்தால் கோட்டத்தின் அளவு மிகவும் குறைந்து காணப்படும். 6.2 படத்தில், n அதிகரிப்பின்போது இவ்விதம் சமச்சீர் உருவாவதை வரைவடிவமாகக் காட்டியுள்ளோம். இங்கே n 6, 12, 48 ஆகியவற்றுக்கு அடுத்தடுத்துச் சமமாக இருக்கும்போது $(0.8+0.2)^n$, அதாவது $(q+p)^n$-ஐ விரித்து எழுதுவதனால் கிடைக்கின்ற பரவல்கள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு பரவலுக்கும் y அச்சில் காட்டப்பட்டுள்ள அலகுகள், மொத்தத்தின் சதவிகிதங்களாகும். n-ன் மதிப்புகள் அதிகரிக்கும்போது, p-ம் q-ம் சமமில்லாதிருந்தாலுங்கூட உருவத்தின் சமச்சீர் அதிகரிக்கும்; n-ன் குறைந்த மதிப்புகளுக்குக் காணப்படுகிற தொடர்பின்மைகளும் ஓரளவுக்குக் குறைவுபடும். இதனைப்பற்றி அடுத்த பகுதியில் மேலும் கூறுவோம்.



6.2. படம்.

ஈருறுப்புப் பரவல்கள். $n=6$, $n=12$, $n=48$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கு $(0.8+0.2)^n$ என்ற ஈருறுப்புக் கோவையின் வரைவடிவம்

ஈருறுப்புப் பரவலுக்குச் சராசரியாக[4]

$$\mu = np \tag{6.3}$$

எனக் கிடைக்கும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் வேறுபாடு[4]

$$\sigma^2 = npq \tag{6.4}$$

என்றும், தரவிலக்கம்[4]

$$\sigma = \sqrt{npq} \tag{6.5}$$

என்றும் வரும்.

6-1 பட்டியலில் தரப்பட்ட கருதுகோள் பரவலிலிருந்து கிடைத்த n, p, q ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை மேற்கூறிய சமன்பாடுகளில் பதிலிட

$$\mu = 12 \times 0.5 = 6$$

என்றும்,

$$\sigma = \sqrt{12 \times 0.5 \times 0.5} = \sqrt{3} = 1.732$$

என்றும் கிடைக்கும். கண்டறிந்த அளவுகளின் சராசரியான 6.139 உடனும் அந்த அளவுகளின் தரவிலக்கமான 1.712 உடனும் இவற்றை ஒப்பிடலாம். இவற்றில் காணப்படும் வேறுபாடுகள், மாதிரி முறையின் ஏற்ற இறக்கங்களின் காரணத்தாலோ, வெல்டனுல் உபயோகிக்கப்பட்ட பகடைகளின் குறைபாடுகளினுலோ இருக்கலாம். இந்த இருவகை விளைவுகளையும் (காரணங்களையும்) வேறுபடுத்தி அறிவதற்கான முறைகளைப் பின்னர் ஆராய்வோம்.

ஈருறுப்புப் பரவலைப்பற்றிய விவரங்களைக் கையாளுகையில் ஒப்பீட்டு அடிப்படையில் அமைந்த அளவுகளையோ அளவு வீதங்களையோ பயன்படுத்தவேண்டிய சமயங்கள் அடிக்கடி நேர்கின்றன. எடுத்துக்காட்டாக 6-1 பட்டியலில் 1ஆம் பத்தியில் கூறப்பட்ட 'வெற்றிகளை' 12 பகடைகள் கொண்ட வீச்சு ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள நிகழ்ச்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கைக்கு வீதமாக அதாவது 0/12, 1/12, 2/12 என்பதுபோல அளக்கலாம். பிரிவு அளவுகள் முன்போலவேதான் இருக்கும்; இப்படி ஈருறுப்புப் பரவலாக அமைந்துள்ள அளவு வீதங்களின் சராசரியான μ' என்பது,

$\mu' = p$ என்பதாலும், தரவிலக்கமான σ' என்பது

$$\sigma' = \sqrt{\frac{pq}{n}} \tag{6.6}$$

[4] பிற்சேர்க்கை D-ல், மாதிரிப் பிழைபற்றிய பின்வரும் பகுதிகளில் பயன்படவிருக்கும் இவ் வாய்பாடுகளைப் பெறும் விதம் தரப்பட்டுள்ளது.

என்பதாலும் கிடைக்கும். எனவே 6-1 பட்டியலில் தரப்பட்ட கருது கோள் ஒப்பீட்டு அலேவுகளின் சராசரி 0.5 ஆகவும் தரவிலக்கம் 0·144 ஆகவும் வரும்.

புள்ளியியல் கொள்கையில் பயன்படுத்தப்படும் பல கணித வடிவங்களில் ஈருறுப்புப் பரவலும் ஒன்று. இந்த வடிவங்கள் ஒவ் வொன்றும் ஒரு புலனுகாத, பொதுமையமைப்பாகும்; இவற்றின் தன்மைகளே எந்த அடிப்படையான பண்புகளிலிருந்தும் கோட்பாடு களிலிருந்தும் பெறுகின்றோமோ, அவற்றைத் திட்டவட்டமாக வரை யறை செய்ய முடியும். இப் புலனுகாத கோட்பாடுகளே உலக நடை முறையில் நிகழ்வனவற்றோடு எவ்விதத் தொடர்புமின்றி உருவாக்க லாம்; நடைமுறை நிகழ்ச்சிகளினுல் இவை பாதிக்கப்படுவதில்லே. ஆனுல், சில சமயங்களில் இதுபோன்று உருவாக்கப்பட்ட வடிவங் களுக்கு, சில துறைகளில் இயற்கை நிகழ்ச்சிகள் ஓரளவு பொருந்தும் வகையில் அமைந்து காணப்படலாம். அத்தகைய சமயங்களில் இந்த வடிவத்தின்மூலமாக அத்தகைய நிகழ்ச்சிகள்பற்றி நன்கு புரிந்து கொள்ளவும், அத்தகைய நிகழ்ச்சிகள்பற்றிப் பொதுமையான முடிவுகள் எடுப்பதற்கும் இயலும். மேலே கூறிய எடுத்துக்காட்டி லிருந்து, ஈருறுப்புக் கோவையின் வடிவத்திற்குப் பெரிதும் ஒத்து வரும் பரவல்கள் பல துறைகளில் கிடைக்கலாம் என்பது தெரிய வரும். எனவே, இத்தகைய வடிவங்களேக் கருவியாகப் பயன்படுத்தி விவரங்களே ஆராய்ந்தறிதல் சாத்தியமாகிறது.

இயல்நிலேப் பரவல் (Normal Distribution)

6.1 படத்தில் பகடை உருட்டும் சோதனேகளில் கிடைக்கின்ற கருதுகோள் அலேவுகளேக் குறிக்கும் வளேகோட்டை மீண்டும் எடுத்துக் கொள்வோம். இது முற்றிலும் சமச்சீருடைய 12 பக்கங்கள் கொண்ட பலகோணம். (அடித்தளத்தை விட்டு) பக்கங்களின் எண்ணிக்கை, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சிக்கலிலுள்ள சார்பிலா நிகழ்ச்சி களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்கிறது. 6 நிகழ்ச்சிகள் இருந் தால் 6 பக்க வடிவமும், 20 நிகழ்ச்சிகள் இருந்தால் 20 பக்க உருவ மும், மற்றும் இதுபோலும் கிடைக்கும். எனவே, அதிகமாகும்போது அதற்கியைந்து பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையும் அதிகமாகும் என்பதும் $(p+q)^n$ என்ற ஈருறுப்புக் கோவைக்கு ஏற்ற வரைபடமானது, ஓர் இயைந்த வளேகோட்டுக்கு அருகில் நெருங்கிக் கொண்டு வரும் என்பதும் வெளிப்படை.

p, q ஆகியவை 6.1 படத்தில் குறிப்பிட்ட பரவல்களுக்கு இருப் பதுபோலச் சமமாக இருந்தாலும் அல்லது 6·2 படத்தில் காட்டப் பட்டுள்ள பரவல்களுக்கு இருப்பதுபோலச் சமமில்லாது இருந்தாலும்,

n-ன் மதிப்பு அதிகமாக அதிகமாக ஈருறுப்புப் பரவல்கள் தொடர்ச்சியுடையனவாகும். மேலும் p-ம் q-ம் சமமில்லாது இருக்கும்போது n-ன் குறைந்த மதிப்புகளால் கிடைக்கின்ற பரவல்களில் காணப்படும் கோட்டம், n அதிகமாக அதிகமாக, குறையும் (6.2 படத்தில்). p-ம் q-ம் மாறிலியாக இருக்கும்போது n-ஐ 6-லிருந்து 12-க்கும், 48-க்கும் அதிகரிக்கையில் சமச்சீராவதற்கான இயக்கம் காணப்படுவதை முன்னரே குறித்தோம். அத்தகைய வளைகோடு n எண்ணிலி (infinity) ஆகும்போது ஓர் இழைந்த சமச்சீர் வளைகோடாக அணுகும். இவ்விதமாக ஈருறுப்புப் பரவல் அணுகிச் செல்கின்ற வரம்பு இயல்நிலைப் பரவல் (normal distribution)[5] எனப்படும்.

6.5 படத்தில், (பக்கம் 202) இயல்நிலைப் பிழை வளைகோடு (normal curve of error) என அழைக்கப்படும் இதன் வரைவடிவம் தரப்பட்டுள்ளது.

புள்ளியியல் கொள்கையிலும் அவற்றின் செயல்முறை நடப்புகளிலும் இயல்நிலைப் பரவல் நெடுங்காலமாகவே முக்கியமான இடத்தைப் பெற்றிருக்கிறது. முதன்முதலில் 200 ஆண்டுகளுக்குமுன் டி மாய்வர் (De Moivre) என்பவர், தொடர்பில்லாத ஈருறுப்புப் பரவலின் வரம்பாக அமையும் தொடர்புடைய அமைப்பாக இதனைக் கண்டறிந்து வரையறை செய்தார். பின்னர் 19ஆம் நூற்றாண்டின் ஆரம்பகாலத்தில் சி. எஃப். காஸ் (C. F. Gauss) என்பாரும் பி. எஸ். லாப்லாஸ் (P. S. Laplace) என்பாரும் தனித்தனியே மீண்டும் அதனைக் கண்டுபிடித்தார்கள். கண்டறிந்த குறிப்புகளின் பிழைகளைப்பற்றிய ஆராய்ச்சிகளில் இவ் வடிவத்தை இவர்கள் கண்டனர். எல்லாவிதமான இயற்கைத் தத்துவங்களையும் அளந்து கண்டறிந்த குறிப்புகளின் பரவல்களுக்கு ஏற்ற வடிவமாக இயல்நிலை 'விதி' அமைவதாக மிக உறுதியுடன் கருதப்பட்டது. பின்னர் இத்துணை மிகுதியாக எல்லாவற்றிற்கும் இவ் விதியினை வலியுறுத்துவதை [இது கார்ல் பியர்ஸன் (Karl Pearson) அவர்களாலும் அவருடன் லண்டன் பல்கலைக் கழகத்தில் கால்டன் சோதனைக் கூடத்தில் பணியாற்றிய இதர ஆராய்ச்சியாளர்களாலும் முக்கியமாகக் கொண்டுவரப்பட்ட திருத்தம்] திருத்தி, இயற்கையில் அமைகின்ற பலவகைப் பரவல்களில் இயல்நிலைப் பரவலையும் ஒன்றாகக் கருதி ஏற்ற இடம் தரப்பட்டது. ஆனால், கெண்டால் (Kendall) கூறுவதுபோல, 'இந்தப் (இயல்நிலை) பரவலின் சிறப்பு

[5] (*np* என்ற அளவு மாறிலியாக இருந்து) *p* சுழியையும், *n* எண்ணிலியையும் அணுகும் விதிவிலக்கான சூழ்நிலையில, வரம்பில் உருவாகும் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலன்று, பாய்சான் (Poisson) பரவல் எனப்படும் தொடர்ச்சியற்ற பரவலாகும். மிக அரிதாக நேரும் சம்பவங்களின் —அதாவது *p* மிகச் சிறிதாக இருக்கையில்—கண்டறிந்த அலைவுகளையுடைய முழுமைத்தொகுதி அமைப்புக்கு, இப் பரவல் மிகவும் பயன்படுகிறது.

கண்டறி துறைகளில் குறைவுபடக் குறைவுபட, கருதுகோள் துறையில்—குறிப்பாக மாதிரிக் கொள்கையில்—அதிகரித்தது'. மாதிரிக் கொள்கையானது மிக வளர்ந்து புள்ளியியல் நூலாரின் அடிப்படையான கவனத்துக்கு உரியதாக ஆனபோது, இயல்நிலைப் பரவலானது நவீனப் புள்ளியியலின் ஒரு தூணாக மீண்டும் தனது இடத்தை நிலைநிறுத்திக் கொண்டது.

இந்த வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதும்போது y என்ற அலைவை x என்ற மாறியின் கோவையாக எழுதுகிறோம். சார்பிலா மாறியின் மூலத்தை வசதிக்காகச் சராசரியில் எடுத்துக்கொள்கிறோம். எனவே x என்ற மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டால், அது அந்த மாறியின் தரப்பட்ட மதிப்பு ஒன்றின் x-ன் சராசரியிலிருந்து விலக்கமாக எழுதியதனால் கிடைத்தது என்பதை அறியவும். இந்தச் சமன்பாடு பல அமைப்புகளில் எழுதப்படுகிறது. இந்த வளைகோட்டுக்குள் அடங்கிய பரப்பு ஒன்றாக இருப்பதாக எடுத்துக்கொண்டு இந்த விரிவுக் கோவையை

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \qquad (6.7)$$

என்ற அடிப்படை வடிவத்தில் எழுதுகின்றனர். இச் சமன்பாட்டில் σ என்பது கொடுக்கப்பட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் தரவிலக்கம்; π என்பது 3.14159 என்ற மதிப்பையுடைய மாறிலி; e என்பது 2.71828 என்ற மதிப்பையுடைய மாறிலி (இதுவே இயற்கை லாகிருத அமைப்பின் அடிப்படை). வளைகோட்டுப் பரப்பு 1 என நாம் கூறும்போது, குறிப்பதற்கும், கணிப்பதற்கும் வசதியாக இருப்பதற்காக மொத்த அலைவான N-ஐ 1க்குச் சமமாக்குகிறோம் என்பதே பொருள். குறிப்பிடப்பட்ட பரவலின் குத்தாயங்களைப் பெறுவதற்காக (6.7) வாய்பாட்டில் கிடைக்கும் குத்தாயங்களை N ஆல் பெருக்கவேண்டும். எனவே குறிப்பிட்ட பரவலுக்கு இசைந்த இயல்நிலை வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \qquad (6.8)$$

என்பதால் கிடைக்கிறது.

(6.8) வாய்பாட்டில் $\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ என்ற அளவானது, குறிப்பிடப்பட்ட மொத்த அலைவான N-க்கும் குறிப்பிடப்பட்ட தரவிலக்கமான σ-வுக்கும் பொருந்தி வருகிற இயல்நிலை வளைகோட்டின் உச்சக் குத்துக் கோடான y_0-ஐக் குறிக்கிறது. எனவே N ஆயிரமாகவும், σ பத்தாகவும் இருக்கும்போது

$$y_0 = \frac{1000}{10\sqrt{2\pi}}$$

என்று கிடைக்கும். π என்பதற்கு 3.14159 என்ற மதிப்பைப் பதிலிட்டால் y_0 என்பது 39.894 எனக் கிடைக்கிறது. y_0 என்பது தெரிந்தால் இயல்நிலை வளைகோட்டுக்குப் பின்வரும் அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம் :

$$y = y_0 e^{-x^2/2\sigma^2} \qquad (6.9)$$

எனவே, உச்சக் குத்தாயத்திலிருந்து x தூரத்தில் தரப்படும் குத்தாயத்தை, உச்சக் குத்தாயத்தினை $e^{-x^2/2\sigma^2}$ என்ற அளவால் பெருக்கித் தீர்மானிக்கலாம். (இயல்நிலைப் பரவலில் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகிய மூன்றும் ஒன்றுகின்றன. எனவே, X அளவுத்திட்டத்தில் இந்த மூன்று ஒன்றிய மதிப்புகளும் விழுகின்ற புள்ளியிலமைந்த குத்தாயமே உச்சக் குத்தாயமாகும்.) எடுத்துக்காட்டாக, மேற்கண்ட பரவலில் X அளவுத் திட்டத்தில் சராசரியிலிருந்து 20 அலகுகள் தொலைவிலுள்ள குத்தாயம்

$$y = 39.894 \times 2.71828^{-400/200}$$

$$= 39.894 \times \frac{1}{2.71828^2}$$

$$= 5.399$$

என்ற மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்.*

இறுதியாக உள்ளடங்கிய பரப்பு ஒன்றாக உடைய வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை நாம் எடுத்துக்கொள்ளலாம்; இதில் (6.7), (6.8), (6.9) ஆகிய வாய்பாடுகளில் காணப்படுவதுபோல X மாறியின் சராசரிகளின் தரவிலக்கத்தை மூல X அலகுகளால் எழுதாது, X-ன் தரவிலக்க அலகுகளால் எழுதுவோம். அதாவது X அளவுத் திட்டத்தில் அளவையின் அலகு x/σ ஆக இருக்கும்; இதில் x என்பது $X - \mu$ என்ற விலக்கமாகும். (6.7) என்பதில் உள்ள சமன்பாட்டு வகையைச் சேர்ந்த சமன்பாடுதான் இதுவும்; ஆனால் இதில் σ என்பது 1 ஆகும். அதாவது

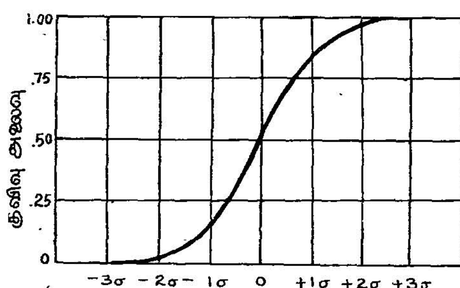
$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad (6.10)$$

இது சராசரிச் சுழியாகவும், தரவிலக்கம் ஒன்றாகவும், பரப்பு ஒன்றாகவுமுள்ள பொது அமைப்பில், இயல்நிலைப் பரவலின் விரிவுக்

* குத்தாயத்தைக் கணிப்பதற்குப் பட்டியல் மதிப்புகள் பெரிதும் உதவும். பார்க்க, பியர்சன் அண்டு ஹீட்லி (Pearson and Heatly) து.நா.ப. 126, பிஷர் அண்டு யேட்ஸ் (Fisher and Yates) து. நா. ப. 51.

கோவையைக் கொடுக்கும். எந்த மாறியையும் மூல அளவை அலகுகளில் மாற்றவேண்டுமானாலும் தனித்த அலைவுகளைக் காணவேண்டுமானாலும், கொடுக்கப்பட்ட σ, n ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைப் பயன்படுத்திக் கணிப்புகள்மூலம் பெறலாம்.

அலைவுகள் சராசரியில் (இதுவே இடைநிலை, முகடு ஆகியவையும் ஆகும்) உச்சத்தையடைந்து, சராசரிக்கு மேற்பட்ட x மதிப்புகளுக்கு, சமச்சீராகச் சரிவடையும் வளைகோட்டு அமைப்பை 6.5 படத்தில் குறிப்பிட்டுள்ளோம். இதுவே இயல்நிலை அளவுக்கோவை (normal frequency function) எனப்படும். இதற்கு இசைந்த அலைவுகள் மேல்நோக்கிக் குவிக்கப்படுகின்ற குவிப்புப் பரவல் (88ஆம் பக்கம் 3·13 படம் பார்க்கவும்) இயல்நிலைப் பரவல் கோவை (normal distribution function) என அழைக்கப்படுகிறது. இதனை 6·3 படத்தில் வரைவடிவமாகக் காட்டியுள்ளோம். வீச்சின் கீழோரத்தில்



6.3. படம். குவிவு இயல்நிலை வளைகோடு: இயல்நிலைப் பரவல் கோவை.

குவிவு அலைவுச் சுழியாகவும் மேலோரத்தில் N-ஆகவும் (பொதுமைப் படுத்திய இயல்நிலை அமைப்பில் ஒன்றாகவும்) இருக்கும்.

இயல்நிலைப் பரவலின் சில பண்புகள்

இந்தப் பரவலின் தலையாய பண்புகளில் சில முன்பே குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இந்தப் பரவல் சமச்சீருடையதாகவும் (கோட்டம் $=0$) தொடர்ச்சியுடையதாகவும் இருக்கும். கருதுகோள்படி x-ன் வீச்சு $-\infty$-லிருந்து $+\infty$ வரை இருக்கும். $x=-3\sigma$, $x=+3\sigma$ ஆகியவற்றிலுள்ள குத்தாயங்களுக்கிடையே வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்பு 0·997 ஆகும். μ, σ ஆகிய முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளால் பொதுவான பரவல் முற்றிலும் வரையறை செய்யப்படும். அதாவது சராசரியின் இடஅமைப்பு (x அளக்கப்படும் அடிப்படை) தெரிந்து தரவிலக்கமும் குறிப்பிடப்பட்டால்,

ஒன்றைப் பரப்பாகவுடைய (அதாவது $N=1$ ஆக உள்ள) வளை கோட்டுக்கு, அலைவுகளின் பரவலைத் தீர்மானிக்கலாம். (மேலே 6·7 வாய்பாடு காண்க.) குறிப்பிடப்பட்ட கண்டறிந்த மதிப்புகளின் தொகுதிக்கு μ, σ ஆகியவை தவிர N-ம் தெரிந்தால்தான் தனித்த அலைவுகளைத் தீர்மானிக்கலாம் (6.8 சமன்பாடு காண்க).

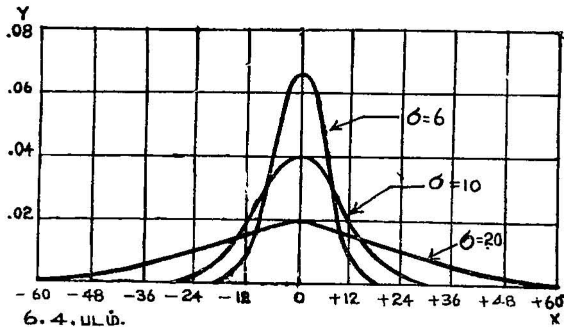
இயல்நிலைப் பரவலின் வடிவ அமைப்பினை ஆராய்ந்தால் $\mu+\sigma$, $\mu-\sigma$ ஆகிய புள்ளிகளில் குழிவான குவிவு (inflection) அமையக் காணலாம்.

இயல்நிலைப் பிழை வளைகோட்டைப் பொதுவான அமைப்பில் வழக்கமாக உருவாக்கும்போது, (N-ன் மாறுபாடுகள் தவிர) இயல்நிலை அளவு வளைகோடுகள் யாவும் ஒரே மாதிரியாக இருப்பதுபோல் தோன்றுகிறது. மேலும் μ, σ ஆகிய முழுமைத் தொகுதி அளவுகளின் மாற்றத்தினால் (N மாறாதிருக்கும்போது) வளை கோட்டில் ஏற்படும் விளைவுகளை ஆராய்வது பயனுடையது. μ என்பதில் மாற்றம் ஏற்பட்டால் அதன் விளைவாக x அளவுத் திட்டத்தின் வழியே வளைகோடு நகர்த்தப்படுமேயொழிய, அமைப்பில் ஏதும் மாற்றம் ஏற்படாது. ஆனால் σ என்பதில் மாற்றம் ஏற்படுமானால் இரண்டு அளவுத் திட்டங்களிலும் மாற்றங்கள் தோன்றி, குறிக்கப்பட்ட வளைகோட்டின் ஒப்பிட்டு வீத முறையிலேயே மாற்றங்கள் தோன்றும். x அளவுத் திட்டத்தில் இதன் விளைவு வெளிப்படையாகத் தெரிகிறது. ஆனால் y அளவுத் திட்டத்திலும் இதனால் மாற்றம் நிகழ்கிறது. ஏனெனில், பரப்பு ஒன்றாகவுள்ள வளைகோட்டின் உச்சக் குத்தாயத்தின் மதிப்பு σ-ன் மதிப்புக்கேற்ப அமையும். (ஏனெனில் $y_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$). σ என்பதை 6-லிருந்து 10-க்கும் பின்னர் 20-க்கும் மாற்றி N ஐ மாறாமல் ஒன்றாகவும், μ-ஐ மாறாமல் 0 ஆகவும் எடுத்துக்கொண்டால், கிடைக்கும் வளைகோடுகள் 6·4 படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

இயல்நிலைப் பிழை வளைகோட்டின் சமன்பாட்டைப் பல வகைகளில் உருவாக்கலாம். ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லையாக அமைந்த வளைகோட்டின் சமன்பாடாகப் பெறலாம்.[6] இந்தப் பிழை சமன்பாட்டை, காஸ் (Gauss) பெற்றமுறை, குறைந்த வர்க்கம்பற்றிய தரமான நூல்களில் காணப்படும். அந்தச் சமன்பாட்டை நாம் எண்பித்தல் இன்றிக் (proof) கொடுத்துள்ளோம். ஒருவேளை, இந்தக் கட்டத்தில் இந்த வடிவத்தை ஈருறுப்புப் பரவலின் வரம்பாக மாணவர்கள் உள்ளுணர்வால் ஏற்றுக்கொள்ளலாம். ஆனால்,

[6] 1733-ல் டி மாய்வரால் (De Moivre) நிறுவப்பட்ட ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லைபற்றிய தேற்றத்தின் எண்பித்தலுக்கு, கிரேமர் (Cramer) காண்க. [து. நா. ப. 23, 198—203.]

கண்டறிந்த விவரங்களின் பரவல் இயல்நிலையாக இருக்கவேண்டு மானால், தரப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள தனிப்பட்ட நிகழ்ச்சி களின் காரணிகளாக விளங்கும் நான்கு அடிப்படை நிபந்தனைகளைத்



6.4. படம்.

வேறுபட்ட தர விலக்கங்களை உடைய இயல்நிலை அலைவு வளைகோடுகளை ஒப்பிடல்

தந்து, இயல்நிலைப் பரவலானது கண்டறிந்து ஆராயும் துறைகள் பலவற்றில் பயனுவதற்குக் காரணத்தை விளக்குவோம்.

1. காரணிகளான இச் சக்திகள் பலவாகவும் ஏறக்குறைய சமமான பளு உடையதாகவும் இருக்கவேண்டும்.
2. இந்தக் கண்டறிந்த விவரங்கள் எந்த முழுமைத் தொகுதியி லிருந்து எடுக்கப்பட்டனவோ அந்த முழுமைத் தொகுதி முழு வதற்கும் இதே சக்திகள் இயங்கவேண்டும். (நிகழ்ச்சிக்கு நிகழ்ச்சி இவை தோன்றும் விதம் மாற்றம் அடையலாம்.) இதுவே ஒரே சீராக (homogeneous) இருப்பதற்கான நிபந்தனை.
3. தனித்தனி நிகழ்ச்சிகளைப் பாதிக்கும் சக்திகள் ஒன்றுக்கொன்று சார்பிலாது இருக்கவேண்டும்.
4. முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கு மேற்பட்டுள்ள விலக்கங் களின் எண்ணிக்கையும் அளவும், கீழ்ப்பட்ட விலக்கங்களின் எண்ணிக்கையாலும் அளவாலும் நிரவப்படும் வகையில், காரணி களாக இச் சக்திகளின் இயக்கம் இருக்கவேண்டும். இதுவே சமச்சீராக (symmetry) அமைவதற்கான நிபந்தனை.

இயல்நிலை வளை கோட்டுக்குள்ளடங்கிய பரப்புகள்

இயல்நிலைப் பரவலறிவைச் செயல்முறையில் பயன்படுத்து வதற்கு, முன்கூட்டியே தயாரிக்கப்பட்ட பட்டியல்கள் வசதியாக இருக்கின்றன; இதிலே பொதுமைப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை வளை கோட்டுக்குக் குறிப்பிடப்பட்ட x/σ மதிப்புகளுக்குக் குத்தாயங்களும், சராசரியிலிருந்து குறிப்பிடப்பட்ட தூரங்களில் நிறுத்தப்பட்ட

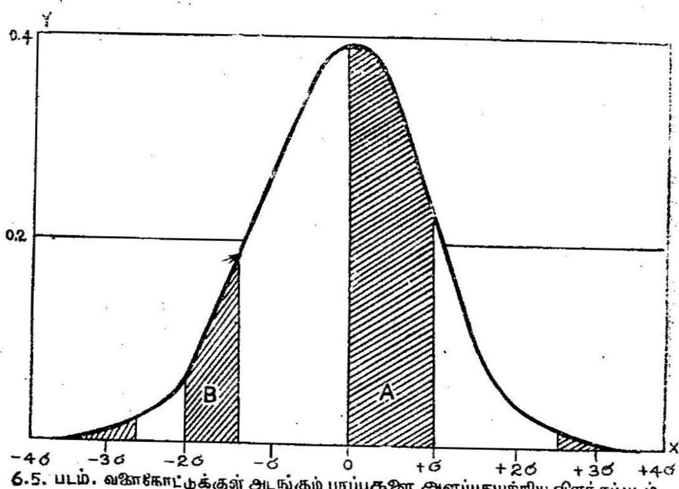
குத்தாயங்களுக் கிடையே வளைகோட்டுக்குக்கீழ் அடங்கும் பரப்பு மொத்தப் பரப்புக்குள்ள வீதமும், தரப்பட்டிருக்கும் கொடுக்கப்பட்ட எந்தப் பரவலுக்கும் N, σ ஆகிய மதிப்புகளுக்கேற்ப இந்தக் குத்தாயம் பரப்பு ஆகியவற்றின் பொதுவான மதிப்புகளை எளிய கணிப்புகளால் மாற்றி அமைத்துக்கொள்ளலாம். பட்டியலாக அமைக்கப்பட்டுள்ள குத்தாயங்களைவிடப் பட்டியலாக அமைக்கப்பட்ட பரப்புகள் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. 6-2 பட்டியலில் பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் சில தரப்பட்டுள்ளன. திருத்தமான கணிப்புக்குத் தேவையான, இதனினும் விரிவான அளவைகள் I என்ற பிற்சேர்க்கைப் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. இயல்நிலை வளைகோட்டுக்கான குத்தாயங்களும் அவற்றோடு பரப்புகளும், பியர்ஸன் அண்டு ஹீட்லி (Pearson and Heatly) (து நூ.ப. 126) ஃபிஷர் அண்டு ஏட்ஸ் (Fisher and Yates) (து.நூ.ப. 51) ஆகியோரது நூல்களில் தரப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 6–2

மட்டாயத்துக் கேற்ப வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்புகள் (y_0லிருந்தும், அதிலிருந்து வேவ்வேறு தொலைவுகளிலும் நிறுவப்படும் குத்தாயங்களிடைப்படும் பரப்பை மொத்தப் பரப்பின் பின்னமாகத் தருதல்).

x/σ	a	x/σ	a
0.0	.00000	2.0	.47725
0.1	.03983	2.1	.48214
0 2	.07926	2.2	.48610
0.3	.11791	2.3	.48928
0.4	.15542	2.4	.49180
0.5	.19146	2.5	.49379
		2.5758	.49500
0.6	.22575	2.6	.49534
0.7	.25804	2 7	.49653
0.8	.28814	2.8	.49744
0.9	.31594	2.9	.49813
1.0	.34134	3.0	.49865
1.1	.36433	3.1	.49903
1.2	.38493	3.2	.49931
1.3	.40320	3.3	.49952
1.4	.41924	3.4	.49966
1.5	.43319	3.5	.49977
1.6	.44520	3.6	.49984
1.7	.45543	3.7	.49989
1.8	.46407	3.8	.49993
1.9	.47128	3.9	.49995
1.96	.47500	4.0	.49997

உச்சக் குத்தாயத்துக்கு இருபுறமும் நிலையியல் வளைகோடு சமச்சீராக இருப்பதால் 6-2 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ள மதிப்புகள் சராசரிக்கு இருபுறமுள்ள கண்டறிந்த குறிப்புகளுக்கும் பயனாகும். அத்தகைய பட்டியலைப் பயன்படுத்தும் முன்னர், சராசரியிலிருந்து கிடைத்த விலக்கங்களை முதலில் தரவிலக்க அலகுகளாக மாற்ற வேண்டும். [அத்தகைய உறுப்புக்கு, அதாவது அந்த அளவையானது ஓர் இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரியிலிருந்து பெற்ற விலக்கம் அந்தப் பரவலின் தரவிலக்க அலகுகளால் விவரிக்கப்படுவதற்கு இயல்நிலை விலக்கம் (normal deviate) என்ற சொல்லைப் பயன்



6.5. படம். வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்புகளை அளப்பதுபற்றிய விளக்கப்படம்.

படுத்துகிறோம்.] எந்த இரண்டு குத்தாயங்களுக்குமிடையே அமைந்த மொத்தப் பரப்புக்குமுள்ள விகிதத்தைப் பின்னர் எளிதில் தீர்மானிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக ஒன்று காண்போம். ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் உச்சக் குத்தாயத்திற்கும், சராசரியிலிருந்து $+1\sigma$ தூரத்தில் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயத்திற்குமிடையே அடங்கும் குறிப்புகளின் வீதம் என்ன? x/σ காலத்தில் 1.0 என்பதற்கு நேராக .34134 என்ற மதிப்பைப் பார்க்கிறோம். இது குறிப்பிடப்பட்ட எல்லைகளுக்கிடையே விழுகின்ற விவரங்களின் தராதரமாக விகித வடிவத்தில் தரப்பட்டுள்ளது. இந்த விகிதத்தினைச் சதவீதமாக மாற்றி 34.134 சதவிகிதம் என்று கூறினால் நமது கேள்விக்கு விடை கிடைத்துவிடுகிறது.

6.5 படத்தில் வளைகோட்டுக்குள்ளடங்கும் மொத்தப் பரப்புக்கு, இந்தப் பரப்பின் (A என்ற கோடிட்ட பகுதி) உறவு குறிக்கப் பட்டிருக்கிறது. [6.5 படத்தில் y அளவுத் திட்டத்தில் அளக்கப் பட்டுள்ள குத்தாய மதிப்புகள், $N=1$, $\sigma=1$ ஆக இருக்கும்போது, பொது வாய்பாட்டைப் (6.10) பயன்படுத்திப் பெறுகிற மதிப்புகளே.]

சராசரியிலிருந்து -1.4σ தூரத்திலும், -2σ தூரத்திலும் நிறுத் தப்பட்ட குத்தாயங்களுக்கிடையே விழும் குறிப்புகள், இயல்நிலை அலைவுப் பரவலின் குறிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கைக்கு என்ன வீதத்தில் இருக்கும்? y_0 என்பதற்கும், -1.4σ-லுள்ள குத்தாயத் திற்குமிடையே மொத்தப் பரப்பில் 41.924 சதவீதப் பரப்பு விழும் என்பது பட்டியலிலிருந்து தெரிகிறது; y_0 என்பதற்கும், -2σ லுள்ள குத்தாயத்துக்குமிடையே 47.725 சதவீதப் பரப்பு விழும் எனத் தெரி கிறது; எனவே, இதன் வேறுபாடான 5.801 சதவீதப் பரப்பு -1.4σ விலும், -2σ விலும் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயங்களுக்கிடையே விழும் என அறியலாம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவலிலுள்ள குறிப்பு களின் மொத்த எண்ணிக்கைக்கு இந்த வீதத்தை எடுத்துக்கொண்டு உண்மையான அலைவுகளாக மாற்றலாம். 6.5 படத்தில் கோடிட்ட பகுதியான B இதைக் குறிக்கிறது.

சில காரணங்களுக்காக, இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரியிலிருந்து ஒரு குறிப்பிடப்பட்ட அளவுக்கு அல்லது அதற்கு மேற்பட்டு இரு புறத்திலும் விலக்கமடைகின்ற குறிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை யின் வீதத்தை அறிய விரும்புகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, சராசரியிலிருந்து 1.96σ அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விலக்க மடைகிற குறிப்புகள் எல்லாவற்றின் வீதங்களையும் அறிய விரும் பினால், $+1.96\sigma$ என்பதற்கும், வளைகோட்டின் மேல் எல்லைக்கு மிடையேயுள்ள பரப்போடு -1.96σக்கும் கீழ் எல்லைக்குமிடையே யுள்ள பரப்பையும் கூட்டவேண்டும். இப் பரப்புகள் ஒவ்வொன்றும் 0.50000—0.47500 அல்லது 0.025 ஆகும். எனவே, சராசரியி லிருந்து $+1.96\sigma$ அல்லது அதற்கு மேற்பட்டு விலக்கமடையும் குறிப்புகளின் சதவீதம் 2.5 ஆகும்; -1.96σ அல்லது அதற்கு மேற் பட்டு விலக்கமடையும் குறிப்புகளின் சதவீதம் 2.5 ஆகும். எனவே, சராசரிக்கு மேலேயும் கீழேயும் 1.96σ அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விலக்கமடையும் குறிப்புகளின் சதவீதம் 5.0 ஆகும். இதைப் போலவே 6-2 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ள செய்திகளைக்கொண்டு இயல்நிலைப் பரவலின் மொத்தக் குறிப்புகளில் ஒரு சதவீதம் சராசரி யிலிருந்து நேராகவோ, எதிராகவோ 2.5758σ அல்லது அதற்கு மேற்பட்டு விலக்கமடையும் எனத் தீர்மானிக்கலாம். இந்த 'ஒரு சதவீதப்' பரப்பு 6.5 படத்தின் இரு வால்களிலும் கோடிட்ட பகுதி

களின் கூடுதலென அறியவும். இந்தத் துண்டங்களிலுள்ள எல்லை களைக் காட்டும் குத்தாயங்கள் $+2.5758\sigma$, -2.5758σ ஆகிய இடங் களில் நிறுத்தப்பட்டுள்ளன; வெளி எல்லைகள் எண்ணிலி (infinity) தூரத்திலுள்ளன.

மேற்கூறிய ஈரெல்லைகளும் தனிச் சிறப்புடையன; ஏனெனில்; மாதிரிப் பிழைகளைக் கண்டறிவதில் இவை மிகவும் பயன்படுகின்றன. இதுபற்றிப் பின்னர் விவரிப்போம். கொடுக்கப்பட்ட எல்லைகளுக் குள்ளே வளைகோட்டுக்குள் அடங்கிய பரப்புகளை, மொத்தப் பரப்பின் வீதமாகத் தருகின்ற எண்களை நிகழ்திறங்களாகக் கருதியும் விளக்கம் தரமுடியும் என்பதைக் கவனிக்கவும். இயல்நிலைப் பிழை விதியின்படி (normal law of error) பரவலாக அமைந்துள்ள முழு மைத் தொகையில் எதேச்சையாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு குறிப்பு சராசரிக்கும், சராசரிக்கு ஒரு தரவிலக்கம் மேற்பட்ட மதிப்புக்கு மிடையே வீழ்வதற்கு நிகழ்திறம் 0.34134; சராசரியிலிருந்து 1.96σ அல்லது அதற்கு அதிகமாக ஒரு குறிப்பு விலக்கமடைவதற்கான நிகழ்திறம் 0.05 ஆகும். சராசரியிலிருந்து 2.5758σ அல்லது அதற்கு மேற்பட்டு ஒரு குறிப்பு விலக்கமடைவதற்கான நிகழ்திறம் 0.01 ஆகும்.

இயல்நிலை வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்புகளின் பட்டியலி லிருந்து, குறிப்புகள் அமைவதற்கான நிகழ்திறத்தை அறியும் வீதத்தையும், கொடுக்கப்பட்ட இயல்நிலை விலக்கத்தின் சிறப்பைத் தீர்மானிக்கும் விதத்தையும் நன்ருகப் புரிந்துகொள்ளவேண்டும். இம் முறைகள் புள்ளியியலார் பணிகளின் பல துறைகளில் பயனு கின்றன.

சிதறல்பற்றிய ஒரு பொதுத் தேற்றம்: சராசரியிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட தூரத்தில் உள்ள புள்ளிகளில் நிறுவப்பட்ட குத்தாயங்களுக்கிடையேயும் புறத்தேயும் வீழ்கின்ற குறிப்பு களின் வீதம்பற்றிய மேற்கூறிய கூற்றுகள் யாவும் இயல்நிலை விதிப்படி பரவிய குறிப்புகள் குறித்தனவே. செபிசெப் சமமின்மை (Tchebycheff's Inequality) எனக் குறிக்கப்படுகின்ற செபிசெப் தேற்றத்தின்மூலம், எல்லாவகையான பரவலிலும் குறிப்பிடப் பட்ட எல்லைகளுக்கப்பால் அமைகின்ற வீதத்துக்குப் பயனுள்ள ஒரு பொது விதி தரப்படுகிறது. ஓர் அலைவுப் பரவலின் சராசரி யிலிருந்து ஒரு தரப்பட்ட தொலைவைத் தரவிலக்க அலகுகளில் k எனக் குறிப்போம். செபிசெப் தேற்றத்தின்படி, பரவலின்

வளைகோட்டுக்குள், சராசரியிலிருந்து k தொலைவில் நிறுவப்படும் குத்தாயங்களுக்குப் புறத்தே விழும் மொத்தப் பரப்பின் வீதம் (அதாவது, எல்லாக் குறிப்புகளின் வீதம்) $1/k^2$க்குச் சமமாகவோ குறைவாகவோ இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, கொடுக்கப்பட்ட பரவலில் சராசரியிலிருந்து (இரு திக்கிலும்) 4 தரவிலக்கம் அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விலக்கமடைகின்ற குறிப்புகளின் வீதம், மொத்தத்தில் 1/16க்குச் சமமாகவோ குறைவாகவோ இருக்கும். 2 தரவிலக்கங்கள், அல்லது அதற்கும் மேற்பட்டு விலக்கமடைபவற்றின் வீதம் 1/4 அல்லது அதற்கும் குறைவாக இருக்கும். வெளிப்படையான எடுத்துக்காட்டு ஒன்று தருவோம்: சராசரி $6,000மும், தரவிலக்கம் $300-மாக இருக்குமாறு ஊதியம் பெறுவோர் முழுமைத் தொகுதி ஒன்றில், $6,000-லிருந்து $600 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விலக்கமுடைய வருமானம் பெறுவோர் மொத்தத்தில் நான்கில் ஒரு பங்கினர் அல்லது அதற்கும் குறைவு. பரவல் எத்தகைய வடிவினது என்பதுபற்றிக் கருதாமலேயே இவ்விதமான கருத்தினைக் கூறலாம். மாதிரி பெரிதாக இருக்கவேண்டும் என்பது மட்டுமே நிபந்தனை.

செபிசெப் சமமின்மை ஒருவிதத்தில் திருத்தமில்லாத கருவியாக இருக்கிறது. ஆனால், பரவலின் வடிவம் இதுவெனத் தெரியும்போது, பரவல் ஒரு முகடுடையதா, தொடர்புடையதா என்பது தெரிந்தால்கூட, மேலும் திருத்தமான கூற்றுகளை வெளியிட முடியும். செபிசெப் தேற்றத்தின் பெருமை, அது மிகவும் பொதுமையான ஒரு தேற்றம் என்பதில்தான் இருக்கிறது. ஆனால், பரவலின் வடிவம்பற்றி நாம் அறியாத நிலையில்கூட, உடனடியாகச் சிதறலின் அளவுபற்றித் தெளிவான குறிப்பைப் பெறுவதற்கு இது பயன்படுகிறது.[7]

இயல்நிலைப் பிழை வளைகோட்டின் பயன்களும், அதனைச் சார்ந்த பரப்புப் பட்டியல் பயன்களும் விரிவஞ்சி இங்கே விளக்கப்படவில்லை. இதனை ஓரளவுக்கு அறிந்துகொள்ள எளியதோர் எடுத்துக்காட்டே போதும்.

[7] செபிசெப் தேற்றம்பற்றிய வாதத்துக்கு, ஸ்மித் (Smith) (து. நூ. 145), கிராமெர் (Cramer) (து. நூ. 23), மூட் (Mood) (து. நூ. 109) முதலியவை காண்க.

இயல்நிலை வளைகோட்டைப் பொருத்துதல் : கொடுக்கப்பட்ட கண்டறிந்த விவரங்களுக்கேற்ப இயல்நிலை வளைகோட்டினைப் பொருத்தும் செயல்முறைக்காகக் கண்டறிந்த அலைவுகளுக்கேற்பக் கருதுகோள் குறிப்புகளைக் கணித்தல் வேண்டும். இயல்நிலை வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்புகளின் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி இதனைச் செய்யலாம் (பிற்சேர்க்கை, பட்டியல் I-ல் காண்க). அத்தகைய பட்டியலை முந்திய பகுதியில் கூறப்பட்டதுபோன்று பயன்படுத்தி, உச்சக் குத்தாயத்துக்கும் பல்வேறு பிரிவு எல்லைகளில் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயங்களுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்புகளைத் தீர்மானிக்கலாம்; எளிதாகக் கழித்து ஒவ்வொரு பிரிவுக்குள்ளும் அடங்கும் பரப்பையும், எனவே கருதுகோள் அலைவுகளையும் தீர்மானிக்கலாம்.

வளைகோட்டைப் பொருத்துவதாகிய இச் செயல் முறையினை விளக்க, நியூயார்க் நகர பஃபெலோ (Buffalo) பகுதி குடியிருப்புத் தொலைபேசிச் சந்தாதாரர்களின் 995 பேர்கொண்ட மாதிரியிலிருந்து வருடாந்தரத் தொலைபேசி அழைப்புகளின் எண்ணிக்கைபற்றிய பரவலைப் பயன்படுத்துவோம்.[8] குடியிருப்புச் சந்தாதாரர்களின் முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலைப் பரவலாக அமைவதற்கான சூழ்நிலை நிலவுவதை அடிப்படையாகப் புனைந்துகொள்கிறோம். நடைமுறையில் கண்டறிந்த குறிப்புகளால் சோதித்துப் பார்த்தே இப் புனைவின் உண்மையை அறியவேண்டும். செய்தி பயன்படுத்தப்படும் வீச்சு வரம்பில்லாததன்று என்பது உறுதிதான்; சரியாகக் கூறப்போனால், செய்தி பயன்படுத்தும் அளவுத் திட்டத்தின் கீழ் எல்லையாகச் சுழி இருக்கிறது. ஆனால், சுழி என்பதில் ஓர் எல்லை இருப்பது, கருதுகோள் சூழ்நிலைகளுக்கு முரண்படாது இருக்குமாறு, கண்டறிந்த குறிப்புகளின் வீச்சுக்குள், அலைவுகள் சரிவடைவது மிகவும் கூரியதாக அமைந்துள்ளது.

6-3 பட்டியலில் தொலைபேசிச் சந்தாதாரர்களது மெய்யான பரவல் தரப்பட்டுள்ளது. புனைந்துகொள்ளப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி, தரவிலக்கம் ஆகியவற்றுக்கு மதிப்பீடுகள் தேவைப்படுகின்றன. இந்த இரண்டு அளவைகளின் கணிப்புகள் பட்டியலின்கீழே தரப்பட்டுள்ளன.[9]

[8] அமெரிக்கன் டெலிஃபோன் அண்டு டெலிகிராஃப் கம்பெனியாரின் புள்ளி விவரப் பகுதியினர் நடத்திய ஆராய்ச்சியிலிருந்துஇந்தப் பரவல் உருவாக்கப்பட்டது. அமெரிக்கன் டெலிஃபோன் அண்டு டெலிகிராஃப் கம்பெனியாரின் தலைமைப் புள்ளியியலார் வெளியிட்ட ஸ்டாடிஸ்டிகல் புல்லட்டின், ஸ்டாடிஸ்டிகல் மெதட் சிரிஸ் நம்பர் 1 (Statistical Bulletin, Statistical Methcds Series, No. 1.) என்ற நூலில் 'அலைவு வளைகோடுகளும் சராசரியும்' என்ற பகுதி காண்க.

[9] (7), (8) பத்திகளில் தரப்பட்டுள்ள குறிப்புகள் இந்த அதிகாரத்தில் பின்னர் ஆராயப்படும். இப்போது இவற்றைக் கருத வேண்டா.

6-3 பட்டியலில் காட்டப்பட்டுள்ள குறிப்புகளின்படி மாதிரிச் சராசரி 476·96 எனவும், தரவிலக்கம் 147.65 எனவும் வருகிறது. மாதிரிச் சராசரியை முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியான μ-ன் மதிப்பீடாகப் பயன்படுத்தலாம் ஆனால், முன்னரே கண்டபடி, முழுமைத் தொகுதியின் σ-க்குப் பிறழ்ச்சி இல்லாத (unbiased) மதிப்பீடு தேவையானால், மாதிரித் தரவிலக்கத்தை மாற்றி அமைத்தாகவேண்டி யிருக்கிறது (150ஆம் பக்கம் காண்க). மாறுபாட்டில் இதற்கான திருத்தத்தைச் செய்கிறோம். முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டின் பிறழ்ச்சியில்லாத மதிப்பீடாக,

$$s'^2 = \frac{N}{N-1} s^2$$

கிடைக்கிறது. இந்த எடுத்துக்காட்டில் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் s^2 என்பது 8·7182 ஆகும். எனவே,

$$s'^2 = \frac{995}{994} \times 8.7182 = 8.7270$$

அதனால் $s' = 2.954$

மூல அலகுகளில் s'ஐப் பெறவேண்டுமானால், இம் மதிப்பைப் பிரிவு இடைவெளியான 50ஆல் பெருக்கவேண்டும். எனவே, முழுமைத் தொகுதி தரவிலக்கத்தின் பிறழ்ச்சியில்லாத மதிப்பீடு 147.70 ஆகும். (கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டுபோன்ற, பெரிய மாதிரிகளில் s-க்கும், s'-க்கும் நடைமுறையில் அதிக வேறுபாடு இல்லை. ஆனால், சிறிய மாதிரிகளில் s-னும் s'-ஏ உயர்ந்தது.)

கருதுகோள் பிரிவு மதிப்புகளைத் தீர்மானிப்பது நமது அடுத்த வேலை. அதாவது 476.96 சராசரியும், 147·70 தரவிலக்கமுமுடைய இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட 995 குறிப்புகளின் பரவலுக்கு 0-50, 50-100 முதலான பிரிவு இடைவெளிகளில் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவுகளைக் காணவேண்டும். 6-4 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ள கணிப்புகள், பிற்சேர்க்கைப் பட்டியல் I-ல் தரப்பட்டுள்ளதுபோன்ற இயல்நிலை வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்புகளின் பட்டியலின் அடிப்படையில் கணிக்கப்பட்டன. [பிற்சேர்க்கைப் பட்டியல் I-ல் தரப்பட்டதைவிட இங்குப் பயன்படுத்திய ஷெப்பர்டு பட்டியல் (Sheppard's Table) பரப்புகளை மேலும் தரும்]. முன்கூறிய எடுத்துக்காட்டிலிருந்து இங்குப் பயனாகும் செயல்முறை தெளிவாகும். x அளவுத் திட்டத்தில் 50-விருந்து 100க்குள் விழும் பிரிவின் கீழ் எல்லைக்குத் தரவிலக்க அலகுகளின் சராசரியிலிருந்து விலக்கமாவது $\frac{50 - 476.96}{147.70}$ அல்லது —2.89 ஆகும். பரப்புகளின் பட்டியலிலிருந்து சராசரியில் அமைந்த குத்தாயத்துக்கும்

பட்டியல் 6·3

995 தொலைபேசிச் சந்தாதாரர்கள் வருடத்துக்கு அனுப்பிய செய்திகள் (அலைவுப் பரவலின் மொமென்டுகளைக் கணிப்பது பற்றிய விளக்கம்).

அனுப்பிய செய்திகள் இடைவெளி* (1)	மையப் புள்ளி (2)	அலைவு f (3)	பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் பிரிவு மையப்புள்ளி ஊகிக்கை மூலத்திலிருந்து பெறும் விலக்கம். x' (4)	fx' (5)	$f(x')^2$ (6)	$f(x')^3$ (7)	$f(x')^4$ (8)
0- 50	25	0	−10	0	0	0	0
50- 100	75	1	− 9	− 9	81	− 729	6,561
100- 150	125	9	− 8	− 72	576	−4,608	36,864
150- 200	175	19	− 7	−133	931	−6,517	45,619
200- 250	225	38	− 6	−228	1,368	−8,208	49,248
250- 300	275	50	− 5	−250	1,250	−6,250	31,250
300- 350	325	95	− 4	−380	1,520	−6,080	24,320
350- 400	375	85	− 3	−255	765	−2,295	6,885
400- 450	425	115	− 2	−230	460	− 920	1,840
450- 500	475	132	− 1	−132	132	− 132	132
500- 550	525	144	0	0	0	0	0
550- 600	575	116	1	116	116	116	116
600- 650	625	79	2	158	316	632	1,264
650- 700	675	54	3	162	486	1,458	4,374
700- 750	725	31	4	124	496	1,984	7,936
750- 800	775	11	5	55	275	1,375	6,875
800- 850	825	5	6	30	180	1,080	6,480
850- 900	875	6	7	42	294	2,058	14,406
900- 950	925	2	8	16	128	1 024	8,192
950-1,000	975	1	9	9	81	729	6,561
1,000-1,050	1,025	1	10	10	100	1,000	10,000
1,050-1,100	1,075	1	11	11	121	1,331	14,641
		995		−956	9,676	−22,952	283,564

கணிப்புகள்

$M' = 525$

$c = \dfrac{-956}{995}$

$= -0\ 9608$

c (மூலஅலகுகளில்)

$= -0.9608 \times 50$

$= -48.04$

$M = M' + c$

$= 525 - 48.04$

$= 476.96$

$s^2 = \dfrac{9676}{995} - (-0.9608)^2$

$= 9.7246 - 0\ 9231$

$= 8.8015$

ஷெப்பர்டு திருத்தங்களுடன்†

$s^2 = 8.8015 - 0.0833$

$= 8.7182$

$s = 2.953$

s (மூல அலகுகளில்)

$= 2.953 \times 50$

$= 147.65$

பட்டியல் 6-4

பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து கருதுகோள் அளவைகளைக் கணிப்பதுபற்றிய விளக்கம்

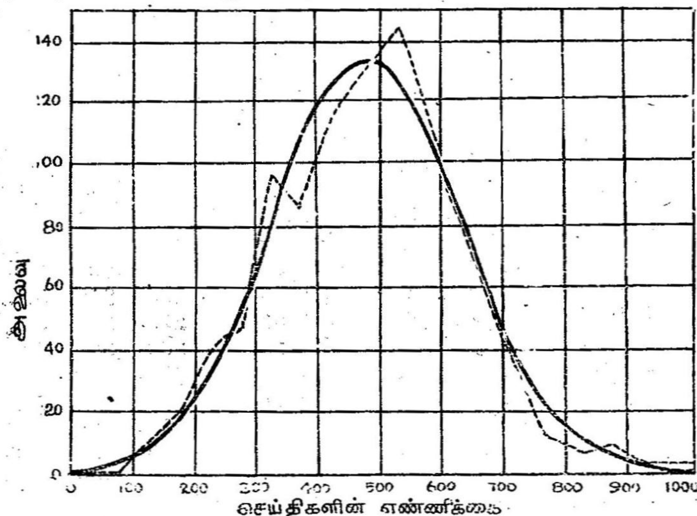
பிரிவு இடைவெளி	σ அலகுகளில் சராசரியிலிருந்து விலக்கம $\frac{x}{\sigma}$	y_0-க்கும் $\frac{x}{\sigma}$ என்ற புள்ளிகளில் நிறுவிய குத்தாயங்களுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பின் வீதம்	y_0-க்கும் $\frac{x}{\sigma}$-ல் நிறுவிய குத்தாயத்துக்கும் இடைப்படும் குறிப்புகளின் எண்ணிக்கை	ஒவ்வொரு பிரிவிலும் கருதுகோள் அலைவுகள்	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
0	—3.23	.4993810	496.88		
50	—2.89	.4980738	495.58	0- 50	1.92‡
100	—2.55	.4946139	492.14	50- 100	3.44
150	—2.21	.4864474	484.02	100- 150	8.12
200	—1.88	.4699460	467.60	150- 200	16.42
250	—1.54	.4382198	436.03	200- 250	31.57
300	—1.20	.3849303	383.01	250- 300	53.02
350	— .86	.3051055	303.58	300- 350	79.43
400	— .52	.1984682	197.48	350- 400	106.10
450	— .18	.0714237	71.07	400- 450	126.41
500	+ .16	.0635595	63.24	450- 500	134.31
550	+ .49	.1879331	186.99	500- 550	123.75
600	+ .83	.2967306	295.25	550- 600	108.26
650	+1.17	.3789995	377.10	600- 650	81.85
700	+1.51	.4344783	432.31	650- 700	55 21
750	+1.85	.4678432	465.50	700- 750	33.19
800	+2.19	.4857379	483.31	750- 800	17.81
850	+2.53	.4942969	491.83	800- 850	8.52
900	+2.87	.4979476	495.46	850- 900	3.63
950	+3.20	.4993129	496.82	900- 950	1.36
1,000	+3.54	.4997999	497.30	950 1,000	.48
1,050	+3.88	.4999478	497.45	1,000-1,050	.15
1,100	+4.22	.4999878	497.49	1,050-க்கும் மேல்	.05
					995.00

* இங்குள்ள அமைப்புப்படி 50 என்ற மதிப்பு 50ஐ மேல் எல்லையாகக் கொண்ட பிரிவிலே சேர்க்கப்படும். மற்றப் பிரிவுகளிலும் இதைப்போன்றே அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

† திருத்திய, திருத்தாத மாறுபாடுகள் இரண்டுக்குமே s^2 என்ற ஒரே குறியீடு பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. பின்னர் ஷெப்பர்டு திருத்தங்கள்பற்றிய பொதுவான பிரயோகத்தில் வெவ்வேறு குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்படும்.

‡ கருதுகோள் பரவல்படி, — 3.23σ-க்கும் கீழே .62 பங்கு அடங்கும். பட்டியலின் ஒழுங்கு அமைப்புக் கருதி 0-விருந்து 50 வரைக்கான கருதுகோள் அலைவாக இந்த மதிப்பு சேர்க்கப்படுகிறது.

சராசரிக்குக் கீழே 2.89 தர விலக்கத் தொலேவில் அமைந்த குத்தாயத்துக்கும் இடைப்பட்ட மொத்தப் பரப்பின் வீதம் ·4980738 என அறிகிருேம். இதனே 995ஆல் பெருக்கினுல், வீதமானது, புனேந்துகொள்ளப்பட்ட இயல்நிலே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்து எடுக்கப்பட்ட 995 குறிப்புகள் அடங்கிய மாதிரியின் மொத்த அலேவுகளில் கிடைக்கும். இதன்மூலம் x அளவுத் திட்டத்தில்



6.6. படம்.

அனுப்பிய செய்திகளின் எண்ணிக்கைக்கு ஏற்பத் தொலேபேசிச் சந்தாதாரர்களேப் பாகுபாடு செய்து பெற்ற அலேவுப் பரவலுக்கு இயல்நிலே வளேகோட்டைப் பொருத்துவதுபற்றிய விளக்கப் படம்.

சராசரிக்கும், 50-ல் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயத்துக்குமிடையே எதிர்பார்க்கப்படும் எண்ணிக்கை 495.58 குறிப்புகள் என வரும். இதுபோன்றே கணித்தால், x அளவுத் திட்டத்தில், சராசரிக்கும், 100-ல் நிறுவிய குத்தாயத்துக்குமிடையே எதிர்பார்க்கப்படும் எண்ணிக்கை 492.14 குறிப்புகள் எனக் கிடைக்கும். 495.58க்கும் 492.14-க்குமிடையிலுள்ள வேறுபாடு—அதாவது, 3.44, x அளவுத் திட்டத்தில் 50, 100 ஆகிய எல்லேகளுக்கு இடைப்பட்ட பிரிவின் கருதுகோள் அலேவுகளாகும். ஒவ்வொரு பிரிவுக்கும் இதே செயல்முறையைக் கையாண்டு 6-4 பட்டியலில் 5ஆம் பத்தியில் குறிப்பிடப்பட்ட பிரிவுகளின்படி கருதுகோள் பரவலேப் பெறலாம்.

6-3 பட்டியலில் (3)ஆம் பத்தியில் தரப்பட்ட உண்மை அலேவுகளின் பரவலோடு ஒவ்வொரு பிரிவாகக் கண்டறிந்த அலேவுகளே

ஒப்பிடலாம். (மேலும் வசதியாக ஒப்பிடுவதற்கு 15-9 பட்டியலில் (2), (3) பத்திகளைக் காண்க.) அல்லது 66ஆம் படத்திலுள்ளது போல, உண்மையான பரவலுக்கும், பொருத்தப்பட்ட வளைகோட்டுக்கும் வரைபடத்தின்மூலமாக ஒப்பிடலாம். பல பிரிவுகளில் மிகுந்த வேறுபாடுகள் தோன்றினும், இயல்நிலை வளைகோடு கணிசமான அளவுக்கு விவரங்களைப் பொருத்தியிருப்பதாகக் கண்டறிகிறோம். இயல்நிலை வளைகோடு ஏன் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் பொருந்தி வரவில்லை என்ற கேள்வி இங்கு எழுகிறது. இக்கேள்விக்கு இரு வகையாக விடைகூறலாம். மாதிரியின் ஏற்ற இறக்கங்களே பொருந்தாமற் போனதற்குக் காரணமாக இருக்கலாம்; அதாவது, செய்திகள் பயன்படுத்துவதற்கேற்பப் பாகுபாடு செய்யப்பட்ட உறைவிடத் தொலைபேசி உடையவர்களது பரவல், உண்மையில் இயல்நிலைப் பிழை விதிக்கு ஒத்த ஒரு விதியின் கட்டுக்கோப்பு உடையதாக இருக்கலாம்; நாம் தேர்ந்த சிறிய மாதிரிகளில் காணப்படும் ஒழுங்கின்மைகள் பெரிய மாதிரிகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்போது தேய்ந்து மறையலாம். இதற்கு மாருக இந்த வேறுபாடுகளுக்குக் காரணம் இப் பரவல் இயல்நிலைப் பிழை விதிக்கு அடிப்படையிலேயே பொருத்தமில்லாததாக இருக்கலாம்; அதனுல் இயல்நிலை விதி தொலைபேசி அழைப்புகளின் பரவலை விவரிக்கும் தன்மையில்லாததாக இருக்கலாம்; அப்படி இருக்கும்போது இயல்நிலை வளைகோட்டை அமைப்பது கூடாது.

இக் கட்டத்தில், கருதுகோள் அலைவுகளுக்கும் கண்டறிந்த அலைவுகளுக்கும் இந்த எடுத்துக்காட்டில் காணப்படும் வேறுபாடு, மாதிரி முறை ஏற்ற இறக்கங்களின் காரணத்தினுலேயே என்று கூறுமளவுக்குச் சிறியவை என விவாதமின்றிக் குறிப்போம். இம் முடிவுக்குக் கொண்டுசெலுத்தும் காரணத்தினைப் பின்னர் காண்போம் (அதிகாரம் 15). எனினும், கண்டறிந்த குறிப்புகளுக்கும், அதற்கொத்த இயல்நிலைப் பரவல் குறிப்புகளுக்குமுள்ள வேறுபாடுகள் மிக அதிகமல்ல என்பதற்கு வெளிப்படையாகச் சான்று இருக்கிறது. உறைவிடத் தொலைபேசிச் சந்தாதாரர்களைத் தொலைபேசியைப் பயன்படுத்திய அலைவுகளுக்கேற்பப் பாகுபாடு செய்கையில், இயல்நிலைப் பிழை விதிக்கேற்பப் பரவலாக அமைந்திருப்பர் என்ற எடுகோளுக்குக் கண்டறிந்த குறிப்புகள் முரண்படுவதில்லை.

இம் முடிவு நமது ஆய்வில் கிடைக்கும் முடிவுகளைப் பொதுமையானதாக்குகிறது. நமக்கு இயல்நிலைப் பிழை விதியைச் சார்ந்த பரவல்களின் தன்மை தெரியுமாதலால், கிடைக்கும் பரவலை இவ்வகையோடு தொடர்புபடுத்தியவுடனேயே, பல முடிவுகளைச் செய்யலாம். மூல அலைவுப் பட்டியலைப் பயன்படுத்துகையில், அங்கே நிறுவியுள்ள பிரிவுகளோடு நின்றுவிடுகிறோம். இப்போது இதற்கும் புறத்தே சென்று, கொடுக்கப்பட்ட எல்லைகளிடையே எத்தனை குறிப்புகள்

அமைகின்றன என்று தீர்மானிக்கமுடியும். x அளவுத் திட்டத்தில் எந்த இரு புள்ளிகளுக்கிடையேயும், கொடுக்கப்பட்ட எந்த மதிப்பின் மேலும் கீழும், ஒரு குறிப்பு வீழ்வதற்கான நிகழ்திறத்தைக் கணக்கிடலாம். கண்டறிந்த குறிப்புகளைத் தனியாக எடுத்துக்கொண்டால், கண்டறிந்த குறிப்புகளுக்குமட்டுமே அது சிறப்புடையதாக இருக்கும். ஆனால், கருதுகோள் அலைவுகளில் அத்தகைய வரம்புகள் இல்லை. எந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரி பிரித்தெடுக்கப்பட்டதோ, அது முழுவதற்குமே முடிவுகள் பொதுவாகப் பொருந்தும். நாம் எடுத்துக்கொண்ட மாதிரியின் பிரதிநிதித்துவத் தன்மை தெரிந்த அளவிலேயே, கொடுக்கப்பட்ட பரவலைத் தனியாக எடுத்துக்கொண்டு எத்தனை முறை ஆராய்ந்தாலும் கிடைக்காத முடிவுகளை உய்த்துணர்வதற்கு அடிப்படை கிடைத்துவிடுகிறது. கண்டறிந்த வரம்புகளுக்கும் அப்பாற்பட்டுப் பொதுமை முடிவுகள் செய்யக் கருதுகோள் அலைவுகள் பயனுகுமென்ற உண்மையே, நடைமுறையில் கிடைக்கும் பரவலை இயல்நிலைப் பரவல் போன்ற ஓர் இலட்சிய வகைக்கு ஐக்கியப்படுத்துவதில் கிடைக்கும் பயன்களில் முக்கியமானதாக இருக்கலாம்.[10]

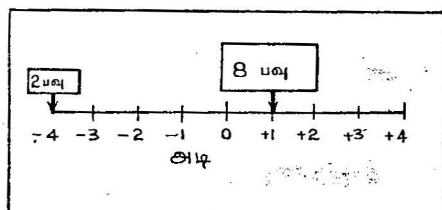
அலைவுப் பரவல்களின் மொமென்டுகள்

அலைவுப் பரவலின் தன்மைகளை நேரடியாகவும் முறையாகவும் வருணிப்பதற்கும், அதன்மூலம் தாய்த்தொகுதியினைப் பற்றி உய்த்துணர்வுகள் செய்வதற்கும் அடிப்படையாகச் சில தத்துவங்களையும் செயல்முறைகளையும் இங்கே அறிமுகம் செய்வது ஏற்றது. இங்கே விவரிக்கப்படும் முறையாவது அலைவுப் பரவலின் ‘மொமென்டுகள்’ கணிப்பினையொட்டி அமைந்தது.

பொறியியல் துறையில் வழங்கும் பழக்கமான சொல் ‘மொமென்டு’ சுழற்சியினை ஏற்படுத்தும் தன்மையுடைய சக்தி குறித்த ஒரு சொல். சக்தியின் அளவையும், மூலத்திலிருந்து எத் தொலைவில் இது பயனுகிறதோ அத் தொலைவையும் பொறுத்தே இந்தப் போக்கினுடைய வலிமையை அறிய முடியும். இத் தத்துவம் 6.7 படத்தில் விளக்கப்பட்டுள்ளது. 8 பவுண்டு சக்தி, சுழி என்ற மூலத்திலிருந்து 1 அடி தொலை

[10] புள்ளிவிவர நூலார் பயன்படுத்தும் கருதுகோள் பரவல்கள் பல உண்டு. அவற்றில் இரண்டையே இந்த அத்தியாயத்தில் கண்டோம். மாதிரி முறைக் கொள்கைக்குச் சிறப்பாகப் பயன்படும் பிற பரவல்கள் இனி வரும் அத்தியாயங்களில் விளக்கப்படும். பாய்சான் பரவல்பற்றி, தரமான நூல்களில் கண்டுகொள்க. கார்ல் பியர்சன் வகுத்துத் தொகுத்த இலட்சிய அலைவுப் பரவல்கள் எல்டர்டனுல் வருணிக்கப்பட்டுள்ளன. து. நூ. ப. 35. பியர்சன் சார்பலன் முதலான பிற பரவல் சார்பலன்கள்பற்றிய விளக்கத்துக்குக் கெண்டாலையும் காண்க. து. நூ. ப. 78, பகுதி 1. அத்துடன் மூடையும் (Mood) காண்க. து. நூ. ப. 109, அத்தியாயம் 6.

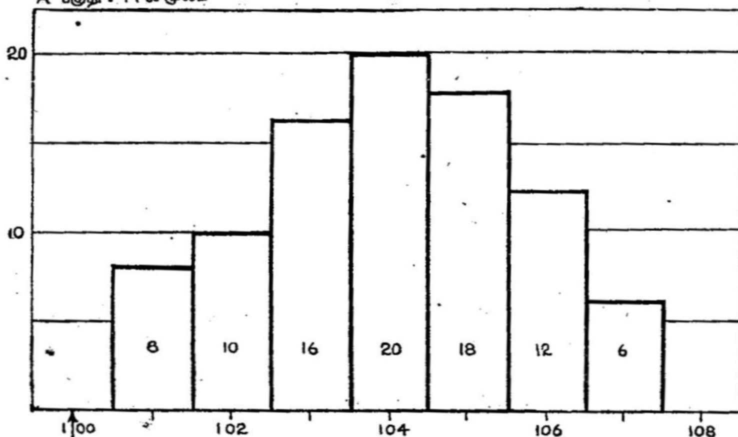
வில் பயன்படுத்தப்படுவதைக் காட்டியுள்ளோம். இது மூலத்தி லிருந்து 4 அடி கீழே 2 பவுண்டு சக்தியினுல் சமனுக்கப்படு கிறது. இந்தச் சமநிலை நேர் எதிர்ப் பெருக்குத் தொகைகளின்

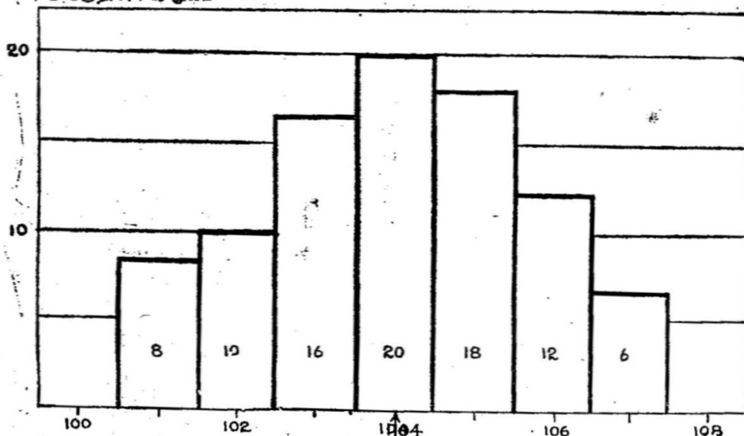


6.7. படம். மொமெண்டுகள் பற்றிய கோட்பாடு விளக்கம்

சம அளவினுல் வரையறை செய்யப்படுகிறது. இந்த இரண்டு அளவுகள் அச்சில் வேறு எங்காவது பயன்படுத்தப்படுமானுல் அல்லது மூலம் நகர்த்தப்படுமானுல், இந்த அழுத்தங்களின் கூடுதல்—இவை மொமென்டுகளினுல் அளக்கப்படுகின்றன —சுழியாக இருக்காது.

புள்ளியியலிலும் 'மொமென்டு' எனும் சொல் ஏறக்குறைய அதே பொருளில் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. 6.8 படத்தின் மேற்புறத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள பட்டை விளக்கப் படத்தை (column diagram) திடவடிவமாகக் கருதுவோம். x அச்சில் ஒவ்வொரு பத்தியும் ஏற்படுத்தும் அழுத்தத்தை அப் பிரிவிலுள்ள கண்டறிந்த குறிப்புகளினுல் அளப்பதாகக் கருதுவோம். ஒவ்வொரு பத்தியிலிருந்து கிடைக்கும் 'மொமென்டின்' பங்கும், அப் பிரிவு அலைவு, M' லிருந்து அதற்கிசைந்த விலக்கம் (x') ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகையால் அளக்கப்படுகிறது. (மூல x அளவுத் திட்டத்தில் 100 என்பது M' என்ற மூலம்—அம்புக் குறியால் காட்டப்பட்டுள்ளது.) fx' பெருக்கங்களின் கூடுதல்கள் மொத்த அலைவுகளால் வகுக்கப்பட்டால், முதல் மொமென்டு எனப்படும் நிகர அளவை ஒன்று கிடைக்கிறது. (படத்திற்குக் கீழுள்ள கணிப்புகளைக் காண்க.) மூலத்தின் இட அமைப்பினைப் பொறுத்தே மொமென்டுகளின் மதிப்புகள் அமைகின்றன என்பது வெளிப்படை. இந்த எடுத்துக்காட்டில், மூல அளவுத் திட்டத்தில் (original scale) 100 என்ற மூலத்திற் கேற்ப (origin) முதல் மொமென்டு $+4$ ஆகும். இந்த அளவையின் கணிப்பில், மூலத்திலிருந்து விலக்கங்களின் முதல் படிகள் பயன்படுவதால், இதனை அலைவுப் பரவலின் முதல் மொமென்டு என்கிறேம். விலக்கங்களின் இரண்டாவது படிகள் பயனுகையில் இரண்டாம் மொமென்டும், மூன்றும் படிகள்





6.8.படம். அலைவுப் பரவலின் முதல் மொமெண்டு கணிப்பு பற்றிய விளக்கம் காட்டப்பட்டுள்ளது.

பயனுகையில் மூன்ரும் மொமென்டும், மற்றும் இதுபோலவும் கிடைக்கும் என்பதைக் காண்போம்.

6.8 என்ற படத்தின் கீழ்ப்பகுதியில் மூல x அளவுத் திட்டத்தில் 104க்கு, மூலம் நகர்த்தப்படுகிறது. இதுவே நடுப் பிரி வின் மையப் புள்ளியும், தற்போதைய எடுத்துக்காட்டில் கூட்டுச் சராசரியுமாகும். இங்கே விலக்கத்துக்கு x என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிரும். இந்த மூலத்திற்கேற்ப முதல் மொமென்டு சுழி ஆகிறது.

ஒரு பரவலில் எந்த மூலத்திலிருந்தும் மொமென்டுகளைப் பின்வருமாறு கணிக்கலாம். ஒவ்வொரு பிரிவின் அலைவையும், x அச்சின் மூலத்திலிருந்து அதன் தொலைவின் குறிப்பிட்ட படிகளால் பெருக்கி, அப் பெருக்கத் தொகைகளைக் கூட்டி, மொத்தக் குறிப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கவேண்டும். அலைவுப் பரவலின் தன்மைகளை நுண்மையாகக் கண்டறிவதற்கு இந்த மொமென்டுகள் பயனுகின்றன. குறிப்பாக, மாறுபாட்டின் தன்மையும் அளவும் மொமென்டுகளால் மிகவும் திருத்தமாக வரையறை செய்யப்படுகின்றன. மாறுபாட்டு அமைப்புகளில் சிறு வேறுபாடுகள்கூட மொமென்டுகளில் பிரதிபலிக்கப்படும். மேலும் இந்த மொமென்டுகள் முன்னரே விவாதிக்கப்பட்ட அடிப்படை விளக்க அளவைகளைத் தருவதோடு, மேலும் பயன் விளைக்கக்கூடிய அளவைகளையும் தருகிறது.

ஓர் அலைவுப் பரவலிலிருந்து மொமென்டுகளைக் கணிப்பதற்கும், அவற்றினின்று பல்வகையான விவரண அளவைகளைப் பெறுவதற்குமான செயல்முறைகளை வகையாக ஆராய்வோம். மாதிரிகளின் மொமென்டுகளுக்கு m என்ற குறியீட்டையும், அவை பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் மொமென்டுகளுக்கு μ என்ற குறியீட்டையும் கையாள்வோம். இவற்றில் ஒட்டுக்குறிகள் அப் படி உருவாக்கப்படும் அளவையான மொமென்டின் படியைக் (order) குறிப்பிடுகின்றன. (படி என்பது, விலக்கங்கள் எந்தப் படிக்கு உயர்த்தப்படுகின்றனவோ, அதே அளவினதான்.) செயல்முறை எடுத்துக்காட்டுகளில் ஏதாவதோர் எதேச்சை மூலத்துக்கு மொமென்டுகளை வசதியாகக் கணித்துக்கொண்டு, அவற்றைப் புள்ளியியல் ஆய்வுகளுக்கு உதவுமாறு கூட்டுச் சராசரி மூலத்துக் கேற்ப மாற்றி அமைத்துக்கொள்ளலாம். தேவையான எந்தப் படிக்கும் மொமென்டுகளைக் கணிக்கலாம். முதல் நான்கு மொமென்டுகளே, பெரும்பாலான சமயங்களில் போதிய அளவுக்குத் திருத்தமான அளவைகளாக அமைந்து விடுகின்றன.

எனவே, முதலாவதாக நாம் கணிப்பது,

$$\left.\begin{array}{ll} m'_1 = \dfrac{\Sigma f(x')}{N} = & \text{எதேச்சை மூலத்தினின்று பரவலின் முதல் மொமென்டு.} \\ m'_2 = \dfrac{\Sigma f(x')^2}{N} = & \text{எதேச்சை மூலத்தினின்று பரவலின் இரண்டாம் மொமென்டு.} \\ m'_3 = \dfrac{\Sigma f(x')^3}{N} = & \text{எதேச்சை மூலத்தினின்று பரவலின் மூன்றும் மொமென்டு.} \\ m'_4 = \dfrac{\Sigma f(x')^4}{N} = & \text{எதேச்சை மூலத்தினின்று பரவலின் நான்காம் மொமென்டு.} \end{array}\right\} \quad (6.11)$$

மைய மொமென்டுகளும், அதாவது சராசரி மூலத்தினின்று கணித்தவைகளும், அதே குறியீட்டிஞல், தலையில் ஒரு கோட்டோடு எழுதப்படும். இந்த மைய மொமென்டுகளை எதேச்சை மூலத்திலிருந்து கிடைத்த மொமென்டுகளிலிருந்து எளிய இயற்கணிதச் செயல்முறைமூலம் கணிக்கலாம். அதாவது,

$$\left.\begin{array}{l} \bar{m}_1 = 0 \\ \bar{m}_2 = m'_2 - m'^2_1 \\ \bar{m}_3 = m'_3 - 3m'_1 m'_2 + 2m'^3_1 \\ \bar{m}_4 = m'_4 - 4m'_1 m'_3 + 6m'^2_1\, m'_2 - 3m'^4_1 \end{array}\right\} \quad (6.12)$$

வழக்கம்போல விவரங்கள் அலைவுப் பரவலாக அமைக்கப்பட்டு அதிலிருந்து மொமென்டுகள் கணிக்கப்படுமாஞல், ஒவ்வொரு பிரிவைச் சேர்ந்த குறிப்புகள் யாவும் அந்தப் பிரிவின் மையப் புள்ளியில் செறிந்திருப்பதாகப் புனைந்துகொள்கிரேம். இம் முறையால் தொகுப்பதிலே நிகழ்கின்ற பிழைகள்பற்றியும், அவற்றுக்கான ஷெப்பர்டு திருத்தங்கள்பற்றியும் முன்பு ஒரு பகுதியில் குறிப்பிட்டுள்ளோம். (பக்கம் 154ஐப் பார்க்கவும்.) பரவலானது தொடர்ச்சியான மாறியினைக் குறித்ததாக இருக்கும்போதும், பரவலின் அலைவு வளைகோட்டில் 'உயர் தொடுகை' (high contact) இருக்கும்பொழுதும், அதாவது பரவலின் அலைவு வளைகோடு இருபுறத்திலும்சீராகச் சரிந்திருக்கும்போதும், இந்த விவரங்களிலிருந்து கணிக்கப்படுகின்ற தரவிலக்கம் முறைப் பிறழ்ச்சிக்கு (systematic bias) உட்படும் என்பதைக் குறிப்பாகக் கூறிஞேம். இதே சூழ்நிலைகளில் 2, 4, 6 முதலான எல்லா இரட்டைப்படை மொமென்டுகளையும் இப் பிழை பாதிக்கும். எனவே, தொகுப்பிஞல் ஏற்படும் பிழைகளைத் தவிர்த்து நம்மிடமுள்ள உடைந்த — தொடர்ச்சியற்ற — பரவலுக்குத் தோராயமாக இதற்கிசைந்த தொடர்ந்த பரவலை எடுத்துக்

கொள்ளவேண்டுமானுல், எல்லா இரட்டைப்படை மொமென்டு களையும் மாற்றி அமைக்கவேண்டும். இரண்டாவது, நாலாவது மொமென்டுகளைத் திருத்துவதுபற்றிக் கவனிப்பதே நடைமுறைக்கு நமக்குப் போதுமானது.

மாதிரிச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட திருத்த மொமென்டுக்கு m என்ற குறியீட்டை ஏற்ற ஒட்டுக்குறியுடன் பயன்படுத்துவோம். [திருத்தப்படாத மொமென்டுகளை m', $\overline{m}$ ஆகிய குறியீடுகளால் குறிப்போம்; இவற்றைச் செம்மைப்படுத்தப்படாத மொமென்டுகள் (raw moments) என்போம்.] ஷெப்பர்டு திருத்தங்களைப் பயன்படுத்தி மைய மொமென்டுகளுக்குப் பயன்படுத்துவதற்கான இறுதி வாய்பாட்டமைப்பை உருவாக்குவோம்.

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_2 &= \overline{m}_2 - 1/12 \\ m_3 &= \overline{m}_3 \\ m_4 &= \overline{m}_4 - \frac{\overline{m}_2}{2} + 7/240 \end{aligned}\right\} \qquad (6.13)$$

1/12, 7/240 ஆகிய திருத்தங்களைப் பயன்படுத்துகையில், அவற்றுக்கிசைந்த தசம மதிப்புகளான 0·08333, 0·02917 ஆகியவற்றைப் பொதுவாகப் பயன்படுத்துவோம். இந்தத் திருத்தங்களைச் செய்யும்போது, சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களை அளப்பதற்குப் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளைப் பயன்படுத்துவதாகப் புனைந்துகொள்ளுவோம். மூல அலகுகளில் மொமென்டுகள் இருக்கும்போது திருத்தங்கள் செய்யப்பட்டால், பின்வருமாறு அமையும். (h என்பதனை பிரிவு இடைவெளியாக எடுத்துக்கொள்ளுவோம்.)

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= \overline{m}_2 - \tfrac{1}{12}h^2 \\ m_4 &= \overline{m}_4 - \tfrac{1}{2}\overline{m}_2 h^2 + \tfrac{7}{240}h^4 \end{aligned}\right\} \qquad (6·14)$$

6-3 பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்ட ஆண்டுக்கு அழைப்புகளின் எண்ணிக்கையின்படி பாகுபாடு செய்யப்பட்ட தொலைபேசிச் சந்தாதரர்களது பரவலைக்கொண்டு மொமென்டுகள் கணிக்கும் முறைபற்றி எடுத்துக்காட்டி விளக்குவோம். இதற்கென அந்தப் பட்டியலில் (5), (6), (7), (8) ஆகிய பத்திகளின் கூடுதல்களைப் பயன்படுத்துவோம். கீழே கணிப்புகள் காட்டப்பட்டுள்ளன. வளைகோடு இருபுறமும் கூடியவரை சீராகச் சரிவதால், ஷெப்பர்டு திருத்தங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இந்தப் பரவல் தொடர்ச்சியற்றதாக இருந்தால், (1) அலகு வீச்சோடு ஒப்பிடுகையில் மிகச் சிறியதாக இருப்பதால், இதனைத் தொடர்ச்சி உடையதாகவே கருதலாம்.

$m'_1 = -\frac{956}{995} = -0.960804$

$m'_2 = \frac{9,676}{995} = 9.724623$

$m'_3 = -\frac{22,952}{995} = -23.067337$

$m'_4 = \frac{283,564}{995} = 284.988945$

$\overline{m}_1 = 0$

$\overline{m}_2 = m'_2 - m'^2_1 = 9.724623 - 0.923144 = 8.801479$

$\overline{m}_3 = m'_3 - 3m'_1 m'_2 + 2m'^3_1$

$= -23.067337 + 28.030370 - 1.773922 = 3.189111$

$\overline{m}_4 = m'_4 - 4m'_1 m'_3 + 6m'^2_1\, m'_2 - 3m'^4_1$

$= 284.988945 - 88.652760 + 53.863384 - 2.556586$

$= 247.642983$

$m_1 = 0$

$m_2 = \overline{m}_2 - 1/12 = 8.801479 - 0.083333 = 8.718146$

$m_3 = \overline{m}_3 = 3.189111$

$m_4 = \overline{m}_4 - \overline{m}_2/2 + 7/240 = 247.642983 - 4.400739 + 0.029167$

$= 243.271411$

அலைவுப் பரவலின் தன்மைகளை வரையறை செய்வதில் மொமென்டுகளைப் பயன்படுத்துதல்

m_1, m_2, m_3, m_4 ஆகிய இவ்விறுதி மதிப்புகள் மாதிரிப் பரவலின் முதல் நான்கு மைய மொமென்டுகளாகும். இம்மாதிரி பிரித்தெடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் மைய மொமென்டுகளான $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ ஆகியவற்றிற்கு இவை கிட்டிய மதிப்புகளாகும். மாதிரி மொமென்டுகளிலிருந்து, மாதிரிப் பரவலை வருணிக்கும் முக்கிய அளவைகளைப் பெறுவதோடு, இது எந்தப் பரவல் வகையினைச் சேர்ந்தது என்பதனையும் அறியலாம்.

வளைகோட்டு வகைக்குக் கட்டளை விதி (Criteria of curve type): பீட்டா என்ற எழுத்தால் 1, 2 ஆகிய ஒட்டுக்குறிகளுடன் குறிக்கப்படும் 2 அடிப்படைக் கட்டளை விதிகள், சராசரியிலிருந்து இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது மொமென்டுகளிலிருந்து பெறப்படுகின்றன. தொலைபேசிச் சந்தாதாரர் பரவலுக்கு,

$$\beta_1 = \frac{m_3^2}{m_2^3} \quad (6.15)$$
$$= \frac{10.170429}{662.632015} = 0.015349$$

$$\beta_2 = \frac{m_4}{m_2^2} \quad (6.16)$$
$$= \frac{243.271411}{76.006070} = 3.200683$$

எனக் கிடைக்கும். இவை ஒவ்வொன்றும் புலனாகாத அளவை; ஏனெனில், பகுதியிலும் தொகுதியிலுமுள்ள மொமென்டுகள் ஒரே படிக்கு உயர்த்தப்பட்டுள்ளன. (m_b^a என்பதன் படியானது $a \times b$ என்பதால் கிடைக்கும். இதில் b என்பது மொமென்டையும், a என்பது m_b என்பது எந்தப் படிக்கு உயர்த்தப்படுகிறது என்பதையும் தெரிவிக்கும்.) எனவே, β_1 என்பதில் பகுதி (numerator) மூன்றாவது மொமென்டை இருபடியாக்கியது. தொகுதி (denominator) இரண்டாவது மொமென்டை முப்படியாக்கியது. β_2 என்பதனைப் பெற்றபோது நான்காவது மொமென்டினை இரண்டாவது மொமென்டின் இருபடியால் வகுத்துள்ளோம்.

β_1 என்ற கட்டளை விதி குறிப்பாகப் பரவலின் கோட்டத்திற்கு ஒரு குறியீடு ஆகும். உண்மையில் அதன் இருபடி மூலம் கோட்டத்துக்கு ஒரு தரமான அளவையாகும். இந்த அளவு இயல்நிலைப் பரவலுக்குச் சுழிஆகவும், அதேபோல் எல்லாச் சமச்சீர்ப் பரவலுக்கும் சுழியாகவும் இருக்கும். (மூன்றாவது மொமென்டினை வர்க்கமாக்கினால் அது, β_1 என்ற பின்னத்தின் பகுதியாக இருக்கிறது; மூன்றாவது மொமென்டு சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களின் முப்படியின் கூடுதலைப் பயன்படுத்திப் பெற்றது என்பதைக் கவனிக்க.) நேர் எதிர் விலக்கங்கள் முற்றிலும் சமச்சீராக இருந்தால் இந்தக் கூடுதல் சுழி ஆகும். β_1 என்பது பரவல் சமச்சீரின்றி வலப்புறம் நீண்ட வாலுடையதாக இருந்தால், நேராக (positive) இருக்கும். (சராசரியிலிருந்து இடைநிலையைக் கழித்த குறி இது.) சமச்சீரற்ற பரவலின் நீண்ட வால் இடப்புறமிருந்தால், இது எதிராக (negative) இருக்கும்.

β_2 கட்டளை விதியின் வாய்பாடு m_4/s^4 அல்லது முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளுக்கு μ_4/σ^4 எனவும் எழுதப்படும். இயல்நிலைப் பரவலில் இந்த விகிதம் 3-க்குச் சமமாக இருக்கும். 3-க்கு அதிக மதிப்புகள் அலைவுகளின் செறிவு மையப் போக்குக்கு நெருக்கமாய் இருப்பதையும், 3-க்குக் குறைவான மதிப்புகள் மையப் போக்குச்கு அருகே குறைந்த செறிவாய் இருப்

பதையும் சுட்டிக்காட்டுகின்றன. (இந்த வகை ஒவ்வொன்றிலும், இதே தர விலக்கமுடைய இயல்நிலைப் பரவலோடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கிறோம்.) இருப்பினும், பின்னர் மீண்டும் நாம் குறிக்கப் போவதுபோல, β_2க்கு இவ்வகையில் விளக்கம் தருவது முழுவதுமே பொருத்தமுடையதன்று.

கார்ல் பியர்ஸன் (Karl Pearson) வகைபடுத்திய இலட்சிய வகையினதான (ideal) வளைகோடுகளுக்கு இந்தக் கட்டளை விதிகள் நன்கு பயனாகின்றன. இதன்மூலம் கொடுக்கப்பட்ட மாதிரிப் பரவல் இயல்நிலை வகையினதா, அன்றி வேறு எந்த வகையையாவது சேர்ந்ததா என்பதனை ஆய்வாளர் கண்டறிய முடியும். எல்டர்டன் (Elderton) (து. நூ. 35) என்பாரால் விரிவாக ஆராயப்பட்ட இம் முறைகள்பற்றி இங்கே நாம் காணப்போவதில்லை. இத்தகைய வளைகோட்டு வகைக் குடும்பங்களைப்பற்றிப் பொதுவாகப் பயன்படக்கூடிய அடிப்படைப் பட்டியல்களையும், விளக்கப் படங்களையும் பியர்ஸன் (Pearson) தயாரித்த 'டேபிள்ஸ் ஃபார் ஸ்டாடிஸ்டிஷியன்ஸ் அண்டு பையோமெட்ரீஷியன்ஸ்' (Tables for Statisticians and Biometricians) என்னும் நூலில் பார்க்கவும்.

வருணனை அளவைகளைப் பெறுதல் (Derivation of Descriptive Measures)

மாதிரி மொமென்டுகளிலிருந்து வருணனை அளவைகளைப் பெறுகின்ற முறையை இங்கே தொகுத்துக் கூறுவோம். தொலைபேசிச் சந்தாதாரர் பரவலை இங்கே எடுத்துக்காட்டாகக் கொள்வோம். (6-3, 6-4 பட்டியல்களையும், 208, 211ஆம் பக்கங்களிலுள்ள கணிப்புகளையும் பார்க்க.) இதில் பயனாகும் குறியீடுகள் முன்னரே விளக்கப்பட்டன.

மையநிலை :

$$M = M' + (m_1' \times h) \qquad (6.17)$$
$$= 525 + (-0.9608 \times 50)$$
$$= 476.96$$

மாறுபாடு: தரவிலக்கமானது இரண்டாவது மொமென்டின் வர்க்க மூலமாகும். மேற்கூறிய மொமென்டுகள் யாவும் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் இருப்பதால், ஏற்ற மாற்றங்கள் தேவைப்படுகின்றன.

$$s = \sqrt{m_2} \times h \qquad (6.18)$$
$$= \sqrt{8.71815} \times 50$$
$$= 147.65$$

கோட்டம்: கோட்டத்தின் அடிப்படை அளவு $\dfrac{M - Mo}{\sigma}$ என்பதாகும். எனினும், மாதிரியின் முகட்டு அளவையைத் திட்டவட்டமாகத் தீர்மானிக்க முடியாது. பின்வரும் வாய்பாட்டின்மூலம் χ (சை) எனும் அளவையை β_1, β_2 ஆகியவற்றிலிருந்து பியர்சன் (Pearson) பெறுகிறார்.

$$\text{கோட்டம்} = \chi = \frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2 + 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)} \qquad (6.19)$$

$\sqrt{\beta_1}$ என்பது சில சமயங்களில் கோட்டத்தின் ஓர் அளவையாகப் பயன்படுகிறதெனக் குறிப்பிட்டோம். இதனினும் விளக்கமான விரிவுக் கோவைதான் (6.19 வாய்பாடு) அதிகச் சிறப்பானது; ஏனெனில் பியர்சன் வளைகோடுகளில் இது, $\dfrac{M - Mo}{\sigma}$ என்பதற்குச் சமமான அளவையைத் தருகிறது. டெலிஃபோன் பரவலில் β_1, β_2, σ ஆகியவற்றிற்குப் பதிலிட்டால்,

$$\chi = -0.05558$$

எனக் கிடைக்கும். (கோட்டத்தின் குறி சராசரியினின்று இடைநிலையைக் கழித்த குறியைத் தரும். சராசரி 476.96, இடைநிலை 482.39, எனவே கோட்டம் எதிர்.)

மேலே தரப்பட்ட கோட்ட அளவை, பியர்சன் குடும்பத்தைச் சேர்ந்த அலைவு வளைகோடுகளுக்குப் பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படும். இதற்கு மாற்றாக காமா என்ற கிரேக்க எழுத்தால் 1 என்ற ஒட்டுக் குறியோடு குறிக்கப்படுகிற வேறோர் அளவையும் உண்டு. இது $\gamma_1 = m_3/s^3$ என வரும். முழுமைத் தொகுதி மதிப்புகளில் $\gamma_1 = \mu_3/\sigma^3$.

முகட்டு விலக்கம் (Modal divergence): சராசரிக்கும் முகட்டுக்குமுள்ள தூரத்தை

$$\begin{aligned} d &= \chi \times \sigma \\ &= -0.05558 \times 147.65 \qquad (6.20) \\ &= -8.21 \end{aligned}$$

என்பதால் தீர்மானிக்கலாம்.

முகட்டினை இடங்காணல் (Location of the mode): மாதிரி விவரங்களிலிருந்து முகட்டினைத் திட்டவட்டமாகக் கூறுதல் இயலாது என்பதை முன்னர்க் குறித்தோம். சராசரியும் முகட்டு விலக்கமும் தெரிந்தால், முகட்டுக்கு ஒரு மதிப்பினைப் பெறுதல் இயலும். (இவ்விதமாக நாம் பெறுகின்றதாவது, மாதிரிப் பரவலுக்குப் பொருந்தக்கூடிய பியர்ஸன் குடும்பத்தைச்

சேர்ந்த இலட்சிய அலைவு வளைகோட்டின் உச்சக் குத்தாயத்தின் x மதிப்பாகும் என்பதனைக் கவனிக்க.) அவ்விதமாக மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட முகட்டுச் சராசரியிலிருந்து முகட்டு விலக்கத்தைக் கழித்ததாகும்.

$$\begin{aligned} Mo &= M - d \qquad (6.21) \\ &= 476{\cdot}96 - (-8.21) \\ &= 485.17 \end{aligned}$$

இது நான்காவது அதிகாரத்தில் விவாதிக்கப்பட்ட முறைகள் எல்லாவற்றையும்விட முகட்டு மதிப்புக்குத் திருத்தமான கிட்டிய மதிப்பைத் தருகிறது.

சிகரத் தன்மை அல்லது 'அதிகப்படி' (Peakedness or 'excess'): $\beta_2 - 3$ என்ற அளவையானது சிகரத் தன்மை, கர்ட்டாஸிஸ் (kurtosis), அதிகப்படி அல்லது குவிப்பு ஆகிய பல பெயர்களில் அழைக்கப்படும் அலைவுப் பரவலின் இயற்பண்பினை அளக்கும் ஒரு மரபு அளவையாகும். இயல்நிலை வளைகோட்டில் இதன் மதிப்பு சுழி ஆகும். பொதுவாக இதன் நேர்மதிப்புகள், மையநிலைக்கு அருகே அலைவுகள் ஒப்பீட்டு அடிப்படையில் மிக அதிகமாகச் செறிவதைக் குறிப்பிடும். இங்கே மிக அதிகமென்று கூறியது, அதே தரவிலக்கத்தோடு கூடிய இயல்நிலைப் பரவலில் அலைவுகளின் பரவலை ஒப்பு நோக்கியே. பொதுவாக எதிர்மதிப்புகள் கிடைத்தால், அதே தரவிலக்கமுடைய இயல்நிலைப் பரவலை ஒப்புநோக்க மையநிலைகளுக்கு அருகே குறிப்புகள் குறைவாக இருப்பதைக் குறிப்பிடும் சிகரத்தன்மை அளவையாவது, காமா என்ற கிரேக்க எழுத்தால் 2 என்ற ஒட்டுக்குறியுடன் குறிப்பிடப்படும். நாம் எடுத்துக்கொண்டுள்ள எடுத்துக்காட்டில்

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \beta_2 - 3 \qquad (6.22) \\ &= 3.201 - 3 \\ &= +\ 0.201 \end{aligned}$$

இயல்நிலைப் பரவலைவிட இந்தப் பரவல் சற்றுக் கூரிய சிகரமுடையதாக இருப்பதை இது குறிக்கிறது என்றாலும், இந்த உறவுகள் மாற்றமடையாது இருப்பன அல்ல. இம் மாற்றங்களின் சில அமைப்புகளில் $\beta_2 - 3$ எதிராக இருக்குமாறு சிகரத்தைக் காட்டலாம்; எதிர்மறையும் உண்மை. எனவே, $\beta_2 - 3$ என்பதனைச் சிகரத்திற்கு ஓர் உறுதியான குறியீடாகவோ, அதேபோலத் தலைகீழாகவோ முடிவுகட்டி விடலாகாது.

அலைவுப் பரவலின் முக்கியமான பண்புகளை நேரடியாக வரையறை செய்வதற்கான செயல்முறைகளுக்கு மொமென்டுகளைப் பயன்படுத்துவது எப்படி என இப் பகுதியில் கண்டோம். அலைவுப் பட்டியலில் முதல் 4 மைய மொமென்டுகளிலிருந்து, மைய நிலை அலைவுகளாகச் சராசரியையும் முகட்டையும், சிதறல் அளவையாகத் தரவிலக்கத்தையும், கோட்ட அளவையாக χ ஐ யும் (இந்த அளவையை விளக்குவதில் எச்சரிக்கை வேண்டும்) நேரிடையாகக் கணிக்கும் முறைகள் கூறப்பட்டன. இவற்றி லும் பிற செயல்களிலும் மொமென்டுகள் பயனுவதால், புள்ளி விவர ஆய்வுகளில் மொமென்டுகளை மிகுந்த பயனுள்ள கருவி களாகக் கருதுகிறோம்.

துணை நூல்கள்

Anderson, R. L. and Bancroft, T. A., 'Statistical Theory in Research,' Chaps. 2, 3.

Clark, C. E., 'An Introduction to Statistics,' Chaps. 2, 3, 4.

Cramer, H., 'The Elements of Probability Theory and Some of its Applications,' Part I.

Cramer, H., 'Mathematical Methods of Statistics,' Chaps. 13, 15, 17.

David, F. N., 'Probability Theory for Statistical Methods,' Chaps. 1-5.

Dixon, W. J. and Massey, F. J. Jr., 'Introduction to Statistical Analysis' Chaps. 4, 5.

Elderton, W. P., 'Frequency Curves and Correlation,' 4th ed., Chap. 3.

Feller, W., 'An Introduction to Probability Theory and its Applications,' Vol. I, Chaps. 1-7.

Goulden, C. H., 'Methods of Statistical Analysis,' 2nd ed., Chap. 3

Hoel, P. G., 'Introduction to Mathematical Statistics,' 2nd ed., Chaps. 2, 5.

Kelley, T. L., 'Fundamentals of Statistics,' Chap. 8.

Kendall, M. G., 'The Advanced Theory of Statistics,' 3rd ed., Vol. I, pp. 116-120, 128-133, 164-183.

Marschak, J., 'Probability in the Social Sciences,' Chap. 4 of Lazarsfeld, P. F., ed., 'Mathematical Thinking in the Social Sciences.'

Mather, K., 'Statistical Analysis in Biology,' 2nd ed., Chaps. 2, 3.

Mood, A. M., 'Introduction to the Theory of Statistics,' Chap. 2.

Neyman, J., 'First Course in Probability and Statistics,' Chap. 2.

Rosander, A. C., 'Elementary Principles of Statistics,' Chaps. 5, 7, 13, 25, 26.

Tintner, G., 'Mathematics and Statistics for Economists,' Chaps. 20, 23.

Tippett, L. H. C., 'The Methods of Statistics,' 4th ed., pp. 48-78.

Treloar, A. E., 'Elements of Statistical Reasoning,' Chaps. 5, 6.

Walker, H. M. and Lev, J., 'Statistical Inference,' Chap. 2.

Waugh, A. E., 'Elements of Statistical Method' 3rd ed., pp. 155-211.

Wilks, S. S., 'Elementary Statistical Analysis,' Chaps. 4,5,6,8.

Yule, G. U. and Kendall, M. G., 'An Introduction to the Theory of Statistics,' 14th ed., Chaps. 7, 8.

இந்த அத்தியாய முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணை நூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரும், பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டும் நூலின் இரண்டாம் பாக இறுதியிலுள்ள துணை நூல் பட்டியலில் காணலாம்.

7. புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு : மதிப்பீட்டுப் பிரச்சினைகள்

ஒரு மாதிரியைப்பற்றித் தெரிந்த விவரங்களைக்கொண்டு அம் மாதிரி பிறந்த முழுமைத் தொகுதியைக் குறித்துப் பொதுமையான முடிவுகளைச் செய்யும்போது எழுகின்ற சிக்கல்களைப்பற்றிப் பல நிலைகளில் முன்னர் ஆராய்ந்தோம். குறிப்பாக, முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளை வரையறை செய்கின்ற முழுமைத் தொகுதி அளவைகளின் (parameters) தெரியாத மதிப்புகளைப் பொதுமைப்படுத்துவதன் மூலம் மதிப்பீடு காண்பதில் அக்கறை காட்டினோம். முழுமைத் தொகுதியின் அளவையை (சராசரி, முகடு, தரவிலக்கம்) மதிப்பீடு செய்யும்போது, தேவைப்படுகின்ற முழுமைத் தொகுதியின் அளவினைப்பற்றிச் சிறந்த ஊகத்தினை ஒரு தனி எண்ணால் காண்பதே நமது குறிக்கோள். அப்படி அல்லாது நமது மதிப்பீடானது உண்மையான முழுமைத் தொகுதியின் அளவையின் மதிப்பு எந்த எல்லைகளுக்குட்பட்டு அமைகிறது என்பதனைக் கொடுக்கப்பட்ட அளவு நம்பகத்தோடு கூறுவதாகவும் அமையலாம். ஒரு தனித்த எண்ணாக அமையும் மதிப்பீட்டைப் புள்ளி மதிப்பீடு (point estimate) என்று அழைப்போம். தனி மதிப்புக்குப் பதிலாக எல்லைகட்டி அமைந்த கூற்றை இடைவெளி மதிப்பீடு (interval estimate) என்று அழைப்போம். இந்த அத்தியாயத்தில் புள்ளி மதிப்பீட்டின் கட்டளை விதிகள் சிலவற்றையும், செயல்முறைகளையும் கண்டு, பின்னர் இடைவெளி மதிப்பீடுபற்றி விரிவான விளக்கத்தையும் அவற்றிற்கு அமைந்த நிகழ்திறங்களைப்பற்றியும் காண்போம். முதலில் இயைபிலாமை (randomness) பற்றி அடிப்படைக் கருத்தினைச் சுருக்கமாகத் தருவோம். ஏனெனில், எந்த மாதிரிகளுக்கு நிகழ்திறக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தப்போகிறோமோ, அவை இயைபிலா மாதிரிகளாக இருக்கவேண்டும்.

இயைபிலா மாறிகளும் இயைபிலா மாதிரிகளும்

ஓர் அளவு, பல்வேறுபட்ட மதிப்புகளைப் பெறுமானால், அதை மாறி என்கிறோம். இதோடு 'இயைபிலா' (random) என்ற சொல்லைச் சேர்க்கும்போது, இந்தத் தன்மை விரிவடைகிறது. இயைபிலா மாறி (random variable) பல மதிப்புகளில் ஏதாவதைப் பெறலாம்; தனிப்பட்ட மதிப்புகள் ஒழுங்கின்றி அமைந்திருந்தாலும் பல தனிப்பட்ட மதிப்புகளை ஒன்றுசேர்க்கும்பொழுது, அவற்றில் ஓர் ஒழுங்கு தோன்றும். பல்வேறு இயைபிலா மாறிகளுக்கு வெவ்வேறு வகையான ஒழுங்கு அமைதிகள் காணப்படும். ஆனால், அத்தகைய ஏதாவது ஒரு மாறியை எடுத்துக்கொண்டால், அவை தொகுதியாக ஒழுங்கு பெற்று இருப்பதைக் காணலாம். இதனை வேறுவிதமாகக் கூறுவதானால், ஓர் இயைபிலா மாறியின் பல தனிப்பட்ட மதிப்புகளை (அலைவுப் பரவலில் காணப்படுவதுபோல) ஒழுங்குபடுத்தினால், ஒரு திட்டவட்டமான பரவல் கோவை தோற்றம் பெறுவதைக் காண முடியும். ஒரு 'முழுமைத் தொகுதியின்' உறுப்பாகிய தனிப்பட்ட மதிப்புகள் வரையறை செய்யக்கூடிய பண்புகளுடன் அமையும்.

இவ்வகையாகத் தோன்றும் ஒழுங்கு அமைதிக்கு இயைபிலாத் தன்மையே அடிப்படை என்பதை வலியுறுத்திக் கூறுகிறோம். நடைமுறையில் இந்த உண்மைக்குள்ள பெருமை மிகவும் அதிகம். ஷௌவார்ட்டு (Shewhart) கூறியதுபோல 'எண்களின் கூட்டத்தை அல்லது பொருள்களின் கூட்டத்தை ஒரு தனிப்பட்ட செயல்முறையால் இயைபிலாத் தன்மைப்படுத்துவதால், விஞ்ஞானிக்கு முடிவுகளை முன்கூட்டியே காண்பதற்குச் சக்தி வாய்ந்த யுக்தி கிடைக்கிறது.' இயைபிலா மாறிகளாலான ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் தனிப்பட்ட உறுப்பினர்களைப்பற்றி முன்கூட்டியே முடிவுகள் கூறுவது இயலாதெனினும், உறுப்பினர்களைத் திரளாகக் கருதி முழுமைத் தொகுதி முழுவதற்குமாக முடிவுகள் கூறுதல் இயலும். இயல்நிலைப் பரவலைப் பற்றிய விவாதத்தில் இயைபிலாத் தொடர் உருவாகும் சூழ்நிலைகள் சிலவற்றைக் கண்டோம். இங்கே தனிப்பட்ட நிகழ்ச்சிகளை இயக்கும் சக்திகள் சார்பிலாதனவாக இருக்கவேண்டும். ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் பல சக்திகளின் கூட்டினால் தோன்றியதாக இருக்கவேண்டும். சராசரி மதிப்புக்கு மேலும் கீழுமாக மதிப்புகள் நிரவிவருமாறு சக்திகள் சமமாக இருக்கவேண்டும். பலவகையாகக் கிடைக்கக் கூடிய இயைபிலாப் பரவல்களில் இத்தகைய பரவலும் ஒரு வகையே. இந்த நிபந்தனைகளை மேலும் அதிகப்படுத்தலாம். எனினும், இயைபிலாத் தன்மை சிதைவதில்லை. பரவல் கோவைகளால் ஏற்படும் ஒழுங்கு அமைதிகள் பலவகையின. இவற்றிலெல்லாம் தனிப்பட்ட நிகழ்ச்சிகளை முன்கூட்டியே உய்த்துணர்தல் இயலாது. எனினும்,

பெரும் எண்கள் திரளாகச் சேரும்போது உருவாகும் ஒழுங்கு அமைதியால், திரளின் தன்மைபற்றி முடிவுகளை (நிகழ்திறக் கூற்றாக) முன்கூட்டியே கூறமுடியும்.

சீராகத் திட்டமிட்டு உருவமைப்புச் செய்தால்தான் இயைபிலாத் தன்மை உருவாகி, முன்கூட்டியே முடிவுகளைச் செய்தல் இயலு மென்பதைப் பின்னர் காண்போம் (பத்தொன்பதாம் அத்தியாயம் காணவும்). இந்நிலையில் சரியான உய்த்துணர்வுக்கு இன்றியமையாத அடிப்படையாக ஓர் இயைபிலா மாதிரியை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டுமானால், சார்பிலாத நிகழ்ச்சிகளாலான ஒரு மாதிரியைக் கொள்ளவேண்டும். அதிலே நிகழ்ச்சிகள் யாவும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்தனவாக இருக்கவேண்டும். முழுமைத் தொகுதியின் ஒவ்வோர் உறுப்பினரும் மாதிரியில் தேர்ந்தெடுக்கப் படுவதற்கான நிகழ்திறத்தை முன்கூட்டியே வரையறை செய்கின்ற வகையில் மாதிரியினைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முறை இருக்கவேண்டும். (மாதிரியின் உறுப்பு என்பதன்மூலம் ஒரு தனிக் குறிப்பைக் குறிப்பிடு கிறோம்.) நடைமுறைக் களவேலையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சந்தர்ப் பத்தில் இத்தகைய சூழ்நிலை அமைவதற்காகப் பல சமயங்களில் விரிவான யுக்திகளை மேற்கொள்ளவேண்டியிருக்கிறது.

இங்கே இயைபிலா மாறிகளின் பரவல்களுக்குப் பயனாகும் ஒரு சிறப்புச் சொல்லைக் கவனிப்போம். வரையறை செய்யப்பட்ட பல பிரிவுகள் ஒவ்வொன்றிலும், இயைபிலா மாறிகளின் மதிப்புகள் அமைகின்ற சார்பு அலைவுகளை ஒரு பரவலுக்குக் குறிப்பிட்டால் அதனை நிகழ்திறப் பரவல் (probability distribution) என்கிறோம். (ஒப்பீட்டு அடிப்படை அலைவுகளை நிகழ்திறங்களாக விளக்கம் கொடுக்கலாம் என்பதனைக் கண்டோம்.) ஈருறுப்புப் பரவல், இயல் நிலைப் பரவல் ஆகியவை நிகழ்திறப் பரவல்கள். இவைபோன்ற இன்னும் பலவும் உண்டு. ஒவ்வோர் இயைபிலா மாறிக்கும் தனிப் பட்ட நிகழ்திறப் பரவல் உண்டு. அத்தகைய பரவலை நமக்கு நன்கு அறிமுகமான அலைவுக்கோவை வகையைப்போல்— அதாவது, அலைவுகள் அதிகமாகி அதிகமாகி உச்சநிலை அடைவதையும், பின்னர் சரிவதையும்போன்ற வகையில்—வரையறை செய்து காட்டலாம்; அல்லது குவிவு அலைவுகளை அல்லது நிகழ்திறங்களைக் குறித்த பரவல் கோவையினால் (distribution function) வெளியிடலாம்.

குறியீடு : முன்னர் கூறிய அமைப்பு முறையிலேயே இந்த அதிகாரத்தில் பயனாகும் குறியீடுகளும் பொதுவாக அமைந்துள்ளன. அவற்றைக் கீழே காண்போம் :

s' : பிறழ்ச்சியில்லாத மதிப்பீடு

m : மாதிரிச் சராசரிகளின் பரவல் சராசரி

σ_m : மாதிரிச் சராசரிகளின் பரவல் தரவிலக்கம் : சராசரியின் தரப்பிழை; அதாவது $\sigma_{\bar{x}}$

s_m : மாதிரிச் சராசரியின் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட தரப்பிழை. இதனை $s_{\bar{x}}$ என்றும் சொல்வோம்

θ (தீட்டா) : முழுமைத் தொகுதியின் ஓர் அளவை (பொதுக் குறியீடு)

t_e : θ என்பதன் மதிப்பீடாகக் கருதப்படும் ஒரு மாதிரி அளவை

$\hat{\theta}$: θ மதிப்பீட்டின் உச்ச நிகழ்வு

σ_s : s's மாதிரியின் பரவலில் தரவிலக்கம்; தரவிலக்கத்தின் தரப்பிழை

s_s : மாதிரி s-ன் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட தரப்பிழை

σ_{md} : இடைநிலையின் தரப்பிழை

s_{md} : மாதிரி இடைநிலையின் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட தரப்பிழை

σ_{q1} : முதல் கால்மானத்தின் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட தரப்பிழை

σ_{d1} : முதல் பதின்மானத்தின் தரப்பிழை

f_s : n நிகழ்ச்சிகளில் வெற்றியான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை

$n-f_s$: n நிகழ்ச்சிகளில் தோல்வியடைந்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை

s_p : ஒரு விகிதத்தின் அல்லது ஓர் ஒப்பீட்டு அலவின் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட தரப்பிழை

pe : ஒரு சதவீதம்

s_{pe} : சதவீதத்தின் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட தரப்பிழை

N_p : வரம்புள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் குறிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை

மாதிரிப் பரவல்கள் : முதல்நிலை விளக்கம்

கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இயைபிலா முறையினல் ஒரு மாதிரியை உருவாக்கினல், அந்த மாதிரியிலிருந்து (X_1, X_2, X_3...X_n ஆகியவைகொண்டது) முழுமைத் தொகுதியின் எந்தவொரு பண்பையும் மதிப்பீடு செய்யலாம். மாதிரியின் சராசரி, முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கு ஒரு மதிப்பீடு ஆகும். மாதிரியின்

தரவிலக்கத்தைத் திருத்த, முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கத்திற்குப் பிழையில்லாத மதிப்பீடாக அமைக்கலாம்; மாதிரியின் கோட்ட அளவை முழுமைத் தொகுதியின் கோட்ட அளவைக்கு ஒரு மதிப்பீட்டைக் கொடுக்கிறது. கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதி ஒன்றிலிருந்து ஒரே அளவை (size) யுடைய இயைபிலா மாதிரிகள் பல வற்றை எடுத்தால், இம் மாதிரிகளின் சராசரிகள் ($\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{X}_3$ முதலியன) முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்குப் பல மதிப்பீடுகளைத் தொடராகத் தருகின்றன. இம் மாறுபடும் மதிப்பீடுகள் ஓர் இயைபிலா மாறியாக அமைகின்றன. ஒவ்வொரு மாதிரி சராசரியையும் இப் புதிய இயைபிலா மாறியின் கண்டறிந்த மதிப்பாகக் கருதலாம். (இங்கே ஒவ்வொரு கண்டறிந்த குறிப்பும் முன் கொடுக்கப்பட்ட X-களின் முழுமைத் தொகுதி உறுப்பு அன்று, ஆனல் $\bar{X}$ ஆலான புதிய முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்பு.) இந்தச் சராசரிகளை ஓர் அலைவுப் பரவலாக அமைக்கலாம். இதுபோலவே அடுத்தடுத்த பல மாதிரிகளிலிருந்து பெறப்பட்ட தரவிலக்கங்களின் தொடரை அலைவுப் பரவலாக அமைக்கலாம். அடுத்தடுத்த மாதிரிகளின் சராசரிகளைக்கொண்டோ, அடுத்தடுத்த மாதிரிகளின் தரவிலக்கங்களைக் கொண்டோ அமைக்கப்படும் இத்தகைய பரவல்கள் முன் அத்தியாயங்களில் விவாதிக்கப்பட்ட பரவல்களின் சிறப்புத் தன்மைகளைப் பெற்றிருக்கும். ஒவ்வொரு பரவலிலும் மதிப்புகள் ஒரு மைய மதிப்பினை நெருங்கிச் செறிவாக அமையும். இந்த மைய மதிப்பின் இரு புறத்திலும் அலைவுகள் சமச்சீராகவோ அவ்வாறின்றியோ சரியும். குறிப்புகள் குறைவாக இருக்கையிலுள்ள குறைபாடுகள் குறிப்புகளின் எண்ணிக்கையை அதிகப்படுத்தும்போது நீங்கும். மொத்த அலைவுகள் அதிகரிக்கும்போது ஒரு தொடர்ச்சியான அலைவு வளைகோடு உருவாகும். இத்தகைய இழைந்த அலைவு வளைகோடு மாதிரிப் பரவல் (Sampling Distribution) என்று அழைக்கப்படும் வரைவடிவமாகத் தோற்றமெடுக்கும்.

இத்தகைய மாதிரிப் பரவல்களின் பண்புகள் புள்ளியியல் கொள்கைகளிலும் நடைமுறை வேலைகளிலும் மிகுந்த முக்கியமுடையன. தரவிலக்கங்கள், உடன் தொடர்புக் கெழுக்கள், மற்றப் புள்ளியியல் அளவைகள் ஆகியவற்றின் மாதிரிப் பரவல்களிலிருந்து நாம் பெறுகின்ற அறிவே புள்ளியியல் முடிவுகளை உய்த்துணர உதவுகின்றது. நிகழ்திறப் பரவல்களான அத்தகைய பரவல்களின் அறிவே புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுகளாகப் பெறுகின்ற முடிவுகளுக்கு நிகழ்திற வரையறை செய்வதற்கு உதவுகின்றன. இதை எங்ஙனம் செய்கிறோம் என்பதை அறிய முக்கியமான புள்ளியியல் அளவுகள் சிலவற்றின் மாதிரிப் பரவல்களைப்பற்றிச் சில செய்திகளைத் தெரிந்துகொள்ளவேண்டும். பின்னர் வரும் விவாதங்களுக்கு ஓர் அடி

படையாகக் கூட்டுச் சராசரியின் மாதிரிப் பரவலின் தன்மைகளை முதலில் சுருங்கக் காண்போம்.

N என்ற அளவுடைய பல இயைபிலா மாதிரிகளை ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ஒரே முறையில் தேர்ந்தெடுத்தால் அவற்றின் சராசரிகள் ஓர் இயைபிலா மாறியாக அமையும் என்பதை முன்னரே கண்டோம். இந்த இயைபிலா மாறியின் கண்டறிந்த குறிப்புகள் பலவற்றையும் அதாவது பல சராசரி மதிப்புகளையும் ஓர் அலைவுப் பரவலாக உருவாக்கலாம். மாதிரிகளைப் பிரித்தெடுக்கின்ற முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலை வகையினதாக இருந்தாலும் இல்லாவிட்டாலும், பரவல்—இதுவே இப் புள்ளிவிவரக் கொள்கையிலும் நடைமுறையிலும் மைய முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது—இயல்நிலை வகையினதாகவோ இயல்நிலை வகைக்கு நெருங்கியதாகவோ இருக்க வேண்டும். முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலையாக இருந்தால் மாதிரிச் சராசரிகளின் பரவல் இயல்நிலையாக இருக்கும்; அவ்வாறு முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலையாக இல்லாதபோது மாதிரிச் சராசரிகளின் பரவல் இயல்நிலை வகைக்கு அணுகியதாக இருக்கும். அதாவது N மதிப்பு அதிகமாக அதிகமாக இயல்நிலை வகைக்கு அணுகிக் கொண்டே வரும்.[1] அதோடு சராசரிகளின் பரவல்களின் சராசரியும் தரவிலக்கமும் முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளோடு வரையறை செய்யப்பட்ட ஓர் உறவைக் கொண்டிருக்கும். m_m என்று நாம் குறியீடு செய்யும் இந்த மாதிரிப் பரவலின் சராசரி, முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியான μ-க்குச் சமமாக இருக்கும். இன்னும் சரியாகச் சொல்வதானால் மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக அதிகமாகச் சராசரி பரவலின் சராசரி μ என்பதை அணுகும். அல்லது μ என்பதற்கு நிகழ்திறப்படி நெருக்கமடையும்[2] (converge). மாதிரிப்

[1] பரவல்கள் எவ்வகையினதாக இருந்தாலும் சரி, அவை வரம்பிலாமலும், வரம்புடைய தரவிலக்கத்தை யுடையதாகவுமிருந்தால், அவற்றிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்படும் மாதிரிகளில் சராசரிகளின் பரவல்கள் இயல்நிலையை அணுகும் என்பது நிறுவப்பட்டுள்ளது. பொதுவான சூழ்நிலைகளில் அமைந்த வரம்புடைய பரவல்களுக்கும் இது பொருந்தும். தோராயமாக இயல்நிலை அணுக்கத்தின் பொருத்தமுடைமைபற்றிய விவாதத்துக்கு காக்ரன் (Cochran) (து. நா. ப. 17, பக்கங்கள் 22-28) எழுதிய நூலையும் அதில் கூறப்படும் துணை நூல்களையும் காண்க.

டபிள்யு. ஏ. ஷெவார்ட், பல்வகை முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்த மாதிரிகளின் சராசரிகளிலிருந்து இயல்நிலைப் பரவல் தோற்றம் பெறுவதுகுறித்து ஒரு சிறப்பான எடுத்துக்காட்டைக் கூறியுள்ளார். இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதி, நீண்ட சதுர முழுமைத்தொகுதி (அதாவது இதன் அலைவுப் பரவல் நீண்ட சதுர வடிவிலிருக்கும்), செங்கோண முக்கோண முழுமைத் தொகுதி (அதாவது இதன் அலைவுப் பரவல் செங்கோண முக்கோண வடிவில் இருக்கும்) ஆகியவற்றிலிருந்து பிறந்த பல மாதிரிகளை — ஒவ்வொரு மாதிரியிலும் 4 குறிப்புகள் இருக்குமாறு— ஷெவார்ட் ஆராய்ந்தார். இம் மூன்று வகைகளில் ஒவ்வொன்றுக்குமே மாதிரிச் சராசரிகளின் பரவல் ஏற்றுக்கொள்ளுமளவுக்கு இயல்நிலையாக அமையக் கண்டார். (ஷெவார்ட் பார்க்கவும். து.நா.ப. 140,179-84.)

[2] நிகழ்திறத்திற்கு நெருக்கமடைவதுபற்றிய கணித விளக்கத்துக்குக் கிரேமர் (Cramer) எழுதிய நூல் காண்க. (து.நா.ப. 23, பக்கம் 252.)

பகிர்வின் தரவிலக்கம் இதனை s_m என்று குறிப்போம். அல்லது தோராயமாக σ_m என்று குறிப்போம். அதாவது முழுமைத் தொகுதியின் σ மதிப்பை ஒவ்வொரு மாதிரியிலும் அடங்கிய குறிப்புகளின் எண்ணிக்கையின் வர்க்க மூலத்தினல் வகுத்ததற்குச் சமமாக இருக்கும். அதாவது $\sigma_m = \sigma / \sqrt{N}$; சராசரியும் தரவிலக்கமும் இயல்நிலைப் பரவலை முற்றிலும் வரையறை செய்துவிடும். சராசரியும் தரவிலக்கமும் தெரிந்த ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட மாதிரிகளின் சராசரிகளின் மாதிரிப் பரவல் இங்ஙனம் முற்றிலும் தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதி ஒன்றிலிருந்து அடுத்தடுத்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளிலிருந்து பெற்ற சராசரிகள், தரவிலக்கங்கள், மற்ற அளவுகள் ஆகியவற்றின் தொடர்களில் காணப்படும் சிதறலின் அளவையை அறிவதே நமது முக்கியக் குறிக்கோளாதலால் இங்ஙனம் கிடைக்கும் மாதிரிப் பரவல்களில் வருணனை அளவுகளில் மாறுபாட்டின் அளவைத் தருகின்ற அளவைகளை அறிய முற்படுகிருேம். சற்றுமுன்னர் குறிக்கப்பட்டபடி மாதிரிப் பரவலின் சராசரி, $\sigma_m = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$ என்று நாம் அறிந்ததை நடைமுறையில் பயன்படுத்த முனையும்போது குறையொன்று ஏற்படுகிறது. பொதுவாக, முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கமான σ நமக்கு முன்கூட்டியே தெரிந்திருப்பதில்லை. ஆனல், பெரிய மாதிரிகளைப் பயன்படுத்தும்போது σ–வுக்கு நல்லதொரு மதிப்பீடாக மாதிரியின் தரவிலக்கமான s-ஐ ஏற்றுக் கொள்ளலாம். ஏனெனில், அத்தகைய மாதிரிகளில் s ஆனது σஐ அணுகுகிறது. (அதாவது, நிகழ்திறப்படி σ-வுக்கு நெருக்கமடைகிறது.) (சிறிய மாதிரிகளில் s-க்குப் பதிலாக σவின் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடான s'-ஐப் பயன்படுத்துவது நன்று. பக்கம் 150 பார்க்கவும்.) σ என்பதற்குத் தோராயமாக, s-ஐ அல்லது s'-ஐ உபயோகிக்கும்போது மாதிரிச் சராசரிகளின் பரவலின் தரவிலக்கத்திற்கு σ_m என்பதற்குப் பதிலாக s_m என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிருேம். [இந்த அளவான σ_m அல்லது s_m, சராசரியின் தரப்பிழை (standard error of the mean) எனப்படும்.] s_m என்ற மதிப்புத் தெரிந்து அது இயல்நிலையாகவோ, இயல்நிலை போன்றதாகவோவுள்ள பரவல் ஒன்றின் மாதிரிச் சராசரிகளின் சிதறலை அளக்கிறது என்பதையும் அறிந்தால், மாதிரியின் நம்பகத்துக்கு ஓரளவையாக அதற்கு நம்பிக்கையோடு விளக்கம் தர முடியும். அத்தகைய அளவைகள் மதிப்பீடு செய்வதில் எங்ஙனம் பயன்படுத்தப்படுகின்றன என்பதை விரைவில் காண்போம்.

மாதிரிப் பரவல் ஒவ்வொன்றையும் மதிப்பீடுகளின் முழுமைத் தொகுதிகளாகக் கருதலாம். முழுமைத் தொகுதியின் அளவுகளை

மதிப்பீடு செய்வதற்கும் அல்லது அந்த அளவைகள் எந்த எல்லைகளுக்குட்பட்டு அமைகின்றன என்று வரையறை செய்வதற்கும் அத்தகைய பரவல்கள் அடிப்படையில் பயனாவதால், நாம் இவற்றில் அக்கறை காட்டுகிறோம். மதிப்பீடு காணும் செயல்முறைதான் நமது முக்கிய குறிக்கோள்.

புள்ளி மதிப்பீடு

கட்டளை விதி (Criteria)

தனிப்பட்ட மாதிரிப் பரவல்களின் பண்புகளைப்பற்றித் தொடர்ந்து ஆராய்வதற்கு முன்னால் மதிப்பீடுகளைக் கணிப்பதற்குக் கையாளவேண்டிய சில பொதுவான கட்டளை விதிகளைப்பற்றிக் கண்டு, பின் மதிப்பீடு செய்வதற்காக என்ன முறைகளைக் கையாளலாம் என்பதனையும் காண்போம். ஏனெனில், நல்ல மதிப்பீடுகளைத் தரக்கூடிய முறைகளையே நாம் கையாள விரும்புகிறோம். நல்ல மதிப்பீடுகளைத் தரும் முறைகளையும் நல்ல மதிப்பீடுகளைத் தராத முறைகளையும் பிரித்துக் காண்பது எப்படி ?

மதிப்பீடுகளைச் சரிபார்ப்பதற்கும், மதிப்பீடு செய்யும் முறைகளை உருவாக்குவதற்கும் புள்ளி விவர நூலார் நான்கு முக்கியமான கட்டளை விதிகளை வகுத்துள்ளனர். பிறழ்ச்சியுள்ள முறைகளிலிருந்து பிறழ்ச்சியில்லாத (unbiassed) முறைகளையும், உறுதியற்ற முறைகளிலிருந்து உறுதியான (consistent) முறைகளையும், திறமில்லாத முறைகளிலிருந்து திறமுடைய (efficient) முறைகளையும், போதுமானதல்லாத முறைகளிலிருந்து போதுமானதான (sufficient) முறைகளையும் பிரித்து வரையறை செய்கின்றனர். இந்த வேறுபட்ட கட்டளை விதிகளுக்கு அடிப்படையாய் அமைந்த கணித விளக்கத்தை இங்கே தருவது நமக்கு நோக்கமன்று. இக் கட்டளை விதிகள் எத்தகையன என்பதுபற்றிச் சில சுருக்கமான கூற்றுகளையும், புள்ளி விவர ரீதியில் விவாத முறைப்படி இக் கொள்கைகளை எங்ஙனம் உருவாக்கினர் என்பதுபற்றிய சுருக்கமான குறிப்பையும் இங்கே தருவது போதுமானது.[3]

t_e என்று தரப்பட்ட மாதிரி அளவையின் கணித எதிர்பார்ப்பு அதற்கிசைந்த முழுமைத் தொகுதியின் அளவையான θ ஆனால், t_e என்பது θ-வின் பிறழ்ச்சியற்ற (unbiassed) ஒரு மதிப்பீடு ஆகும்.

[3] *1920-30-ல் மதிப்பீடு செய்வதற்கு வரையறையான முறைகளின் வளர்ச்சிக்கு அடிப்படை அமைத்தவர் ஆர். ஏ. பிஷர். அவரது இரண்டு ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகள் புதிய பாதையை வகுத்தன. (பார்க்க : பிஷர் து. நா. ப. 47, கட்டுரைகள் 10, 11.) புள்ளி மதிப்பீடுகளான கட்டளை விதிகளும் புள்ளி மதிப்பீடுகளிலிருந்து உச்சநிகழ் வாய்ப்பினைக் காணும் முறையும் பிஷரின் ஆராய்ச்சிகளின் விளைவுகளே.*

மாதிரிகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரிக்க இந்த மாதிரிகளிலிருந்து பெறுகின்ற t_e மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி θ-வுக்கு அணுகும் போது (அதாவது நிகழ்திறப்படி நெருக்கமடையும்போது) θ என்பதைக் கணித எதிர்பார்ப்பு என்று கூறுகிறோம். (N என்ற நிலைத்த எண்ணிக்கையுடைய மாதிரிகளிலிருந்தே எல்லா t_e மதிப்புகளும் பெறப்பட்டன என்று கொள்கிறோம்.) மாதிரிகளிலிருந்து கிடைக்கும் $\bar{X}$ என்ற சராசரி அதோடு ஒத்த முழுமைத் தொகுதியின் அளவையான μ என்பதற்குப் பிறழ்ச்சியில்லாத மதிப்பீடாகும். ஆனால், $s^2 = \Sigma(X - \bar{X})^2/N$ என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து கணிக்கப்பட்ட s^2 என்ற மாதிரி மாறுபாடு முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடான σ^2க்குப் பிறழ்ச்சியில்லாத மதிப்பீடு அன்று; ஏனெனில் s^2 என்பதின் மாதிரிப் பரவலின் சராசரி σ^2-க்குக் குறைவாக இருக்கும். (ஐந்தாவது அத்தியாயத்தில் முழுமைத் தொகுதியின் σ-வுக்கு மாதிரியிலிருந்து மதிப்பீட்டைக் கணிக்கும் முறையை ஆராய்ந்தபோது இந்த உண்மை குறிக்கப்பட்டது.) σ^2 என்பதற்குப் பிறழ்ச்சியில்லாத மதிப்பீட்டைப் பெறவேண்டுமானால் $\Sigma(X - \bar{X})^2$ என்பதை N-க்குப் பதிலாக $N - 1$ ஆல் வகுக்கவேண்டும்.

மாதிரி எண்ணிக்கையான N என்பது வரம்பின்றி அதிகரிக்கும்போது t_e-ன் மதிப்புகள் நிகழ்திறப்படி θவுக்கு நெருக்கமடைந்தால், மாதிரி அளவையான t_e என்பதை முழுமைத் தொகுதியின் அளவையாக θவுக்கு உறுதியான மதிப்பீடு (consistent estimate) என்கிறோம். இக் கட்டளை விதி முன்கூறிய கட்டளை விதியிலிருந்து மாறுபட்டது. அதாவது N என்பது முன்னதில் நிலைத்ததாக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது. தற்போது N என்பது வரம்பின்றி அதிகரிப்பதாக எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது.

$\bar{X}$ என்ற மாதிரிச் சராசரி முழுமைத்தொகுதியின் சராசரியான μ விற்குப் பிறழ்ச்சியில்லாத நிலைத்தமதிப்பீடாகும். $s^2 = \Sigma(X - \bar{X})^2/N$ என்பதினின்று கணிக்கப்பட்ட மாதிரி அளவான s^2, முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடான σ^2-க்கு நிலைத்த மதிப்பீடு: ஆனால் பிறழ்ச்சியடையாத மதிப்பீடு அன்று; ஏனெனில், N-ன் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்க s^2-க்கும் σ^2-க்குமுள்ள வேறுபாடு குறைகிறது. s^2, σ^2-ஐ அணுகுகிறது. நிலைத்த எண்ணிக்கையுடைய மாதிரிகளிலிருந்து கிடைத்த பரவலான s^2-மதிப்புகளின் சராசரி, σ^2-க்குச் சமமாக இருக்காது. அதிலிருந்து குறைவுபடும் என்ற உண்மைக்கு இது புறம்பானது.

மதிப்பீடுகளின் திறனைப்பற்றி ஆராய்வதற்கு மாதிரிப் பரவல்களின் கோட்பாடுகுறித்து மீண்டும் காண்போம். அளவைகள் தெரியாத ஒரு முழுமைத் தொகுதியினின்று பெற்ற பல மாதிரிகளின்

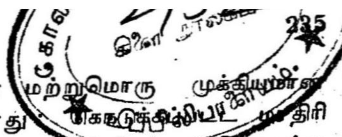
சராசரிகள், தரவிலக்கங்கள், கோட்ட அளவைகள் ஆகியவை அலைவுப் பரவல்களாக அமைகின்றன. வரம்பில் இவை ஒவ்வொன்றும் மதிப்பீடுகளின் ஒரு முழுமைத் தொகுதியாகின்றன. சிதறல் மிகுந்து காணப்படும் மாதிரி அளவைகளின் பரவலைவிட எந்த முழுமைத் தொகுதியின் அளவையை மதிப்பிட முனைகிறேமோ அதனைச் சார்ந்து மாதிரி அளவைகள் செறிந்துள்ள சிறந்த மதிப்பீடுகளைப் பெறமுடியும். ஒரு மதிப்பீடு (அது பிறழ்ச்சியில்லாததாக இருக்குமானல்) நம்பகமானதா இல்லையா என்பது மாதிரிப் பரவலில் காணப்படும் செறிவினைப் பொறுத்தது. இச் செறிவு மாதிரிப் பரவலின் மாறுபாடான σ^2-ஆல் அளக்கப்படுகிறது; இதனை மாதிரி மாறுபாடு (sampling variance) என்போம். இதன்மூலம் திறமையை அளக்க முடியும். இரண்டு மதிப்பீடுகள் இருந்தால் அவற்றில் குறைந்த மாறுபாடு உள்ளதே மிகுந்த திறமுடையது. மிகக்குறைந்த மாறுபாடுள்ள மதிப்பீடே மிகச் சிறந்த திறமுடைய மதிப்பீடாகும்.

சில குறிப்பிட்ட மாதிரிப் பரவல்களின் பண்புகளை ஆராயும்போது அவற்றின் மாறுபாடுகள், தரவிலக்கங்கள் ஆகியவைகுறித்துப் பெரிதும் அக்கறை காட்டுவோம். இவை திறனுக்கும் நம்பகத்துக்கும் அளவுகோலாக அமைவதால் புள்ளிவிவர உய்த்துணர்வில் மிகுந்த முக்கியமுடையன.

மதிப்பீடு காணும் முறைகளை உருவாக்குவதில் போதிய அளவின் (sufficient) தரத்தை இறுதிக் கட்டளை விதியாகக் கையாளுகிறேம். மாறியினின்று பெறப்பட்ட அளவு சம்பந்தப்பட்ட முழுமைத் தொகுதிபற்றி மாதிரி தரக்கூடிய எல்லாச் செய்திகளையும் தெரிவிப்பதாஞல் அதனைப் போதுமான மதிப்பீடாகக் கருதுகிறேம். இது மதிப்பீட்டின் மிகவும் விரும்பத்தக்க பண்புகளில் ஒன்று; எனினும், இது சில விதிகளுக்குப் புறம்பானது. $\bar{X}$ என்ற மாதிரி அளவு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியொன்றின் சராசரிக்கு மதிப்பீடாகப் போதுமானது, திறனுடையது. $s^2 = \Sigma(X-\mu)^2/N$ என்பதினின்று மாதிரிக்குக் கணிக்கப்பட்ட மாறுபாடான s^2-ம் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியான μ-வும் போதுமானது, திறனுடையது. ஆனல், மாதிரியில் கூறப்படும் எல்லா விவரங்களையும் ஒரு சில மாதிரி அளவுகளே உள்ளடக்குகின்றன.

மதிப்பீடு முறைகள்

குறிப்பிடப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் தெரியாத அளவைகளுக்கு ஏற்ற மதிப்பீடுகளாகச் சில தனி எண்களைக் காண்பதுதான் புள்ளி மதிப்பீட்டின் குறிக்கோள் என்று முன்னரே குறிப்பிட்டோம். நல்ல மதிப்பீடுகளின் சில பண்புகளைப்பற்றியும் நல்ல மதிப்பீடு அல்லாதவற்றின் சில தன்மைகளைப்பற்றியும் சற்று முன் கண்டோம்.



கட்டளை விதிகளைத் தீர்மானித்தபின் மற்றுமொரு முக்கியமான கேள்விக்கு விடை காணவேண்டியுள்ளது. கொடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் அளவுகளைக் கணிப்பதற்கு எந்த மதிப்பீட்டு முறைகளைக் கையாளலாம்? எந்த முறைகளைக் கையாண்டால் நாம் மதிப்பீடு செய்த எண் கட்டளை விதிகள் சிலவற்றிற்கோ எல்லாவற்றிற்குமோ கட்டுப்பட்டு முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியாகவோ தரவிலக்கமாகவோ அல்லது வேறு அளவையாகவோ நன்கு அமையும்? மதிப்பீடு செய்வதில் மூன்று முறைகளை இங்குக் காண்போம்.

குறைந்த வர்க்கமுறை (method of least squares) என்பதின் பெயரே அதன் தன்மையைத் தெரியப்படுத்துகின்றது. இம்முறையை மதிப்பீடு செய்வதற்கு—எடுத்துக்காட்டாக, முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியை மதிப்பீடு செய்வதற்கு—பயன்படுத்தினால் எந்த மதிப்பிலிருந்து கண்டறிந்த மதிப்புகளின் விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதல் (அதாவது எச்சங்களின் வர்க்கங்கள்) சிறுமமாக (minimum) இருக்கிறதோ அதனைக் கண்டறிகிறோம். கண்டறிந்த மதிப்புகளின் தொடரொன்றுக்கு அதன் கூட்டுச் சராசரி இந்த நிபந்தனையைப் பூர்த்தி செய்கிறது; முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியின் குறைந்த வர்க்க மதிப்பீடாக மாதிரியின் சராசரியில் இருக்கும். சிதறியுள்ள புள்ளிகளுக்குக் குறைந்த வர்க்க முறையில் மிகவும் ஏற்புடைய நேர்கோடாக எந்த நேர்கோட்டிலிருந்து விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதல் சிறுமமாக இருக்கிறதோ அதனைக் கருதுகிறோம். குறைந்த வர்க்கமுறை நெடுங்காலமாக வழக்கில் இருந்துவருகிறது. நடைமுறையில் விரிவாகப் பயனுவது, அதனைக் கையாள்வதில் பயனுகும் எளிய செயல்முறை அதன் சிறப்பை உணர்த்துகிறது. உடன் தொடர்பு ஆராய்ச்சிகளிலும் காலத் தொடர் வரிசையின் போக்கினை வரையறை செய்வதிலும் இம்முறை அதிகம் பயனுவதைப் பின்னர் காண்போம். எனினும், இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்த மாறிக்கு இதனைப் பயன்படுத்தும் முக்கியத்துவத்தைத் தவிர, பிறவற்றிற்குப் பயன்படுத்துவது வழக்கத்திலிருப்பினும் ஏற்றதன்று. இயல்நிலைப் பரவலாகவுள்ள கண்டறிந்த மதிப்புகளுக்குத்தான் குறைந்த வர்க்கமுறையினைக் கையாண்டு மதிப்பீடு செய்வது தர்க்க ரீதியாகச் சரியான முடிவுகளைத் தரும்.

மொமென்டு முறையினை (method of moments) மதிப்பீடு செய்வதற்குக் கையாளும்போது முழுமைத் தொகுதியின் சில மொமென்டுகள் (முதல் இரண்டு அல்லது முதல் நான்கு) மாதிரியின் மொமென்டுகளுக்குச் சமம் எனப் புனைந்துகொள்கிறோம். தேவைப்படுகின்ற முழுமைத் தொகுதியின் அளவுகளைப் புனைந்துகொள்ளப்பட்ட முழுமைத்தொகுதி மொமென்டுகளிலிருந்து மதிப்பீடு செய்கிறோம்.

கார்ல் பியர்ஸன் என்பாரால் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட இம்முறை பியர்ஸன் குடும்பத்தைச் சேர்ந்த அலைவு வளைகோடுகளைப் பொருத்துவதற்குப் பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. பல சந்தர்ப்பங்களில் இதனைக் கையாள்வது செயல்முறையில் எளிதாக இருப்பினும் இயல்நிலை வகைப் பரவல்கள் அன்றிப் பிறவற்றிற்குத் திறமான முறையன்று.

எனவே, குறைந்த வர்க்கமுறையும் மொமென்டு முறையும் பொதுவாகக் கையாள்கையில் வரையறைக்குட்பட்டுப் பயனுடையன. இப்பொழுது தரமுடையதாகக் கருதப்படுகின்ற முறை விரிவாகப் பயன்படுத்தப்படுவது; உறுதியான தர்க்க அடிப்படையில் அமைந்தது. இதற்கு உச்ச நிகழ் வாய்ப்புமுறை (the method of maximum likelihood) எனப் பெயர். ஆர். ஏ. பிஷர் என்பவரால் இம்முறை கண்டுபிடிக்கப்பட்டது.[4] நடைமுறை உபயோகங்களுக்கு இம்முறையின் அடிப்படைப் பண்புகளை இங்கே கூறுவோம்; குறிப்பிட்ட சந்தர்ப்பங்களில் பயன்படுத்தப்படும் முறைபற்றிய விவரங்கள் இங்கே கூறப்படப் போவதில்லை.

உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு முறையின் சுருக்கத்தைப் பின்வருமாறு கூறலாம்: நம்மிடம் வகை தெரிந்த முழுமைத் தொகுதியினின்று எடுக்கப்பட்ட n கண்டறிந்த மதிப்புகளைக்கொண்ட மாதிரி ஒன்றிருக்கிறது; இந்த மாதிரியைப் பெறுவது நாம் கண்டறிந்த நிகழ்ச்சியாகவுள்ளது. இந்த மாதிரியினால் நாம் அறிந்த செய்தியினை அடிப்படையாகக்கொண்டு ஒரு குறிப்பிட்ட முழுமைத் தொகுதி அளவையான θ-வை மதிப்பீடு செய்ய விரும்புகிறோம். (ஒரே ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் அளவைதான் இங்கே தேவைப்படுவதாகப் புனைந்து கொள்வோம்.) θ-வுக்குக் கிடைக்கக்கூடிய பல மதிப்பீடுகளில் கண்டறிந்த நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்திறம் எத்தனை அதிகமாக இருக்கிறதோ அதற்குத் தொடர்புடைய θ-ஐ எடுக்கிறோம். (மாதிரி, ஒருமைத் தொகுதிக்கு ஒரு பிரதிநிதியாக விளங்குகிறது என்ற அடிப்படைப் புனைவே இம் முறைக்கு ஆதாரமாகவுள்ளது.) இந்தக் கொள்கையின்படி ஒரு நேரிடையான கணித செயல்முறையின்மூலம் தரமான பரவல் கோவைகளின் முழுமைத் தொகுதி அளவைகளுக்கு உச்சநிகழ் வாய்ப்பு மதிப்பீடுகளைப் பெறுகிறோம்.

உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு நிபந்தனைகளைப் பூர்த்தி செய்யும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை இங்கே தருவது சுவையுடையதாக இருக்கும். ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட குறிப்புகளின் மாதிரியொன்றுக்கு, $\Sigma X/N$ என்பதினின்று மதிப்பீடு

[4] து. நூ. ப. 47, ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகள் 10, 11, 24, 26. கணிதப் புள்ளியியல் பற்றிய தரமான நூல்களில் இச்செயல் முறையும் பயன்களும் விளக்கமாக இருக்கும்.

செய்யப்பட்ட சராசரியான $\bar{X}$ முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியான μ-விற்கு உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு மதிப்பீடாகும். (இயல்நிலைப் பரவலாகவுள்ள மாறிக்குக் குறைந்த வர்க்க முறையினால் மதிப்பீடு செய்யப் படும் μ-வும் உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு முறையினால் மதிப்பீடு செய்யப் படும் μ-வும் சமம்.) அதுபோலவே, பாய்ஸான் (Poisson) பரவலி லிருந்து எடுத்த மாதிரியின் சராசரியின் $\bar{X}$-ம் முழுமைத் தொகுதி சராசரிக்கு உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு மதிப்பீடாகும். இயல்நிலைப் பரவலாகவுள்ள மாறியின் மாறுபாடான σ^2-ன் உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு

$$s^2 = \frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{N} \tag{7.1}$$

என்பதனால் பெறப்படுகிறது. என்றாலும் இது பிறழ்ச்சியில்லாத மதிப்பீடு அன்று. σ^2-ன் சிறந்த பிறழ்ச்சியில்லாத மதிப்பீடு[5] (best unbiassed estimate of σ^2)

$$s'^2 = \Sigma(X - \bar{X})^2/(N - 1) \tag{7.2}$$

என்பதனால் கிடைக்கிறது. எனவே, வேறுபாட்டின் மிகச் சிறந்த பிறழ்ச்சியில்லாத மதிப்பீடு,

$$s'^2 = \frac{N}{N-1} s^2$$

என்பதனால் கிடைக்கிறது.

இந்த மதிப்பீட்டு முறைகளில் எதனையும் மற்றவற்றிலும் சிறந்ததென வலியுறுத்தும் வாதம் ஒன்றுமில்லை என்பதனை இங்கே கவனிக்கவேண்டும். என்றாலும், உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு முறை நடைமுறையில் பயனாகும் சிறப்பினால் பெருமை பெற்று விளங்குகிறது. அதன்மூலம் கிடைக்கும் மதிப்பீடுகள் உறுதியானவை. எந்த சமயத்திலாவது திறன் மிக்க மதிப்பீடுகள் இருக்குமானால் உச்சநிகழ் வாய்ப்பு முறையே அதனைத் தருவதாக இருக்கும். பெரிய மாதிரிகளில் உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு மதிப்பீடுகள் இயல்நிலை வகையை அணுகுகின்றன. கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் அளவையொன்றுக்குப் போதுமான மதிப்பீடுகள் இருக்குமானால், உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு மதிப்பீடுகள் போதுமானதாக இருக்கும். முன்னர் கூறிய எடுத்துக்காட்டில் விளக்கம் தந்தபடி உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு முறையினால் கிடைக்கும் மதிப்பீடுகள் பிறழ்ச்சியடையாதனவாக இருக்க வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை. அதாவது ஒரு கொடுக்கப்பட்ட சந்தர்ப்பத்தில் நாம் மதிப்பீடு செய்ய விரும்பும் முழுமைத் தொகுதியின் அளவை, கொடுக்கப்பட்ட மாதிரிப் பரவலை உருவாக்கும் உச்ச

[5] சாத்தியமான பல்வேறு பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடுகளில் (அவை இருக்கும்போது) மிகக் குறைந்த மாறுபாடுள்ள மதிப்பீட்டை வரையறை செய்யும் இச் சொல், ஜே. நேமனால் (J. Neyman) முதலில் பயன்படுத்தப்பட்டது.

நிகழ் வாய்ப்பு மதிப்பீடுகளின் முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்குச் சமமாக இருக்கவேண்டியதில்லை. என்றாலும், பிறழ்ச்சியினை நீக்குவதற்கு (மாறுபாடுபற்றி எடுத்துக்காட்டியதுபோலத் திருத்தங்கள் செய்யலாம்), முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளை மதிப்பீடு செய்ய முனையும்போது உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு முறை தரமான முறையாக இல்லாவிட்டாலுங்கூட ஒத்து நோக்குவதற்கு ஓர் அடிப்படையைத் தருகிறது. (அதாவது பிறமுறைகளைப் பயன்படுத்திக் கிடைக்கும் விளைவுகளை ஆராய்வதற்கு ஓர் அடிப்படையினைத் தருகின்றது.)[6]

பல கணக்குகளில் உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு மதிப்பீடுகள் எளிதில் கிடைத்துவிடுகின்றன. இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரிகளை எடுக்கும்போது கூட்டுச் சராசரிகள், தரவிலக்கங்கள், உடன் தொடர்பு அளவைகள் ஆகியவற்றின் மதிப்பீடுகள், உச்ச நிகழ்வாய்ப்பு முறையினாலும் குறைந்த வர்க்க முறையினாலும் ஒன்றாகவே கிடைக்கும். மற்றக் கணக்குகளுக்கு உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு முறைகள் மிகவும் சிக்கல் உடையதாகவும் அதிக நேரத்தையும் காலத்தையும் செலவழித்தே தீர்வு காணக்கூடியதாகவும் இருக்கும். அத்தகைய சமயங்களில் குறிப்பாக மாதிரிகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலை வகையிலிருந்து சற்றே விலகியதாக

[6] உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு முறை பயனாகும் விதம்பற்றி இந் நூலில் ஆராயப்படவில்லை; இம் முறையின் தன்மைபற்றியே இங்குச் சுருங்கக் காண்போம். n கண்டறிந்த மதிப்புகள் கொண்ட $(X_1, X_2 \ldots\ldots X_n)$ மாதிரியொன்றிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் அளவையாக θ-க்கு ஒரு மதிப்பீடு பெறவேண்டும். அம் முறைக்கு இரு படிகள் உள்ளன :

1. இம் மாதிரிக்கு நிகழ்வாய்ப்புக் கோவையினை அமைக்கவும். இக் கோவையானது குறிப்பிட்ட மாதிரியினை அடைவதற்கான நிகழ்திறத்தை வரையறை செய்கிறது. [மாதிரி, தொடர்ச்சியுடைய மாறியினைக் குறித்ததானால், இதனை மாதிரிப் புள்ளியின் நிகழ்திற அடர்த்தி (density) என்போம்.] சார்பலனின் சமன்பாட்டில் கண்டறிந்த மாதிரி மதிப்புகளும், தெரியாத முழுமைத் தொகுதி அளவையான θ-ம் இடம் பெறுகின்றன. ஒரே ஒரு முழுமைத் தொகுதியினை மட்டுமே மதிப்பீடு செய்யவேண்டியிருந்தால், நிகழ் வாய்ப்புச் சார்பலனை

$$L = f(X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots X_n; \theta)$$

என்று எழுதலாம். n மாதிரி மதிப்புகளும் நமக்குத் தெரியுமாதலால் L என்ற நிகழ் வாய்ப்புச் சார்பலன், θ-ன் சார்பலனாக மட்டுமே இருக்கும்.

2. சாத்தியமான பல மதிப்பீடுகளில் L-க்கு உச்ச மதிப்பைத் தரும் θ-ன் மதிப்பீட்டைத் தீர்மானிக்கவும். (அதாவது குறிப்பிட்ட மாதிரியினைப் பெறுகின்ற நிகழ்திறத்தை மிகப் பெரிதாக ஆக்கக்கூடிய அந்த மதிப்பீட்டைத் தீர்மானிக்கவும்.) நிகழ் வாய்ப்புச் சார்பலனுக்கு எந்தப் புள்ளியில் உச்ச மதிப்பு இருக்குமோ அதனை வேறுபாடு கண்டறியும் (differentiation) முறையால் காணலாம். தீர்வு காணவேண்டிய சமன்பாட்டை

$$\frac{\delta L}{\delta \theta} = 0$$

என எழுதலாம். இதன் தீர்வு θ-ன் உச்ச நிகழ்வாய்ப்பின் மதிப்பீடான $\hat{\theta}$ ஆகும்.

இருக்கும்போது, எளிய, குறைந்த வர்க்கமுறை பொதுவாகப் பயன் படுத்தப்படுகிறது. இத்தகைய சூழ்நிலைகளில் குறைந்த வர்க்க முறையில் மதிப்பீடுகள் உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு மதிப்பீடுகளிலும் நல்ல தோராயமாக விளங்குகின்றன.

இடைவெளி மதிப்பீடு : நம்பிக்கை வரம்புகள்

தெரியாத ஒரு முழுமைத் தொகுதி அளவையின் 'சிறந்த' மதிப் பீடாக, ஒரு குறிப்பிட்ட வகையில் கருதக்கூடிய தனி மதிப்பினைத் தேர்ந்தெடுப்பதே, புள்ளி மதிப்பீட்டின் குறிக்கோள் ஆகும். ஒரே மதிப்பினை வைத்து, இவ் வகையாகக் குறித்து மதிப்பீடு செய்கின்ற முறை, நமக்கு தேவைப்படுகின்ற முழுமைத் தொகுதியின் உண்மை மதிப்போடு ஒன்றுவது அரிது. தொடர்ச்சியுடை மாறி யொன்றினைக் குறித்து நாம் ஆராய்கையில் தவறான மதிப்புகள் எண்ணிலாதன வாகவும், ஒன்றே ஒன்றுதான் சரியான மதிப்பாகவும் இருக்கும். அமெரிக்காவில் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட ஆண்டில் ஊதியம் பெறுவோரது ஒரு மாதிரியை ஆராய்ந்து, அந்த மாதிரியினின்று கிடைக்கின்ற செய்தியின் அடிப்படையில் பின்வரும் முடிவுக்கு வருவதாக வைத்துக் கொள்வோம்; X என்ற ஆண்டில் அமெரிக்காவில் வருமானம் பெறுவோரின் உண்மையான சராசரி வருமானம் 4,244 டாலர்கள். இந்த மதிப்பீடு நாம் செய்யக்கூடிய 'சிறந்த' மதிப்பீடாக இருப் பினும் இதுதான் சரியான மதிப்பு (ஒரு பரந்த வீச்சில் இந்தப் புள்ளி எங்காவது அமையலாம்) என்று உறுதியாகச் சொல் வதற்கில்லை. முடிவாக, நிகழ்திறத்தைப் பயன்படுத்தி செய்தி கூறப்படவில்லை. ஆனால் தர்க்கரீதியான காரணங்களுக்கும் நடைமுறைக் காரணங்களுக்கும் மாதிரியிலிருந்து பெறப்படுகின்ற செய்தியின் சாரமான முடிவு நிகழ்திற முறைப்படி கூறப்படுமானல், மாதிரியிலிருந்து பெறுகின்ற செய்தி மிகவும் பயனுடையதாக இருக்கும். மாதிரியினின்று முடிவினைப் பொதுமையானதாக ஆக்கு வதால் அதில் ஓரளவுக்கு ஐயக் குறிப்பு உண்டு. எனவே, இதில் எழக்கூடிய ஐயக் குறிப்பின் அளவினை ஒருவகையாக அளந்து கண்டறிவது விரும்பத்தக்கது.

இடைவெளி மதிப்பீட்டுக் கொள்கையின்படி பின்வருவது போன்ற முடிவினைப் பெறலாம்: X என்ற ஆண்டில் அமெரிக்காவில் வரு மானம் பெற்றோரது உண்மைச் சராசரி வருமானம் $ 4,146-லிருந்து $ 4,342-க்குள் இருந்தது. இந்தச் செய்தி மெய்யாகவும் இருக்கலாம்; தவறாகவும் இருக்கலாம். ஏனெனில், மேற்கூறப்பட்ட முழுமைத் தொகுதிக்கு உண்மையான சராசரி வருமானம் மேற்குறிப்பிட்ட எல்லைகளுக்குள் அமையலாம்; அல்லது அமையாது போகலாம். இது மெய்யோ தவறோ நமக்குத் தெரியாது. ஆனல், இடைவெளி

மதிப்பீட்டு முறையின் சிறப்பு என்னவென்றல் மேலே எடுத்துக் காட்டியதுபோலச் செய்திகளைக் கூறும்படி நிகழ்திறத்தைப் பிணைத்துக் கூறுவதுதான். அதாவது இத்தகைய செய்தி ஒன்ருேடு ஒரு நம்பக எல்லையை வரைகட்டிப் பெறுகிருேம்.

ஓர் எடுத்துக் காட்டு

σ தெரிந்தபோது μ-வினை மதிப்பீடு செய்தல்: இப்பொழுது பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படும் இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறையினை முதலில் எடுகோள்நிலை எடுத்துக்காட்டு (hypothetical example) ஒன்றின்மூலம் விளக்குவோம். தரவிலக்கமான σ-வின் மதிப்பு நாற்பதாகவுள்ள இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி ஒன்றின் சராசரியான μ-வை ஆய்வாளர் மதிப்பீடு செய்ய முனைவதாக வைத்துக்கொள்வோம். அதாவது ஆய்வாளருக்குப் பரவல், இயல்நிலை அமைப்பு உடையது என்று தெரியும்; அந்தப் பரவலின் தரவிலக்கமும் தெரியும்; ஆனல், அதன் சராசரி தெரியாது. இப்போது 400 குறிப்புகள் கொண்ட 1,000 மாதிரிகளை இந்த முழுமைத்தொகுதியினின்று ஆய்வாளர் தேர்ந்து வைத்திருப்பதாகக் கொள்வோம். இந்த ஒவ்வொரு மாதிரிக்கும் அவர் $\bar{X}$-ஐக் கணக்கிட்டுவிட்டார். இப்படிக் கணக்கிடப்பட்ட 1,000 $\bar{X}$-மதிப்புகளும், 99.5, 102.1, 95.8, 98.7, 101.4............முதலியன என்று கொள்வோம். கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து N என்ற நிலைத்த அளவினையுடைய மாதிரிகளின் சராசரிகள் இயல்நிலைப் பரவலாக அமையும் என்பதனையும், அவற்றின் தரவிலக்கம் $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ ஆக இருக்கும் என்பதனையும் முன்னர்க் கண்டோம். எனவே, இந்த 1,000 சராசரிகளில் மேலே கொடுக்கப்பட்ட ஐந்தும் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாக அமையும். இவற்றின் தரவிலக்கம் $\frac{40}{\sqrt{400}}$ அல்லது 2-க்குச் சமம். எனவே, 6.5 படத்திலுள்ளதுபோன்ற வரைவடிவமாக அமைக்கக்கூடிய ஒரு முழுமைத் தொகுதியினின்று ஆய்வாளர் மாதிரிகளைப் பிரித்தெடுக்கிருர் என்பது நமக்குத் தெரியும். இந்த முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியான μ ஆய்வாளருக்குத் தெரியாது. ஆனல், இந்த முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிகள் குறிப்பிடப்பட்ட வீதங்களில் எந்த எல்லைகளுக்குட்பட்டு அமையும் என்பது அவருக்குத் தெரியும்; அறுபத்தெட்டு சதவிகித சராசரிகள் $\mu \pm 2$ என்பதற்குள் அமையும். 95.45 சதவிகித சராசரிகள் $\mu \pm 4$ என்பதற்குள் அமையும்; 99.7 சதவிகித சராசரிகள் $\mu \pm 6$ என்பதற்குள் அமையும்.

இப்போது அடுத்தடுத்த மாதிரிகள் ஒவ்வொன்றினின்றும் பெறுகின்ற செய்தியின் அடிப்படையில் உய்த்துணர்வு செய்வதற்கு

ஆய்வாளர் முனைகிறார். இயல்நிலை வளைகோட்டின் 95 சதவிகித பரப்பு சராசரிக்கு மேலும் கீழும், 1.96σ தூரங்களில் அமைக்கப்படும் குத்துக் கோடுகளுக்குள் அமையும் என்பதனைத் தவிர வேறு விளக்கங்களை இங்கே தரப்போவது இல்லை. அதாவது, கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள σ மடங்குகளைப் பயன்படுத்தும்போது, ஆய்வாளர் 95 சதவிகித 'நம்பக எல்லை'க்குள்—இச் சொற்றொடரை விரைவில் விவரிப்போம்—வேலை செய்கிறார்.

99.5 என்ற சராசரியினையுடைய முதல் மாதிரியினை ஆய்வாளர் பிரித்தெடுத்தபின், பின்வரும் செய்தியைக் கூறுகிறார்:

1. 'நான் மாதிரிகளைப் பிரித்தெடுக்கும் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியான μ, 95.58-க்கும் 103.42-க்கும் இடையில் இருக்கிறது.'

இதுபோன்று அடுத்தடுத்த மாதிரிகள் ஒவ்வொன்றையும் பிரித்தெடுத்தபின் மேற்கூறியதையொத்த பல கூற்றுகளைக் கூறுகிறார். ஆனால், ஒவ்வொன்றிலும் எல்லைகள் வேறுபடுகின்றன. இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது, ஐந்தாவது மாதிரிச் சராசரிகளையொட்டி நான்கு தொடர்ந்த கூற்றுகள் பின்வருமாறு :

2. 'μ என்ற சராசரி 98.18-லிருந்து 106.02-க்குள் விழுகிறது.'

3. 'μ என்ற சராசரி 91.88-லிருந்து 99.72-க்குள் விழுகிறது.'

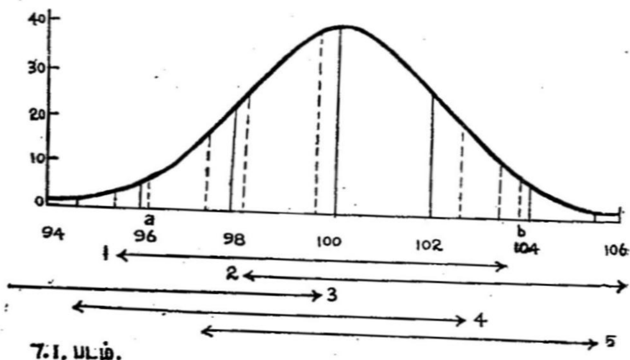
4. 'μ என்ற சராசரி 94.78-லிருந்து 102.62-க்குள் விழுகிறது.'

5. 'μ என்ற சராசரி 97.48-லிருந்து 105.32-க்குள் விழுகிறது.'

மேற்கூறிய செய்தி ஒவ்வொன்றிலும் 3.92-லிருந்து—அதாவது 1.96×2, (2 என்பது சராசரிகள் பரவலின் தரவிலக்கம்)—கொடுக்கப்பட்ட மாதிரிச் சராசரியினைக் கழித்தும், 3.92உடன் கொடுக்கப்பட்ட மாதிரிச் சராசரியைக் கூட்டியும் எல்லைகளை அமைப்பதை வாசகர்கள் கவனித்திருக்கலாம். அதாவது, $95.58 = 99.5 - 3.92$; $103.42 = 99.5 + 3.92$.

இப்போது நம்மிடம் (அதாவது, ஆசிரியரிடமும் படிப்பவரிடமும்) ஆய்வாளரிடம் இல்லாத செய்தி ஒன்று இருப்பதாகவும், அதன் மூலம் அவர் வெளியிட்ட செய்திகளின் திருத்தத்தைச் சரிபார்க்க முடியும் என்பதாகவும் புனைந்துகொள்வோம். இந்த உபரிச் செய்தி

யாவது, மாதிரிகள் பிரித்தெடுக்கப்படுகின்ற முழுமைத் தொகுதியின் உண்மைச் சராசரி; இது சரியாக 100 என்பதாகும். இப்போது மேலே கூறப்பட்ட ஐந்து செய்திகளில் நான்கு சரியானவை என்பதையும், ஒன்று (மூன்ருவது) தவருனது என்பதையும் காண்கிரேம். μ என்ற சராசரி 91.88-லிருந்து 99.72-க்குள் விழுவதில்லை. உண்மைக்கும் மேற்கூறிய ஒவ்வொரு செய்திக்குமுள்ள தொடர்பு 7.1 படத்தால் நன்கு தெரியவரும். மேற்குறிப்பிட்ட செய்திகள் ஒவ்வொன்றையும் சராசரிகளின் பரவலாகவுள்ள இயல்நிலை வளைகோட்டின் வரைபடத்தின் கீழே கோடுகளாக எண்கனிட்டுக் காட்டியுள்ளோம். இக் கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் குறிக்கப்பட்ட இடைவெளி வரம்புகளில் குத்தாயங்கள் அமைகின்ற இடத்தைக் காட்டுகின்றன. இந்த இடைவெளிகளின் நான்கில் உண்மைச் சராசரி μ அடங்குகிறது ; ஒன்றில் அடங்குவதில்லை.



7.1. படம்.

ஐந்து மாதிரிகளின் அடிப்படையில், 0.95 நம்பக இடைவெளிகளோடு, மாதிரிச் சராசரிகளின் பரவலைக் காட்டும் இயல்நிலை வளைகோடு. *

x அளவுத் திட்டத்தில் μ என்ற சராசரிக்கு மேலும் கீழும் 1.96σ தூரங்களிலுள்ள புள்ளிகளில் a, b என்ற இரண்டு குத்தாயங்கள் வரையப்படுகின்றன. இவற்றுக்குள் வளைகோட்டுக்குக் கீழே 95 சதவிகிதப் பரப்பு அடங்குகிறது. மாதிரிச் சராசரிக்கு இசைந்த புள்ளியொன்று a, b என்ற குத்தாயங்களுக்குள் அடங்கிய பரப்புகளில் எங்காவது விழுமானுல் $\bar{X} \pm 1.96\sigma$ என்ற இடைவெளிக்குள் μ என்ற சராசரி அடங்கும். அத்தகைய சமயங்களில் 240 ஆம் பக்கத்

* மாதிரிகள் பிரித்தெடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளாவன: சராசரி $= 100$ (இது ஆய்வாளருக்குத் தெரியாது). தரவிலக்கம் $= 40$ (இது ஆய்வாளருக்குத் தெரியும்). ஒவ்வொரு மாதிரியிலும் $N = 400$.

தில் தரப்பட்டுள்ள வகையான கூற்றுகள் மெய்யாக இருக்கும். a என்ற குத்துக் கோட்டுக்கோ, b என்ற குத்துக் கோட்டுக்கோ புறம் பாக மாதிரிப் புள்ளி விழுமானல், $\bar{X} \pm 1.96\sigma$ என்ற இடைவெளியில் μ என்ற சராசரி அடங்காது. அத்தகைய மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டு களில் கண்டனபோன்ற கூற்றுகள் தவருக இருக்கும். ஆனல், இங்கே காணப்பட்ட அளவுகள் இயல்நிலைப் பரவல் வகையாக அமைந்தனவாதலால், அவற்றில் 95 சதவிகிதம் $\mu \pm 1.96\sigma$ என்ற எல்லைகளுக்குள் பேரளவில் அடங்கும். எனவே, மொத்தத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள செய்திகளில் 95 சதவிகிதம் மெய்யாகவும், 5 சதவிகிதம் தவருகவும் இருக்கும் என எதிர்பார்ப்போம். மேலே குறிப்பிடப்பட்ட ஐந்து செய்திகளைப்போல 1,000 $\bar{X}$ கூற்றுகளின் அடிப்படையில் ஆய்வாளர் முடிவுகட்டவேண்டுமானல், அவற்றில் கிட்டத்தட்ட 950 மெய்யாகவும், கிட்டத்தட்ட 50 தவருகவும் இருக்கும் என எதிர்பார்க்கலாம். ('கிட்டத்தட்ட' என்று சொல்வது ஏனெனில், 1,000 பெரிய எண்ணுகை இருந்தாலுங்கூட, மாதிரி முறையில் ஏற்படும் ஏற்ற இறக்கங்களால் இந்த எண்களிலிருந்து மேலும் கீழுமாகச் சிறிது விலக்கமடைவது இயற்கையே.) நடைமுறையில் ஆய்வாளர் ஆய்வுக்கென அநேகமாக ஒரே மாதிரியைமட்டும் பிரித்தெடுப்பார். எனவே, அவர் கூறக்கூடிய பொதுமுடிவு 'μ என்ற சராசரி 95.58-லிருந்து 103.42-க்குள் விழும்' என்பதுதான். இது உண்மையானதாகவோ அன்றித் தவருனதாகவோ இருக்கலாம். இதில் எது சரியென்று ஆய்வாளருக்குத் தெரியாது. இது சரியாக இருப்பதற்கு நிகழ்திறம் 0.95 என்று அவர் கூறுவதில்லை. ஆனல், அவர் கூறியது மெய்யாக இருப்பதற்கு நிகழ்திறம் (அந்தக் கூற்று உண்மையில் மெய்யானபோது) 1 ஆகவோ அல்லது (கூற்று தவறுனதாக இருக்கும்பொழுது) 0 ஆகவோ அமைந்திருக்கும். ஆனல், இதே முறையில் செய்யப்படுகின்ற இவ்வகையான 100 கூற்றுகளில் 95 உண்மையாக இருக்குமென்று அவருக்குத் தெரியாது. அதாவது, 100-க்கு 95 மெய்யாக இருக்கும் கூற்றுகளின் தொகுதிகளில் இதுவும் ஒன்ருகும். அவர் கூறும் கூற்றின் நம்பகம் 0.95 என்ற 'நிகழ்திறக் கெழுவினல்' (probability coefficient) அளக்கப்படுகிறது. எனவே, 95.58லிருந்து 103.42 வரையான இடைவெளியை நம்பக இடைவெளி (confidence interval) என்று அழைக்கிருேம்.

பல ஆண்டுகளாக வழக்கிலிருந்துவரும் முறையினின்று புள்ளியியல் உய்த்துணர்வை இவ் வகையான சொல்லாட்சியோடு அமைப்பது மாறுபட்டது. அதாவது, μ என்ற மதிப்பீடு செயற்பட இருக்கும் முழுமைத் தொகுதியின் அளவை, மாறும் தன்மை உடையதாகக் கருதப்படாது மாறிலியாகக் கருதப்படுவதை வாசகர்

முக்கியமாகக் கவனிக்க வேண்டும். பல செய்முறைச் சிக்கல்களில் நாம் அறிய முயலும் மதிப்பு நமக்குத் தெரியாததாக இருந்தாலும், மாருத தன்மையுடையதாக இருக்கிறது. எனவே, முழுமைத் தொகுதியின் அளவை மாறி என்ற கருத்தினைத் தோற்றுவிக்கக்கூடிய (அதாவது, ‘ உண்மையான சராசரி கொடுக்கப்பட்ட வரம்புகளுக்குள் அமைவதற்கு நிகழ்திறம் 0.50 என்பது போன்ற ’) சொற்களைப் பயன்படுத்தமாட்டோம். முழுமைத் தொகுதியின் அளவை மாறிலி ஆதலால், கொடுக்கப்பட்ட எல்லைகளுக்குள் வரைகட்டிக் கூறும் கூற்றுகள் மெய்யாகவோ தவருகவோ இருக்கவேண்டும். இவ்வகையில் இடைவெளிகளை வெவ்வேருகக்கொண்டு செய்யப்படும் எல்லாக் கூற்றுகளின் தொகுதிக்கும் நிகழ்திறத்தை இணைக்கிறோம். இக் கூற்றுகளின் தொகுதியில் மதிப்பிடப்பட இருக்கும் முழுமைத் தொகுதியின் அளவை மாறுபடுவதில்லை; இதில் மாறுபடுவது இடைவெளி அமையும் இடங்களே.

இறுதியாக, மேற்கூறப்பட்ட எடுத்துக்காட்டு முழுமைத்தொகுதியின்—σ தெரிந்த—ஒரு தனிப்பட்ட சூழ்நிலையில் அமைந்ததென்பதைக் கவனிக்கவேண்டும். σ தெரிவதால், முடிவுகளை எல்லைகட்டும் இடைவெளிகள் யாவும் ஒரே அகலத்தை உடையன. σ தெரியாதபோது, முடிவுகளை அடையும் விதமும், விளக்கம் தரும் விதமும் மேற்கூறியதுபோன்றதே எனினும், வெவ்வேறு முடிவுகளுக்கும் எல்லைகள் சமமின்றி இருக்கும். இதைப்பற்றிச் சுருங்கக் காண்பது இன்றியமையாததே.

ஓர் எடுத்துக்காட்டு : σ தெரியாதபோது μவினை மதிப்பீடு செய்தல்

இயல்நிலையாகவோ, அங்ஙனமின்றியோ உள்ள ஒரு கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியினின்று ஆய்வாளர் $n=101$ உள்ள பத்து மாதிரிகளைப் பிரித்தெடுப்பதாக நாம் புனைந்துகொள்வோம். ஆய்வாளருக்குத் தெரியாத முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி, தரவிலக்கம் ஆகியவை முறையே 80-ம், 20-ம் ஆக இருக்கட்டும். ஒவ்வொரு மாதிரியிலும் கண்டறிந்த குறிப்புகளிலிருந்து ஆய்வாளர் $\bar{X}$ என்ற சராசரியையும், s' என்ற தரவிலக்கத்தையும் கணிக்கிருர்; (s'-ஐ σ-வின் மதிப்பீடாகக் கொண்டு $s' = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N-1}}$ என்பதிலிருந்து பெறுகிறோம்). $\bar{X}$, s' ஆகியவற்றின் பல மதிப்புகள் 7-1 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. 10 மாதிரிகளில் ஒவ்வொன்றினுடைய சராசரியின் தரப்பிழையும் இப்போது, $s_{\bar{X}} = \frac{s'}{\sqrt{N}}$ என்பதிலிருந்து மதிப்பீடு செய்யப்படுகிறது. ஒவ்வொரு மாதிரியிலிருந்தும் கிடைக்

கும் செய்திகளின் அடிப்படையில், சராசரி அமைவதற்கான ஓர் இடைவெளியினை ஆய்வாளர் மதிப்பீடு செய்கிறார். 0.95 என்ற நம்பிக்கைக் கெழுவுக்கு உட்பட்டு வேலை செய்ய அவர் தீர்மானித்திருப்பதால், ஒவ்வொன்றிலும் மாதிரிச் சராசரியிலிருந்து $1.96 s_{\bar{X}}$

பட்டியல் 7-1

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியினை மதிப்பீடு செய்தல். ஒரு கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட பத்து மாதிரிகளின் சராசரிகளும் தரவிலக்கங்களும்—0.95 நம்பக இடைவெளிகளுடன்.

மாதிரி எண் (1)	சராசரி (2)	தர விலக்கம் (3)	$\bar{X}$-ன் மதிப்பிடப்பட்ட தரப்பிழை (4)	$P = 0.95$-க்கு நம்பக இடைவெளி (6)
	X	s'	$s_{\bar{X}}$	$\bar{X} \pm 1.96\, s_{\bar{X}}$
1	81.2	19.8	1.98	77.32 — 85.08
2	79 6	21.4	2.14	75.41 — 83.79
3	84.0	19.2	1.92	80.24 — 87.76
4	82.1	22.6	2 26	77.67 — 86.53
5	80.6	20.2	2.02	76.64 — 84.56
6	78.2	17.3	1.73	74.81 — 81.59
7	78.8	20.9	2.09	74.70 — 82.90
8	81.4	18.5	1.85	77.77 — 85.03
9	79.1	19.5	1.95	75.28 — 82.92
10	80.3	21.1	2.11	76.16 — 84.44

(முழுமைத் தொகுதி அளவைகள் : $\mu = 80$, $\sigma = 20$, ஒவ்வொரு மாதிரிக்கும் $N = 101$)

என்ற அளவைக் கூட்டியும் குறைத்தும் நம்பக எல்லைகளைப் பெறுகிறோம். எனவே, முதல் மாதிரியின் விவரங்களைக்கொண்டு பின்வரும் முடிவு செய்யப்படுகின்றது :

'μ என்ற சராசரி 77.32-லிருந்து 85.08-க்குள் விழுகிறது'.

[77.32 என்ற கீழ்எல்லை $81.2-(1\ 96 \times 1.98)$ என்பதிலிருந்தும், 85.08 என்ற மேல் எல்லை $81.2+(1.96 \times 1.98)$ என்பதிலிருந்தும் கிடைக்கின்றன. இந்த வரம்புகள் 7-1 பட்டியலில் ஐந்தாவது பத்தியில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.] இக் கூற்றுச் சரியானதாகவோ அன்றித் தவறானதாகவோ இருக்கலாம். இடைவெளி மதிப்பீட்டுக் கொள்கையின்படி, முதல் கூற்று கிடைத்த செயல்முறையினாலேயே பெறப்பட்ட 100 கூற்றுகளில் 95 சரியானவையாகவும், 5 தவறானவையாகவும் இருக்கும் என ஆய்வாளர் நம்புகிறார். ஒரே முழுமைத் தொகுதியினின்று பெறப்பட்ட 101 குறிப்புகளைக்கொண்ட 10 மாதிரிகளிலிருந்து கிடைத்த

செய்தியின் அடிப்படையில் செய்யப்பட்ட 10 கூற்றுகளின் நம்பக இடைவெளிகளை 7-1 பட்டியலில் 5ஆம் பத்தியில் தந்துள்ளோம். அவற்றை 7.2 படத்தில் வரைவடிவமாகத் தந்துள்ளோம்.[7]

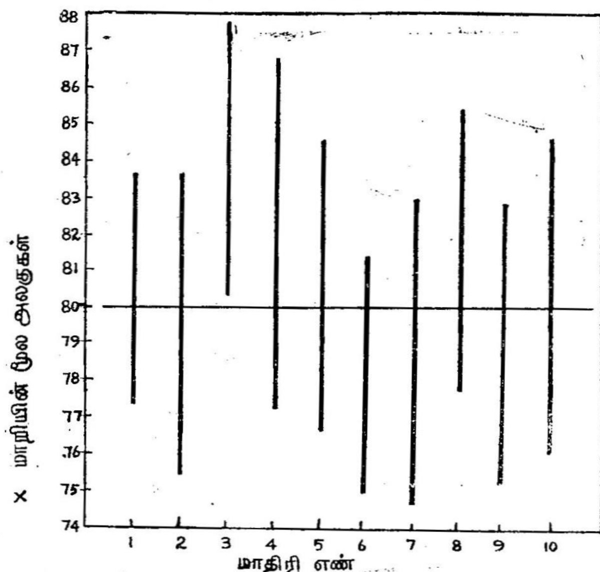
இவ்விதம் அமைக்கப்பட்ட 10 நம்பக இடைவெளிகளும் இட அமைப்பினால் வேறுபட்டன. ஒவ்வொன்றின் நடுப் புள்ளியும் 10 மாதிரிகளின் ஒவ்வொன்றின் சராசரி ஆகும். முன்பு தரப்பட்ட எடுத்துக்காட்டில் அமைந்த நம்பக இடை வெளி போன்றவையே இவையும் (பக்கம் 242). ஆனால், முந்தியதி லிருந்து வேறுபாடு என்னவென்றால், இடைவெளிகள் வெவ் வேறானவை; 7-1 பட்டியலில் முதல் நம்பக இடைவெளியின் வீச்சு 7.76; இரண்டாவதன் வீச்சு 8.38. மிகக் குறைந்த இடைவெளி யான 6.78 ஆறாவது மாதிரியிலிருந்து கிடைக்கிறது. 4ஆவது மாதிரி யிலிருந்து மிகப் பெரிய இடைவெளியான 8.86 கிடைக்கிறது. ஆய்வாளருக்குத் தெரியாத முழுமைத் தொகுதியின் σ-விற்கு மதிப் பீடுகளாக மாதிரிகளில் தரவிலக்கங்களைப் பயன்படுத்துவதால் வீச்சுகள் வேறுபடுகின்றன. உண்மையான σ-மதிப்புக்கு மாதிரித் தரவிலக்கங்கள் சில கீழும் (ஆறாவது மாதிரியில் s'-ன் மதிப்பு 17.3, ஆனால், σ-வின் உண்மை மதிப்போ 20), சில மேலும் இருக்கின்றன. எனவே, பல மாதிரிகளிலிருந்து நம்பக எல்லைகளை மதிப்பீடு செய்கை யில் வேறுபடும் மையப் புள்ளிகள், வேறுபடும் வீச்சுகள் ஆகிய இரண்டு காரணக் கூறுகளால் ஏற்படும் மாறுபாடுகளையும் கவனிக்க. ஆனால், இத்தகைய இரண்டு வேறுபடும் காரணக் கூறுகள் இருந்தும், பேரளவில் வீச்சுகளில் 95 சதவிகித உண்மை சராசரி உள்ளடங்கி யிருப்பது கவனிக்கத்தக்க உண்மை. 7-1 பட்டியலிலும், 7.2 படத்தி லும் தரப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டில், 10-ல் 9 நம்பக இடைவெளி களில் சராசரியான 80 அடங்குகிறது. சராசரி மதிப்பானது முழு மைத் தொகுதி மதிப்பான μஐவிட மிகவும் விஞ்சியுள்ள மூன்றாவது மாதிரியிலேயே நம்பக இடைவெளிக்குள் μ அடங்கவில்லை.[8]

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி அமைந்துள்ள இடத்தை மதிப்பீடு செய்யும் ஆய்வாளருக்கு இந்த எடுத்துக்காட்டிலும் இதற்கு முந்தியதிலும் 7.1, 7.2 படங்களின்மூலம் நாம் அறிந்த விவரங்கள் தெரியாது என்பதை மறந்துவிடலாகாது. μ என்ற உண்மைச்

[7] இந்த வரிவடிவம் வால்டர் ஷெவார்ட் முதலில் உருவமைத்த ஒரு வகை யின்பாற்பட்டது. ஷெவார்ட் எழுதிய 'Statistical Method from the View-point of Quality Control' என்ற நூலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விளக்கம் நிறைந்த படம் 8.4 காண்க.

[8] இந்தக் கூற்றின் முறையான நிரூபணம் இங்கே தரப்படவில்லை. இதில் ஈடுபாடுகொண்ட மாணவர், ஜே. நேமன் (J. Neyman) எழுதிய ஆராய்ச்சிக் குறிப்புகளையும் (து.நா.ப. 117, 121), மற்றும் இந்த அத்தியாய முடிவில் தந்துள்ள துணை நூல்களையும் படித்து விளக்கம்பெறுக.

சராசரிக்கு இசைந்து, இடைவெளி எங்கு அமைகிறது என்பது அவருக்குத் தெரியாது. விளக்கமாகக் கூறவேண்டுமானுல், ஆய்வாளருக்குத் தெரியாத விவரம் வாசகரிடம் உள்ளது. ஒவ்வொரு நம்பக இடைவெளியை வரையறை செய்வதற்கும், அதற்கு இயைந்த நிகழ்



7.2. படம்.

0.95 நம்பகக் கெழுவுடன் முழுமைத் தொகுதிச் சராசரியின் பத்து இடைவெளி மதிப்பீடுகளில் ஒவ்வொன்றின் வீச்சையும் இப் படம் காட்டுகிறது. (முழுமைத் தொகுதி அளவைகளான $\mu = 80$, $\sigma = 20$ என்ற இரண்டும் ஆய்வாளருக்குத் தெரியாது; ஒவ்வொரு மாதிரியிலும் $N = 101$).

திறக் கெழுவினை அறிவதற்கும், அத்துடன் μ என்பது எந்த நம்பக இடைவெளிக்குள் அமைகிறது என்பதை 95 சதவிகிதம் உண்மையாக இருக்குமாறு கூறுவதற்கும் தேவையான செய்திகளே ஆய்வாளருக்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. தனி எடுத்துக்காட்டில் இவை போதுமானவை அல்ல எனினும், செயல்முறைக்கு இந்தச் செய்திகள் முக்கியமானவையாகவும், இவற்றின் அடிப்படையில் முடிவுகள் எடுத்துச் செயலாற்ற வழியமைப்பவையாகவும் இருக்கின்றன.

0.95 என்ற நம்பகக் கெழுவினைத் தேர்ந்தெடுப்பது சில விதங்களில் எதேச்சையானது என்பதை நாம் கவனிக்கவேண்டும். பேரளவில் இரண்டில் ஒரு தடவைதான் செய்கின்ற முடிவுகள் சரியானவையாக இருக்கவேண்டும் என்று ஆய்வாளர் எதிர்பார்ப்பாரேயானுல், 0.50 என்ற நம்பகக் கெழுவை அவர் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். அப்

போது சராசரியின் தரப்பிழையினை 1.96-க்குப் பதிலாக 0.6745 ஆல் (பட்டியல் 7-1-ன் 5ஆம் பத்தியின் தலைப்பைப் பார்க்க) பெருக்க வேண்டியிருக்கும். பேரளவில் 100 தடவைகளில் 99 தடவை அவர் கூறுகின்ற முடிவுகள் சரியாக இருக்கவேண்டும் என்று எதிர்பார்ப்பாரேயானால், 0.99 என்ற நம்பகக் கெழுவினைத் தேர்ந்து 2.576 என்பதனைப் பெருக்குவதற்குப் பயன்படுத்தவேண்டும். எனவே, 0.99 என்ற கெழுவைக்கொண்டு 81.2 சராசரியாகவும், 19.8 தரவிலக்கமாகவும் கொண்ட முதல் மாதிரியின் அடிப்படையில் செய்கின்ற முடிவு பின் வருமாறு இருக்கும்:

'μ என்ற சராசரி 76·1-லிருந்து 86.3-க்குள் விழும்.'

இதுபோன்று 0.95-லிருந்து 0.99-க்கு நம்புகக் கெழுவினை அதிகரிக்கும்போது, நம்பக இடைவெளி அதிகரித்து முடிவு திருத்தக் குறைவாக அமையும். ஆனால், கூற்றின் உண்மைபற்றிய நம்பகம் அதிகமாகும்; கூற்றுகளின் தொகுதியில் 100-க்கு 99 சரியாக இருக்குமென்று எதிர்பார்க்கமுடியும். நம்பக எல்லைகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது, திருத்தம் மிகுந்து நம்பகம் குறைவாகவோ அல்லது திருத்தம் குறைந்து நம்பகம் அதிகமாகவோ தேர்ந்தெடுக்கலாம். ஆராயப்படுகின்ற சிக்கலின் தன்மையைக் குறித்தும், ஓரளவுக்கு ஆய்வாளரது மனப் போக்கினையொட்டியும் நம்பகக் கெழுக்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. 0.95, 0.99 ஆகிய கெழுக்கள் அதிகமாக வழக்கத்திலுள்ளன.

இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறையினை நடைமுறையில் பயன்படுத்தும்போது, எந்த மாதிரி அளவையை--சராசரி, தரவிலக்கம், உடன்தொடர்புக் கெழு—பொதுமையாக்க விரும்புகிறோமோ, அதன் மாதிரிப் பரவலைப்பற்றிய அறிவு அடிப்படையாகத் தெரிய வேண்டியதொன்று. ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறுகின்ற மாதிரிகளில் கணிக்கப்பட்ட (சராசரிபோன்ற) அளவுகளின் மாதிரிப் பரவல் இயல்நிலையாக இருக்கிறதா? அதேபோல இயல்நிலையில்லாத முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெற்ற மாதிரிகளிலிருந்து கணிக்கப்பட்ட அளவைகளின் மாதிரிப் பரவல் இயல்நிலையாக இருக்கிறதா ? அத்தகைய மாதிரிப் பரவல்களைப் பற்றிய அறிவில், முக்கியமாகத் தெரியவேண்டியது, எதிர்பார்க்கப்படும் சிதறலின் தன்மையும், அந்தச் சிதறலின் அளவினை மதிப்பீடு செய்யும் முறைகளும் ஆகும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவல் இயல்நிலை வகையைச் சேர்ந்தது என்றோ அல்லது இயல்நிலையிலிருந்து அதிகமாக விலகாதது என்றோ நமக்குத் தெரிந்தால், அத்தகைய பரவலின் தரவிலக்கத்தைப்பற்றிக் கணிசமான மதிப்பீடு செய்ய முடியுமானால், ஒரேமாதிரியிலிருந்து பெறுகின்ற செய்தியைக்கொண்டு நம்பக இடைவெளிகளின் எல்லைகளை வரையறை செய்து, அந்த

இடைவெளிக்குள் முழுமைத் தொகுதியின் அளவை அமைவதற்கான நம்பகத்தின் அளவினையும் அறிய அடிப்படை கிடைக்கும். இயல்நிலை வகையிலிருந்து மாதிரிப் பரவல் பெரிதும் விலகும்போது செயல்முறை எளிதாகிறது. எனினும், உய்த்துணர்வு செய்ய முடியும். முக்கியமான இயல்நிலை வகையல்லாத மாதிரிப் பரவல்கள், விரிவாக, பெரும்பாலும் பட்டியல் வடிவத்தில் வரையறை செய்யப்பட்டிருக்கின்றன. அத்தகைய பட்டியல்களைக்கொண்டு—இவற்றைப் பின்னர் பயன்படுத்துவோம்—முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளை மதிப்பீடு செய்யவும், வரையறை செய்த அளவுக்குத் திருத்தமாக எடுகோள்களைச் சோதனை செய்யவும் முடியும்.

சில தரப்பிழைகளும், மதிப்பீடு செய்வதில் அவற்றின் பயன்களும்

இந்தப் பகுதியில் நம்பக இடைவெளியை உருவாக்கும் செயல்முறைகளைப்பற்றிய எடுத்துக்காட்டுகளைத் தந்து, அதே சமயத்தில் பலவித புள்ளியியல் அளவுகளின் மாதிரிப் பரவல்களின் தன்மைகளையும் ஆராய்வோம்.

கூட்டுச் சராசரி

ஐந்தாவது அத்தியாயத்தின் 5-2 பட்டியலில் 1946ஆம் ஆண்டு 83,114 இரசாயனத் தொழிற்சாலைகளில் தொழிலாளர் பெற்ற சராசரி மணி ஊதியத்தின் அடிப்படையில் பாகுபாடு செய்யப்பட்ட பரவல் தரப்பட்டுள்ளது. இந்தப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 114.61 சென்ட்டுகளாகும். இதன் தரவிலக்கம் 23.54 ஆகும். இந்தத் தரவிலக்கத்தை, இந்த மாதிரி எந்த முழுமைத் தொகுதியினின்று பிரித்தெடுக்கப்பட்டதோ அதன் தரவிலக்கத்துக்குத் தோராயமாக எடுத்துக்கொண்டு[9]

$$s_m = \frac{s}{\sqrt{N-1}} = \frac{23.54}{\sqrt{83,113}} = 0.082$$

என்று பெறுகிறோம். 1946 ஜனவரியில் இரசாயனத் தொழிற்சாலையில் வேலை செய்த தொழிலாளர்களின் வார ஊதியத்தின் உண்மைச் சராசரி நமக்குத் தெரியாது. 114.61 சென்டுகள் என்பது நமக்குத் தெரிந்த தோராயங்களில் சிறந்ததாகும். இதே அளவைக்கொண்ட மேலும் பல மாதிரிகளைப் பிரித்தெடுப்போமானால், நமக்குப் பல சராசரி

[9] $s = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$ என்ற வாய்ப்பாட்டிலிருந்து s-ஐப் பெறுகிறோம். எனவே, M-ன் தரப்பிழையை மதிப்பீடு செய்கையில், $s_m = s/\sqrt{N-1}$ என்ற வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்துவதே முறை. அதாவது, σ-வை மதிப்பீடு செய்யும்

மதிப்புகள் கிடைக்கும். இவை இயல்நிலைப் பரவலாக அமையும். இதன் மையத்தை உண்மை மதிப்பாகப் புனைந்துகொள்வோம். இந்த இயல்நிலைப் பரவலின் தரவிலக்கம், 0.082 சென்டு என நாம் மதிப்பீடு செய்கிறோம். 0.95 என்ற நிகழ்திறக் கெழுவினைக் கொண்டு வேலைசெய்ய விரும்பினால், விரும்பிய நம்பக இடைவெளியின் கீழ் எல்லை 114.61—(1.96 × 0.082) அல்லது 114.45 ஆகும். மேல் எல்லையாக 114.61 + (1.96 × 0.082) அல்லது 114.77 இருக்கும். எனவே, நாம் செய்யும் புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு பின்வரும் வடிவத்தில் இருக்கும்: ' 1946 ஜனவரியில் இரசாயனத் தொழிற்சாலையில் தொழிலாளர்களின் முழுமைத் தொகுதியின் 6 மணி ஊதிய சராசரி 114.45 சென்டிலிருந்து 114.77 சென்டுக்குள் இருக்கும்'. மேற்கூறப்பட்ட முடிவு மெய்யாகவோ அன்றித் தவறாகவோ இருக்கலாம். ஆனால், இத்தகைய செயல்முறைகளினால் கிடைத்த முடிவுகள் பலவற்றில் 95 சதவிகிதம் மெய்யாகவும், 5 சதவிகிதம் தவறாகவும் இருக்கும்.

0.99 என்ற நிகழ்திறக் கெழுவின் அடிப்படையில் நாம் வேலைசெய்ய எண்ணினால், நம்பக இடைவெளியின் கீழ்வரம்பாக மாதிரிச் சராசரிக்கு 2.576 s_m தொலைவிலுள்ள புள்ளியையும், மேல்வரம்பாக 2.576 s_m தொலைவில் மாதிரிச் சராசரிக்கு மேலுள்ள புள்ளியையும் எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். இப்போது நமது முடிவு ' 1946 ஜனவரியில் இரசாயனத் தொழிற்சாலைத் தொழிலாளர்களது முழுமைத் தொகுதியின் மணி ஊதிய சராசரி 114.40 சென்டிலிருந்து 114.82 சென்டுக்குள் இருக்கும்.'

இங்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட மாதிரிகளைப்போன்ற பெரிய மாதிரிகளுக்கு நம்பக இடைவெளிகள் குறுகியதாக இருக்கும். இந்த அளவு மாதிரிகளின் சராசரிகள் மிகவும் செறிவாக அமைந்திருக்கும். இதன் விளைவாகத் திருத்தமான மதிப்பீடு செய்தல் இயலும்.

மாதிரியிலிருந்து பெறப்பட்ட அளவையை முழுமைத் தொகுதியின் அளவைக்கு மதிப்பீடாகத் தரும்பொழுது, இதனை அறுதியிட்டு

போதோ, அல்லது s_mஐப் பெறும்போதோ, Nன் மதிப்பை 1ஆல் குறைக்கவேண்டும். (இங்கு எடுத்துக்கொண்டதுபோன்ற பெரிய மாதிரிகளில் N-ஐ 1ஆல் குறைப்பது சிறப்பாக வழக்குக்காகவே; அதனால் முடிவு ஒன்றும் பாதிக்கப்படப்போவதில்லை.) மூல விவரங்களில் கண்ட dகளிலிருந்து s_mஐப் பெற்றால், பெஸ்ஸல் வாய்பாடு (Bessel's formula) என்பதைப் பயன்படுத்தி முடிவைத் தொகுத்துக் கூறலாம்.

$$s_m = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N(N-1)}}$$

முடிவாகக் கூறுவதற்குப் பதிலாக மாதிரி [redacted] தரப்பிழையையும் சேர்த்துத் தருவதே வழக்கம். எனவே, இரசாயனத் தொழிற்சாலைத் தொழிலாளர்களது மணி ஊதியமாக மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட சராசரியை $M = 114.61 \pm 0.08$ சென்டு என எழுதுவோம். இந்த அளவையினைப் பயன்படுத்துபவர், அவருக்கு எந்த நிகழ்வுக் கெழு விருப்பமாக இருக்கிறதோ, அதற்கேற்ப நம்பக இடைவெளியினை அமைத்துக்கொள்வர். முன்னர் இதுபோன்று எழுதும்போது மாதிரி அளவையின் நிகழ்திறப் பிழையினைத் (0.6745 பங்கு தரப் பிழைக்கு இது சமம்) தருவது வழக்கத்திலிருந்தது; இப்போது தரப் பிழை பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. எனினும், தரப்பிழையைத் தான் பயன்படுத்துகிறோம் என்று தெளிவாகக் குறிப்பிட்டுவிடுவது குழப்பத்தைத் தவிர்க்கும்.

மாதிரிகளிலிருந்து பெறுகின்ற செய்திகளைக்கொண்டு முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிகளுக்கு நம்பக இடைவெளிகளை அமைக்கும் போது மூன்று முக்கியமான உண்மைகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்— அதாவது, $\bar{X}$-களின் மாதிரிப் பரவல் இயல்நிலை வகையைச் சேர்ந்தது அல்லது இயல்நிலை வகைக்கு ஒட்டியது. சராசரிகளின் மாதிரிப் பரவலின் தரவிலக்கத்தை முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கத்தைக் கொண்டும், மாதிரியின் அளவான Nஐக் கொண்டும் தீர்மானிக்கலாம். மாதிரி பெரிதாக இருக்கும்பொழுது, மாதிரியின் தரவிலக்கத்தைக் கொண்டு முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கத்தை நம்பகமாக மதிப்பீடு செய்யலாம். சராசரியின் தரப்பிழையைக் கண்டுபிடிப்பதற்குக் கையாளப்படும் முறைக்கு ஓரளவு ஒத்த முறையைக் கையாண்டு, மற்றப் புள்ளிவிவர அளவைகளின் தரப்பிழைகளையும் கண்டுபிடிக்கலாம். பொதுவான சூழ்நிலைகளில், மாதிரி மொமென்டுகளிலிருந்து கண்டுபிடிக்கப்பட்ட மாதிரி அளவைகளின் பகிர்வுகள் n எண்ணிலியை நெருங்கும்போது, இயல்நிலை வகையினை நெருங்கும்.[10] சராசரியில் செய்ததுபோலவே அத்தகைய மாதிரிப் பரவல்களின் தரவிலக்கத்தையும், முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளாலும், மாதிரி Nஆலும் வரையறை செய்யலாம். தெரியாத முழுமைத்தொகுதியின் அளவைக்

[10] இந்த உள்மைய எல்லைத் தேற்றம் (central limit theorem) முக்கியமானதொரு கணிதக் கண்டுபிடிப்பு; கருதுகோள் புள்ளியியலின் அடிப்படையான கோட்பாடுகளில் இது ஒன்றாகும். இத் தேற்றமாவது: முற்றிலும் பொதுவான சூழ்நிலைகளில், பல சார்பிலா இயைபிலா மாறிகளின் கூடுதல், n எண்ணிலியாகும்போது, இயல்நிலைப் பரவல் அமைப்பை அணுகும். இந்தத் தேற்றத்தின் குறிப்பிடத்தக்க பொதுத் தன்மை, கூடுதலின் தனிப்பட்ட உறுப்புகள் அவற்றுக்குள்ளே இயல்நிலையாகப் பரவியிருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை என்பதாகும். இந்தத் தேற்றத்தில் கூறப்பட்ட குறிப்பிடத்தக்க உண்மையிலிருந்து, புள்ளியியல் கோட்பாடுகளில் இயல்நிலைப் பரவலின் அடிப்படைச் செயல்முறைகள் தோன்றின. இத் தேற்றத்தின் நிரூபணத்திற்கும், புள்ளியியலில் இதன் பங்குபற்றிய விளக்கத்திற்கும் பின்வருவனவற்றைக் காண்க: கிராமர், து. நூ. ப. 23, பக்கங்கள் 198-203, 213-220; கெண்டால் து. நூ. ப. 78, தொகுதி 1, பக்கங்கள் 180-183,

குப் பதிலாக அதற்கொத்த மாதிரி அளவையினை (முந்திய எடுத்துக் காட்டில் கண்டதுபோல முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கத்திற் குப் பதிலாக மாதிரியின் தரவிலக்கத்தை) தோராய மதிப்பாகத் தந்து, இந்த அளவைகளின் தரப்பிழையைக் காணமுடியும். எனவே, பெரும் எண்களின் போக்கினைக்கொண்டு மாதிரிகளின் மூலம் கிடைக்கின்ற செய்தியினைக்கொண்டே அந்த மாதிரிகளின் மூல மாகக் கிடைக்கும் முடிவுகளைப் பொதுமையானவையாக்கலாம்.[11]

வரம்புடைய (finite) ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் மாதிரிகள்: முந்திய செயல்முறைகளில் கையாளப்பட்ட மாதிரிகள் யாவும் வரம்பில்லாத முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்டன. புள்ளிவிவர உய்த்துணர்வுகளில் பெரும்பாலும் மேற்கொள்ளப்படும் புனைவு இது. மாதிரிகள் பிரித்தெடுக்கப்படும் முழுமைத் தொகுதி அளவில் சிறியதாக இருப்பினுங்கூட, இந்த முழுமைத் தொகுதியினை ஏற்படுத்திய சக்திகள் தன்மை மாருது வரம்பில்லாது இயங்கு மானுல், கிடைக்கக்கூடிய வரம்பிலா முழுமைத் தொகுதிக்கும் முடிவுகள் பொருந்தும் எனக் கொள்கிருேம். ஆனுல், சில வேளைகளில், தெரிந்த அளவுடைய, வரம்புடைய முழுமைத் தொகுதியில் வேலை செய்ய ஆய்வாளர் விரும்புகிருர். அத்தகைய முழுமைத் தொகுதி யிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்படும் மாதிரியின் தரப்பிழையைக் காண, வழக்கமாகக் கையாளப்படும் வாய்பாட்டில் சிறு மாறுதல் செய்து, அதன்மூலம் மதிப்பிடலாம். N என்பது மாதிரியில் அடங்கும் குறிப்புகளையும், N_p என்பது முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள மொத்தக் குறிப்புகளையும் குறிக்குமானுல்,

$$s_m = \frac{s'}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p}} \qquad (7.3)$$

என்று எழுதலாம். சராசரியின் மாதிரிப் பிழையினைக் குறைப்பதே இந்தத் திருத்தத்தின் நோக்கம். N_p என்பது Nஐவிட மிகப் பெரிதாக இருக்குமானுல், பிழையின் திருத்தம் மிகக் குறைவே. அதாவது, அத்தகைய சமயத்தில் வரம்பில்லாத முழுமைத் தொகுதியி லிருந்து பிரித்தெடுப்பதுபோலவே இருக்கும். மாதிரியில் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு குறிப்பும் அடங்குமானுல், N_p-யும் N-ம் சமமாக இருக்கும். சராசரியின் தரப்பிழை சுழி ஆக இருக்கும்.

[11] இங்கே விவரிக்கப்பட்ட செயல்முறைகளைப் பெரிய மாதிரிகளுக்கே பயன்படுத்தலாம். பெரும்பாலும் 100 உருப்படிகள்கொண்ட மாதிரியைப் 'பெரிய' மாதிரி என்று கருதலாம், 30-க்கும் குறைவாக N மதிப்பையுடைய மாதிரிகள் 'சிறிய' மாதிரிகள் எனக் கருதப்படும். (கீழே, சிறிய மாதிரிகளுக்குப் பொருத்தமான தனிப்பட்ட செயல்முறைகள் விவாதிக்கப்பட்டுள்ளன.)

தரவிலக்கம்

$\bar{X}$-க்கு எடுத்துக்கொண்டதுபோலவே தரவிலக்கமான sஐயும் இயைபிலா மாறியாகக் கருதுவோமானுல், இயல்நிலை வகைக்கு ஒட்டிய பரவல் கிடைக்கும். (சிறிய மாதிரிகளில் இயல்நிலை வகையிலிருந்து மிகுந்த வேறுபாடு இருக்குமாதலால், அவற்றைத் தனிமுறையில் ஆராயவேண்டியது அவசியம் என்பதைப் பின்னர் காண்போம்.) பெரிய மாதிரிகளை — அதாவது, 100-க்கு மேற்பட்ட மதிப்பு N-க்கு இருக்கும்போது—இயல்நிலைப் பரவலுடைய மாறியாகவே கருதலாம். முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலையாக இருக்கும்பொழுது, s பரவலின் தரவிலக்கம்,

$$\sigma_s = \sigma/\sqrt{2N} \tag{7.4}$$

என்பதனுல் கிடைக்கும். முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கம் தெரியாத நிலையில், σ-வுக்குப் பதிலாக மாதிரி s-மதிப்பைப் பயன் படுத்துவோம். (பெரிய மாதிரிகளைக் கையாளும்போது s-க்கும் s'-க்கும் நாம் வேறுபாடு கற்பிப்பதில்லை). அதனுல்,

$$s_s = s/\sqrt{2N} \tag{7.5}$$

இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி ஒன்றிலிருந்து தரவிலக்கத்தினை மதிப்பீடு செய்யும் செயல்முறையை விளக்கிக் காட்டுவதற்கு, உறைவிடத் தொலைபேசிச் சந்தாதாரர்களைப் பற்றிய (6-3 பட்டியலைப் பார்க்கவும்) விவரத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். $s = 147.7$ என்பதை σ-வின் மதிப்பீடாகக் கொள்கிருேம்; $N = 995$. எனவே,

$$s_s = \frac{147.7}{\sqrt{1,990}} = 3.31$$

என்று கிடைக்கிறது. 0.99 என்ற நம்பக இடைவெளியைக்கொண்டு வேலைசெய்ய விரும்புவோமானுல் 147.7-லிருந்து 2.576×3.31 அல்லது 8.5ஐக் குறைத்தோ கூட்டியோ நம்பக எல்லைகளை அமைக்கிருேம். எனவே, பின்வரும் முடிவினைச் செய்கிருேம். 'உறைவிடத் தொலைபேசிச் சந்தாதாரர்களது முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கம் 139.2-லிருந்து 156.2-க்குள் அமைகிறது'. மேற் கூறிய கூற்று உண்மை என்பது 0.99 நம்பகக் கெழுவினுல் அளக்கப்பட்டது.

இயல்நிலை அல்லாத முழுமைத் தொகுதியினின்று பிரிக்கப்பட்ட மாதிரிகளின் s பரவலின் தரவிலக்கம்,

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{4\mu_2 \cdot N}} \tag{7.6}$$

என்பதனுல் கிடைக்கிறது. இதில் μ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் மொமென்டுகளைக் குறிக்கிறது. m_2 என்பது மாதிரியின் இரண்டா

வது மொமென்டையும், m_4 என்பது மாதிரியின் நான்காவது மொமென்டையும் குறிப்பதாக நாம் கொண்டால், இயல்நிலை அல்லாத முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரிக்குத் தர விலக்கமான s-ன் மதிப்பீடாக

$$s_s = \sqrt{\frac{m_4 - m_2^2}{4m_2 \, . N}} \qquad (7.7)$$

எனக் கிடைக்கும். இந்த வாய்பாட்டினைக் கையாளும் முறையும், முடிவுகள் செய்யும் முறையும் வழக்கமானதே. பெரிய மாதிரிகளில் n-ன் மதிப்பு எண்ணிலியாகும்போது s-ன் பரவல் இயல்நிலை வகையாவதால், இதனை இயல்நிலைப் பரவல் தரவிலக்கத்தின் மதிப்பீடாகவும் கொள்ளலாம். σ_s-க்கு உள்ள பொதுவான வாய்பாடு, இயல்நிலை வகைப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளுக்கு $\frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$ என்ற எளிய வாய்பாடாக ஆகிறது. ஏனெனில், இயல்நிலைப் பரவலில் $\mu_4 = 3\,\mu_2^2$.

மதிப்பளவைகள் (Quantiles)

பரவலின் மொத்த அலைவுகளைக் குறிப்பிட்ட விகிதங்களில் பிரிக்கும் அளவைகளான இடைநிலை, கால்மானங்கள், பதின்மங்கள் ஆகியவற்றிற்குப் பொதுச் சொல்லாக மதிப்பளவை என்ற சொல்லைப் பயன்படுத்துகிறோம். ஒவ்வொரு மாதிரி மதிப்பளவைகளும் அதற்கொத்த முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்பளவைகளுக்கு மதிப்பீடாகக் கருதமுடியுமாதலால், அத்தகைய அளவுகளை ஆய்வுகளில் பயன்படுத்தி முடிவுகளைச் செய்யும்போது, வழக்கமான உய்த்துணர்வுச் சிக்கல்கள் எழுகின்றன. மாதிரியின் எண்ணிக்கையான Nஅதிகரிக்கும்போது, எல்லா மதிப்பளவைகளின் மாதிரிப் பரவல்களும் இயல்நிலை வகையினை நெருங்கும். எனவே, பெரிய மாதிரிகளில், அத்தகைய மாதிரிப் பரவல்கள் இயல்நிலையாக இருப்பதாகவே கருதுகிறோம். கொடுக்கப்பட்ட மாதிரி மதிப்பளவைகளின் மாதிரிப் பரவலின் சராசரிகள், அவற்றுக்கிசைந்த முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்பளவைகளுக்குச் சமமாக இருப்பதாகக் கருதுகிறோம். இத்தகைய வேறுபட்ட மதிப்பளவைகளுக்கு அமைக்கும் மாதிரிப் பரவல்களின் தரவிலக்கங்கள் (அதாவது, மதிப்பளவைகளின் தரப்பிழை) ஒன்றுக்கொன்று வேறுபடுமென்பது எதிர்பார்க்கப்பட்டதே. மேற்கூறியவற்றிலிருந்து, இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து பிரிக்கப்பட்ட மாதிரிகளின் பலவகை மதிப்பளவைகளின் தரப்பிழைகளை அறியலாம். இயல்நிலையில்லாது— ஆனால் மிகவும் கோட்டமடையாத முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்படும் மாதிரிகளின் மதிப்பளவைகளின் தரப்பிழைகளுக்கு—மாதிரி பெரிதாக இருக்கும்போது

கீழே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள அளவைகள் ஏறத்தாழ சரியான மதிப்பு களைத் தருகின்றன :

மதிப்பளவை	தரப்பிழை
இடைநிலை	$\sigma_{md} = 1.2533\sigma/\sqrt{N}$
முதல் கால்மானம்	$\sigma_{q1} = 1.3626\sigma/\sqrt{N}$ (σ_{q3}க்கும் இதே அளவு)
முதல் பதின்மானம்	$\sigma_{d1} = 1.7094\sigma/\sqrt{N}$ (σ_{d9}க்கும் இதே அளவு)
இரண்டாம் பதின்மானம்	$\sigma_{d2} = 1.4288\sigma/\sqrt{N}$ (σ_{d8}க்கும் இதே அளவு)
மூன்றும் பதின்மானம்	$\sigma_{d3} = 1.3180\sigma/\sqrt{N}$ (σ_{d7}க்கும் இதே அளவு)
நான்காம் பதின்மானம்	$\sigma_{d4} = 1.2680\sigma/\sqrt{N}$ (σ_{d6}க்கும் இதே அளவு)

இந்த வாய்பாடு ஒவ்வொன்றிலும் σ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் தரப்பிழையைக் குறிக்கிறது. இது தெரியாதபோது, மாதிரி s (அல்லது s') இங்கே பதியப்பட்டுத் தரப்பிழையின் குறியீட்டில் ஏற்ற மாறுதல் செய்யப்படும்.

இடைவெளியின் மாதிரிப் பிழை, அதே அளவு பெரிதான மாதிரியிலிருந்து பெற்ற சராசரியின் மாதிரிப் பிழையைவிட 25 சதவிகிதம் கூடுதலாக இருப்பதைக் கவனிக்கவும். இடைநிலையைவிட சராசரி பொதுவாக நிலைத்த அளவையாக இருக்கும். [முகட்டு மதிப்புக்கு அண்மையில் ஒரு பரவலின் குறிப்புகள் குவிந்திருக்குமானுல்—அதாவது, கூரிய சிகரத்தை உடைய பரவலாக இருக்குமானுல், இடைநிலையின் நிலைத்த தன்மை (stability) அதிகமாகும்.] x மதிப்புகளின் அளவுத் திட்டத்தில் நடுவிலுள்ள மதிப்பளவை வீச்சின் எல்லைப் புறங்களிலுள்ள மதிப்பளவைகளைவிடக் குறைந்த அளவு மாதிரிப் பிழையினைக்கொண்டிருக்கும்.

வீதத்தின் தரப்பிழை

ஈருறுப்புப் பரவலினை (ஆருவது அதிகாரத்தில்) ஆராய்ந்தபோது, ஒரு பரவலின் ஒப்பீட்டு அலைவுகளின் தர விலக்கம் $\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$ என்பதனுல் கிடைக்கும் எனக் கண்டோம். ஒப்பீட்டு அலைவுகளாகவும், அலைவு வீதங்களாகவும்—வீதமாக (எடுத்துக்காட்டு 8/12) அல்லது

சதவீதமாக—அமைப்புடைய முடிவுகளைப் பொதுமைப்படுத்த இது மிகவும் பயனுகும். n நிகழ்ச்சிகளில் 'வெற்றிபெற்ற' நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையை f_s என்ற எண்ணுல் குறிப்போமானுல், ஒப்பீட்டு அலைவு அல்லது வெற்றியின் வீதம் $\frac{f_s}{n}$ ஆக இருக்கும்; தோல்வியின் வீதம் $\frac{n-f_s}{n}$ ஆக இருக்கும். $\frac{f_s}{n}$ என்பது மேல்குறிப்பிட்ட பொது வாய்பாட்டில் p-க்குச் சமமாகவும், $\frac{n-f_s}{n}$ என்பது q-க்குச் சமமாகவும் இருப்பதால், $\frac{f_s}{n}$ என்ற வீதத்தின் தரப்பிழையை

$$s_p = \sqrt{\frac{\frac{f_s}{n} \cdot \frac{n-f_s}{n}}{n}} \qquad (7.8)$$

என்று எழுதலாம். இது,

$$s_p = \sqrt{\frac{f_s(n-f_s)}{n^3}} \qquad (7.9)$$

என்று சுருக்கமடையும். இதுபோல f_s/n ஐ இயைபிலா மாறியாகக் கருதலாம்; இது (7.9) வாய்பாட்டின்மூலம் கிடைக்கும் தரவிலக்கத்தோடு இயல்நிலை வகையில் அமைந்தது. இம் முறையினுல் திருத்தமான மதிப்புகள் கிடைக்கவேண்டுமானுல், n சிறியதாக இருக்கக் கூடாது; அதோடு p-ம் q-ம் மிகச் சிறியதாக இருக்கக்கூடாது.

ஒரு சமுதாயத்தில் நடத்தப்பட்ட மாதிரித் தேர்வில் கிடைக்கும் முடிவுகளைப் புனைந்துகொண்டு, இந்தச் செயல்முறையை விளக்கிக் காட்டுவோம். மொத்த வாக்காளர்களான 400 பேரில், A என்ற வேட்பாளரை 320 பேர் ஆதரிக்கிறுர்கள்; B என்ற வேட்பாளரை 80 பேர் ஆதரிக்கிறுர்கள். Aஐ ஆதரிக்கும் மொத்த வாக்காளர்களின் விகிதம் எப்படியிருக்கும் என்று மதிப்பிட வேண்டும். p எனும் மாதிரி வெற்றி வீதம் 320/400 அல்லது 0.80 ஆக இருக்கும். இந்த வீதத்தின் தரப்பிழை

$$s_p = \sqrt{\frac{320(400-320)}{400^3}}$$

$$= \frac{16}{800} = 0.02$$

ஆகும். வீதத்தையும் அதன் தரப்பிழையையும் பின்வருமாறு அமைத்துக் காட்டலாம் :

$$f_s/n = 0{\cdot}80 \pm 0{\cdot}02$$

0.95 என்பதை நிகழ்திறக் கெழுவாகக்கொண்டு முடிவினைப் பொதுமையான தாக்கும்பொழுது, தேவைப்படும் நம்பக இடைவெளியின் எல்லைகள் கொடுக்கப்பட்ட விதமான 0.80-க்கு மேலும் கீழும் 1.96 s_p தொலைவில் அமையும். 1.96 s_p என்ற பெருக்கல் தொகை 0.0392. இதனை 0.04 என்று திருத்தமாகக் கூறலாம். பின்னர் ' A என்ற வேட்பாளரை ஆதரிக்கும் வாக்காளர்களின் வீதம் 0.76-க்கும் 0.84-க்கும் இடையில் அமையும் ' எனக் கூறலாம். கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்திறக் கெழுவின் பயனாகக் கிடைக்கும் நம்பகத்தோடு இந்த முடிவுக்கு வருகிறோம்.

கூட்டுச் சராசரிகள்போலவே, வீதத்தின் தரப்பிழைகளும் n-ன் வர்க்கமூலத்தின் தலைமாற்று, பெரு மாதிரிகளில் இருப்பது போலவே மதிப்பிற்கேற்ப வேறுபடும். எனவே, 100 குறிப்புகளை மேற்கூறிய வாக்கெடுப்பில் ஆராய்ந்திருப்போமானால், வீதத்தைக் கருதி

$$s_p = \sqrt{\frac{80(100 - 80)}{100^3}}$$

$$= 0.04$$

என்று கூறலாம். முன்னர் கூறிய எடுத்துக்காட்டில் n-ன் மதிப்பு இரண்டாவது எடுத்துக்காட்டைவிட நான்கு மடங்கு பெரியதாக இருந்தது. எனவே, முதல் எடுத்துக்காட்டில் தரப்பிழை இரண்டாவதைவிட அரைமடங்கு பெரியதாக இருக்கும். அலைவு விகிதங்களையும், வீதங்களையும் பயன்படுத்தி வேலைசெய்வதைவிட, சதவீதங்களைப் பயன்படுத்தி வேலைசெய்வது எளிது. இதனைச் செய்யும்போது (7.8)-ல் கிடைத்த சமன்பாட்டைச் சிறிது மாற்றியமைத்து, சதவீதத்தின் தரப்பிழையைக் கணக்கிடலாம். எனவே, $P_e = 100(f_s/n)$என்று எடுத்துக்கொண்டு, $100 - P_e = 100(n - f_s)/n$ எனவும் கொண்டால், (7.8) என்ற சமன்பாடு,

$$s_{pe} = \sqrt{\frac{P_e(100 - P_e)}{n}} \qquad (7.10)$$

என ஆகிறது; முதலில் கூறிய எடுத்துக்காட்டில் $P_e = 100 \times \frac{320}{400} = 80$. எனவே, P_e என்பதன் தரப்பிழை,

$$s_{pe} = \sqrt{\frac{80 \times (100 - 80)}{400}} = 2$$

17

என்று இருக்கவேண்டும். அதனால் முடிவினைப் பின்வருமாறு தர வேண்டும்:

$$P_e = 80 \pm 2$$

மாதிரிப் பிழைகளும் சிறப்பு எண்களும்: சிறப்புடையது எனப் பதிவு செய்யப்படவேண்டிய எண்களின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு எனத் தீர்மானிப்பதற்கு, மாதிரிப் பிழைகளின் அளவைகள் அவசியமே. டிருமென் எல். கெல்லி (Truman L. Kelley) என்பவர் நிறுவிய மிகவும் பயனுள்ள பொதுவிதி இதுதான். முடிவாகப் பதிப்பிக்கும் மாறிலியில், தரப்பிழையின் மூன்றில் ஒரு பங்கின் முதல் சிறப்பு ஸ்தான இடத்துக்குமேல் வேறொன்றையும் கொள்ளக்கூடாது; மற்றக் கணிப்புகளில் இன்னும் இரண்டு ஸ்தானங்களை எடுத்துக் கொள்ளலாம். (5-2 பட்டியலில் கண்ட) 83,114 இரசாயனத் தொழிலாளர்களது மணி ஊதியம்பற்றிய புள்ளிவிவரங்களைப் பயன்படுத்தி இந்தச் செயல்முறையை விளக்குவோம். நான்கு இலக்கங்களுக்குத் திருத்தமாக சராசரி 114.6138 சென்டு. மாதிரியின் தரப்பிழை .082 சென்டு; இதில் மூன்றில் ஒரு பங்கு .0273. இதில் முதல் சிறப்பு இலக்கம் 100ஆவது பத்தியிலுள்ளது. எனவே, கூட்டுச் சராசரி 114.61 சென்ட்டுகளாகும். மற்றக் கணிப்புகளுக்கு இன்னும் இரண்டு இலக்கங்களை எடுத்துக்கொண்டு, அதாவது மொத்தத்தில் நான்கு இலக்கங்களுக்குத் திருத்தமாகக் கூறலாம்.

மாதிரிப் பிழைகளின் அளவைகளுக்குச் சில குறைபாடுகள்

மேலே விவரிக்கப்பட்ட அளவைகளின் சிறப்புகள் பல. இவற்றின் துணைகொண்டு கண்டறிந்த குறிப்புகளின்மூலம் புள்ளியியல் முடிவுகளை விரிவுபடுத்துகையில் ஏற்படும் பிழைகளின் அளவினை உணர்ந்து முடிவுகளுக்குத் திருத்தம் தரமுடிகிறது; என்றாலும், புள்ளியியல் சோதனைகளை இயந்திர ரீதியில் மேற்கொண்டு அவைகளுக்கும் சில குறைபாடுகள் உண்டு என்பதை மறந்துவிடலாகாது.

மாதிரிகளின் எண்ணிக்கையினால் ஏற்படும் குறைபாடுகள்பற்றி முன்னர் குறிப்பிடப்பட்டது. புள்ளிவிவர ஆய்வாளர்கள் பயன்படுத்தும் மாதிரிப் பரவல்களில் பல, n அதிகமாகும்போது இயல்நிலை வகையினை அணுகுகின்ற தன்மையில் அமைந்தன என்ற முக்கிய உண்மையை நாம் கவனித்தோம். இப்படி இருக்கையில், பெரிய மாதிரிகளில் பொருத்தமுடையனவாக இருக்கும் செயல்முறைகள், சிறிய மாதிரிகளில் ஏற்புடையன ஆகா. கிரேமர் (Cramer) சொல்வது போல வரம்பில் பொருந்திவருகின்ற கூற்றுகள், சிறிய மாதிரிகளை நாம் பயன்படுத்தும்போது, சில சமயங்களில் மிகவும் பற்றாக்குறை

உடையனவாக இருக்கின்றன.[12] இத்தகைய சமயங்களில் மாதிரிப் பரவல்களின் சரியான வடிவைப்பற்றி நாம் அறியவேண்டியதாகிறது. எனினும், திருத்தமான (exact) மாதிரிப் பரவல்களைப்பற்றிய அறிவு மிகவும் குறைபாடுடையது. பொதுவான நிலைகளுக்காக, $\bar{X}$ என்ற சராசரியின் திருத்தமான பரவல் வரையறை செய்யப்பட்டிருக்கிறது. இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரிகளின் தன்மைகளை விளக்கும் மற்றப் புள்ளியியல் அளவைகளின் பரவல்கள் முறையாக ஆய்வு செய்யப்பட்டு, சில பொதுவாகப் பொருந்துகின்ற கருத்துகள் பெறப்படுகின்றன. இயல்நிலை அல்லாத பிற வகையான முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெற்ற அளவைகளில் சராசரியைத் தவிர பிறவற்றிற்குத் திருத்தமான பரவல்களைப்பற்றிய அறிவு குறைபாடுடையது. நல்லவேளையாக நாம் கையாளும் புள்ளிவிவரங்கள் பலவற்றில் n அதிகமாகும்போது இயல்நிலை வகை அமைப்பை அடைவதால், நாம் பிரித்தெடுக்கும் மாதிரி பெரிதாக இருக்குமானல், உயர்ந்த அளவு நம்பகத்தோடு பொதுமையாக்கிய முடிவுகளைச் செய்யமுடிகிறது. இதனல் இந்த அத்தியாயத்தில் கூறப்பட்ட முடிவுகளைச் செய்வதில் எச்சரிக்கை தேவை. அத்துடன் சில சிறிய மாதிரி அளவைகளுக்கும் திருத்தமான பரவல்கள் வரையறை செய்யப்பட்டிருக்கின்றன. அவற்றை நடைமுறையில் பயன்படுத்துவதாக முறைகள் காணப்பட்டிருக்கின்றன. இவற்றை அடுத்த அதிகாரத்தில் காண்போம்.

இந்த அத்தியாயத்தில் விவாதிக்கப்பட்ட மாதிரிப் பிழைகளைப் பெறுவதற்கும் பயன்படுத்துவதற்கும், மாதிரிகளின் தன்மையைப் பற்றியும், இந்த மாதிரிகளைப் பிரித்தெடுக்கும் முறைகளைப்பற்றியும் சில புனைவுகளை மேற்கொள்கிறோம். மாதிரிகள் இயைபிலாதன (random) என்பது அடிப்படையாக ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டது. இத்தகைய இயைபிலா மாதிரிகளைக்கொண்டு பொதுமையான முடிவுகளைப் பெறும்போதுதான் நிகழ்திற முறையின் கருத்தினை வெளியிடுகிறோம். (முதல் அதிகாரத்தில் இயைபிலாத் தன்மையைப் பெறுவது எப்படி என்று கூறப்பட்டது. இதனை 19ஆம் அதிகாரத்தில் விரிவாகக் காண்போம்.) தனிப்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் (மாதிரிக் கூறுகளைப் பிரித்தெடுத்தல் அல்லது தேர்ந்தெடுத்தல்) ஒன்றுக்கொன்று சார்பில்லாதபோதும், இந்த முழுமைத் தொகுதியின் குறிப்புகள் ஒவ்

[12] கிரேமர், து. நூ. ப. 23, 378-9 பக்கங்களில், இத்துறையில் நமது அறிவு எத்துணைக் குறைபாடுடையது என்பதுபற்றிய பொது விளக்கம் காண்க.

பொதுவாக N, 30-க்குக் குறைவாக இருக்கும்போது மாதிரியைச் சிறிதாகவும், 100-க்கும் பெரிதாக இருக்கும்போது மாதிரியைப் பெரிதாகவும் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும் என்று முன்னரே குறிப்பிட்டோம். ஆனல், சில தனிப்பட்ட சூழ்நிலைகளில் (எடுத்துக்காட்டுகளுக்கு உடன்தொடர்புபற்றிய 9ஆம் அத்தியாயம் காண்க) 100 குறிப்புகள்கொண்ட மாதிரிகூடப் பெரிதாகக் கருதப்படுவதில்லை.

வொன்றும் மாதிரியில் இடம்பெறுவதற்கான நிகழ்திறம் தெரியும் போதும், மாதிரி இயைபிலாதவாறு பிரித்தெடுக்கப்பட்டது என்கிறோம். அந்த நிகழ்ச்சிகள் (இந்தத் தேர்வுகள்) ஒன்றுக் கொன்று சார்பில்லாமலும், முழுமைத் தொகுதியின் எல்லாக் குறிப்பு களும் இந்த மாதிரியில் இடம்பெறுவதற்கான நிகழ்திறம் சமமாகவும் இருக்கும்பொழுது, எளிய இயைபிலா மாதிரிக்கான (simple random sampling) நிபந்தனைகளைப் பெற்றிருக்கிறோம். வரையறையுடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரிகளைப் பிரித்தெடுக்கும்போது, பிரித்தெடுத்த ஒவ்வொன்றையும் அடுத்தமுறை பிரிப்பதற்குள் திருப்பி வைத்துவிட வேண்டும் என்பதே ஒன்றுக்கொன்று சார்பிலாத நிகழ்ச்சிகள் என்று கூறுவதன் உண்மையான விளக்கமாகும். ஆனால், முழுமைத் தொகுதி பெரிதாக இருக்கையில், திருப்பிவைக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.) இந்த அதிகாரத்திலும் அடுத்த அதி காரத்திலும் விவரிக்கப்பட்டுள்ள தரப்பிழைகளின் வெவ்வேறு அளவைகளும் எளிய இயைபிலா மாதிரிச் சூழ்நிலை இருக்கும்போது பயன்படுத்தப்படுவன.[13]

கொடுக்கப்பட்ட சமயத்தில் மாதிரிகள் எந்த அளவுக்கு இயை பிலாச் சூழ்நிலையில் அமையவேண்டும் என்பதனை ஓர் அளவுக்குத் திட்டமிட்டுக் கட்டுப்படுத்த முடியும். நடைமுறை ஆய்வுகளில் இத்தகைய சூழ்நிலைகளைப் பெரும் அளவுக்கு உருவாக்குவதற்கு விரிவான முறைகள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளன. குறிப்பாக, மாதிரி களின் இயைபிலாத் தன்மைகளை உறுதிப்படுத்தப் பெருமளவிலும், தனிப்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றுக்கொன்று சார்பிலாது அமைவதைத் தீர்மானிக்க ஓரளவும் கட்டுப்பாடுகள் செய்யமுடியும். சமுதாயப் பொருளாதார புள்ளிவிவரங்களைக் கையாளும்போது, இந்தச் சூழ் நிலைகளை முற்றிலும் உருவாக்குவது என்பது நடக்காத காரியம். இயைபிலா முறையினாலன்றிப் பிற காரணங்களால் அடுத்தடுத்துத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளில் ஏற்ற இறக்கங்களினால் ஏற்படும் பிழைகளை நாம் இந்த அதிகாரத்தில் விவாதிக்கவே தரப்பிழை முறைகள் சுட்டிக்காட்டப்பட்டன என்பதனை வலியுறுத்துகிறோம். மாதிரிகள் இடம்பெறுமையால் தோன்றும் சார்பெண்ணங்களாலும் குறைபாடுகளாலும் ஏற்படும் ஏற்றத்தாழ்வுகள் புள்ளியியல் அனு மானங்களை நம்புவதை அளவிடும் முறையினின்றும் தப்பி விடுகின்றன. இத்தகைய பிறழ்ச்சியைக் குறைப்பதும், குறை

[13] 19ஆம் அத்தியாயத்தில் எளிய இயைபிலா மாதிரி முறையில் மாதிரி வடிவம் (sample design) குறித்து மற்றும் ஒரு புதிய, ஆனால் தொடர்புடைய நிபந்தனையை உருவாக்குவோம். n உறுப்புகள்கொண்ட மாதிரியை எளிய இயைபிலா மாதிரியாகக் கருதவேண்டுமானால், முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள n உறுப்புகள்கொண்ட தொகுப்பு ஒவ்வொன்றும் மாதிரியாகத் தேர்ந்தெடுக்க சமவாய்ப்புடையதாய் தேர்வு நிபந்தனைகள் இருக்கவேண்டும்,

பாடுகளை நீக்குவதும் குறித்து மாருத அக்கறை காட்டவேண்டியது புள்ளிவிவர ஆய்வாளர் கடமை. குறிப்பாகப் பொருளாதார இயலிலும், பொதுவாக சமூக இயலிலும் புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு களைச் செய்வதற்குக் காலம் என்ற காரணக் கூறு முட்டுக்கட்டையாக இருக்கிறது. சமயத்தில் எடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் மற்றச் சமயங் களில் வேறுபட்டு நிற்கும் ஒரு காலத்தொடரில் உருவான முழு மைத் தொகுதியில் ஏற்படும். இரும்புக் கனி உற்பத்தி, பாங்குத் தொழில், வெளிநாட்டு வாணிகம், வருமானப் பரவல் ஆகிய வற்றுள் நிலவும் சூழ்நிலைகள் ஆண்டுக்கு ஆண்டு, மாதத்திற்கு மாதம் மாறுபடுகின்றன. வெவ்வேறு காலங்களைச் சார்ந்த விவரங்கள் ஒரே வகையான காரணக் கூறுகளால் விளைந்தன என்று கூறுவதற் கில்லை. ஆஸ்கார் ஆண்டர்ஸன் (Oskar Anderson) சுட்டிக்காட்டி யுள்ளதுபோல, பல சமயங்களில் எடுக்கப்படும் விவரங்களை வேறு பட்ட முழுமைத தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட விவரங் களாகவே கருதவேண்டும். இடையீடில்லாத, தொடர்ந்து மாறிக் கொண்டே செல்வதன் விளைவே பொருளாதார அமைப்புகளின் அடிப்படைக் கட்டுக்கோப்பாகும். எனவே, பல சமயங்களில், எடுக்கப் பட்ட முழுமைத் தொகுதிகள் யாவும் ஒரே தன்மையனவாக இரா குறிப்பாகக் கண்டறியாத காலத்தினைக் குறித்து நாம் புள்ளிவிவர உய்த்துணர்வுகளைச் செய்வதற்குப் பல தடைகள் விளைகின்றன.

புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தும்போது, குறிக்கோள்களை நன்கு உணர்வதும், சரியாகத் திட்டம் அமைத்துக்கொள்வதும், சக்தியுள்ள களஆய்வு செய்வதும், புள்ளியியல் செயல்முறைகளை மேற்கொள்ளும் திறமையோடொத்த சிறப்புடையன.

மாதிரி முறைகளைக் கையாளும்போது இவை அவசியம் தேவை. இதில் களமுறை செம்மையாகவும், திருத்தமாகவும் இருப்பது இன்றியமையாதது. களமுறை வேலையில் குறிப்பிட்ட சிக்கல்களையும் சூழ்நிலைகளையும் சமாளிப்பதற்குத் தனிப்பட்ட பயிற்சி வேண்டும். ஏற்ற சரியான மாதிரியைப் பிரித்தெடுப்பதற்குத் தனிப்பட்ட அறிவு வேண்டும்.

புள்ளிவிவர உய்த்துணர்வுகளின்மூலம் கிடைக்கும் முடிவு களின் உண்மையினை அறிவதற்கு முழுமைத் தொகுதியின் ஒருமை யையும் மாதிரி முடிவுகளின் உறுதியையும் புள்ளிவிவர சோதனை களினால் சரிபார்க்கவேண்டும். அடுத்தடுத்து மாதிரிகளை ஆராய் வதன்மூலம் புள்ளவிவர அளவைகளின் பிரதிநிதித்துவத் தன்மையை அறியலாம். கொடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் தனியுறுப்புகளைச் சோதிப் பதன்மூலம், மாதிரிகளைப் பிரிந்தாலும் அவற்றின் உறுதி நிலைக் கிறதா என்பதை அறியலாம். உய்த்துணர்வுகள் செய்யும்போது,

கொடுக்கப்பட்ட துறையில் இயற்கையின் ஒருமையைப் புனைந்து கொள்கிறோம். இந்தப் புனைவிற்குச் சாதகமான ஆதாரங்கள் ஒவ்வொன்றும் இந்த உய்த்துணர்வினை வலியுறுத்துகின்றன.

துணைநூல்கள்

Anderson, R. L. and Bancroft, T. A., 'Statistical Theory in Research', Chaps. 9, 10.

Clark, C. E., 'An Introduction to Statistics,' Chap. 5.

Cramer, H., 'Mathematical Methods of Statistics,' Chaps. 32, 34.

Fisher, Sir Ronald (R. A.), 'Contributions to Mathematical Statistics,' Papers 10, 11, 25, 26, 27.

Johnson, P. O., 'Statistical Methods in Research,' Chap. 6.

Mood, A. M., 'Introduction to the Theory of Statistics,' Chap. 11.

Neyman, J., 'Outline of a Theory of Statistical Estimation based on the Classical Theory of Probability,' 'Philosophical Transactions of the Royal Society,' 1937.

Neyman, J., 'Lectures and Conferences on Mathematical Statistics and Probability,' 2nd ed., Chap. 4.

Rosander, A. C., 'Elementary Principles of Statistics,' Chaps. 15, 16, 17.

Shewhart, W. A., 'Economic Control of Quality of Manufactured Product,' Chap. 13.

Shewhart, W. A., 'Statistical Method from the Viewpoint of Quality Control,' pp. 92-110.

Waugh, A. E., 'Elements of Statistical Method,' 3rd ed., Chap. 9.

Wilks, S. S., 'Elementary Statistical Analysis,' Chaps. 9, 10.

Wilks, S. S., 'Mathematical Statistics,' Chap. 6.

Yule, G. U. and Kendall, M. G., 'An Introduction to the Theory of Statistics,' 14th ed., Chaps. 17, 18.

இந்த அத்தியாய முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணைநூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரும், பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டும், நூலின் (இரண்டாம் பாக) இறுதியிலுள்ள துணைநூல் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன.

8. புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு : எடுகோள் சோதனைகள்

எடுகோள் சோதனைகளுக்கும் (testing of hypotheses), முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகள் எந்தப் புள்ளியில் அல்லது எந்த எல்லைகளுக்குட்பட்டு அமைகின்றன என்று இடம் காணும் மதிப்பீட்டு முறைகளுக்குமுள்ள வேறுபாட்டை விளக்கிப் புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு முறையை அறிமுகப்படுத்தினோம். இப்போது எடு கோள் சோதனைகள்பற்றிய கோட்பாடுகளையும், அவற்றின் பயன் களையும் காண்போம்.

எடுகோளுக்கும், கண்டறிந்த விவரங்களுக்குமுள்ள வேறு பாட்டை அறிவதே எடுகோள் சோதனைகள் எனப்படும். கண்டறிந்த விவரங்கள் எடுகோளோடு முரண்பட்டால், எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்கிறோம். கண்டறிந்த விவரங்கள் எடுகோளோடு முரண்படா விட்டால் எடுகோளை ஏற்கலாம். இந்த எளிய கூற்றுகளை மேலும் விளக்கமாகக் கூறவேண்டும். ஆனால், அறிவியல் கொள்கைகளை ஏற்பதற்கோ தள்ளுவதற்கோமுன்னால் செய்கின்ற சோதனைகளின் செய்முறையினுடைய அடிப்படையான சாரம் இக் கூற்றுகளில் அடங்கி விடுகிறது. சோதனைகள் தரும் சான்றுகளைக்கொண்டு, உடனடியாக எடுகோளை ஏற்பது எப்போதும் பொருத்தமே; ஆனால், தள்ளுபடி செய்வது சில சமயங்களில்மட்டுமே பொருந்தும். இங்கே செய்யும் சோதனைகளின் முடிவுகளை நிகழ்திற அடிப்படையி லேயே வெளியிடவேண்டும்.

புள்ளிவிவர ஆய்வுகளின் எடுகோள்கள்பற்றிய நடைமுறைகளை இங்கே விவாதிப்போம். இயைபிலா மாறியின் பரவலினுடைய, சில குறிப்பிட்ட தன்மைகளை ஆராய்வது புள்ளிவிவர எடுகோள்கள். இந்தத் தன்மைகள் (அல்லது முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகள்) எடுகோள் மதிப்புகளாகும். இவற்றை மாதிரியில் கிடைக்கும் அளவைகளோடு ஒப்பிடுகிறோம். கண்டறியப்பட்ட அளவைக்கும்,

அதற்கு இசைந்த எடுகோள் அளவைக்குமுள்ள வேறுபாட்டை அளப்பதே இந்தச் சோதனையின் முக்கிய நோக்கமாகும். இந்த வேறுபாடு சிறிதாக இருக்குமானல் ('சிறிது' என்ருல் என்ன என்பது பின்னர் விளக்கப்பெறும்), உண்மை எடுகோளினின்று முரண்படவில்லை என்று கூறலாம்; வேறுபாடு பெரிதாக இருக்குமானல், உண்மை எடுகோளோடு முரணடைகிறது என்று முடிவு கட்டலாம்.

புள்ளிவிவர ஆய்வுக் கொள்கைகளும் முறைகளும் கடந்த அரை நூற்ருண்டில், குறிப்பாகக் கடந்த முப்பது ஆண்டுகளில் பெரிதும் வளர்ந்தன. கார்ல் பியர்சன் (Karl Pearson), 'ஸ்டூடன்டு' (Student), ஆர். ஏ. ஃபிஷர் (R. A. Fisher), ஜெர்ஸி நேமன் (Jerzy Neyman), இ. எஸ். பியர்சன் (E. S. Pearson) ஆகியோர் இந்தத் துறையின் பல முக்கியமான கருத்துகளைக் கண்டு வழங்கியுள்ளனர். நேமன் (Neyman), இ. எஸ். பியர்ஸன் ஆகியோரது கருத்துகளையொட்டி பின்வரும் வாதங்கள் சுருக்கமாகத் தரப்படுகின்றன.[1]

குறியீடு: இதுவரை பயனுகாத குறியீடுகள் சில பின்வரும் வாதத்தில் பயனுகும். இவைகளில் முக்கியமான சிலவற்றைக் கீழே தருகிறோம்:

H, H_0, H_1: எடுகோள்

T: இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரியிலிருந்து தரவிலக்க அலகுகளின் விலக்கம்; இயல்நிலை விலக்கம்.

D: இரண்டு கூட்டுச் சராசரிகளிடையேயுள்ள வேறுபாடு.

s_D: சராசரிகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் தரப்பிழை; $s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ என்றும் எழுதப்படும்.

$s_{s_1 - s_2}$: இரு தரவிலக்கங்களிடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் தரப்பிழை.

$s_{p_1 - p_2}$: இரண்டு வீதங்களுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் தரப்பிழை.

t: சராசரி சுழியாகவும், இயல்நிலை பரவலாகவும் அமைந்த அந்த மாறியின் மாறுபாட்டு மதிப்பீட்டின் தரவிலக்கத்துக்கு உள்ள வீதம்.

[1] பார்க்க, நேமன், பியர்சன்; து.நூ.ப. 122, 123; நேமன், து.நூ.ப. 116, 121.

புள்ளிவிவர ஆய்வுக் கொள்கைகள்

சில பொதுக் கருத்துகளைக் கூறிப் புள்ளிவிவர சோதனைகள் பற்றிய கொள்கைகளை அறிமுகம் செய்வோம்.

1. H_0 என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளிவிவர எடுகோளைச் சோதனை செய்வதென்றால், அது தவறாகவும் இருக்கலாம் என்று கருதுகிறோமா என்பதே பொருள். அதாவது, ஆயும் எடுகோளன்றிப் பிற எடுகோள்களும் இருக்கலாம் என்று நாம் ஒப்புக்கொள்கிறோம். பொருத்தமான சோதனையைத் தேர்ந்தெடுத்து, இந்த மாறுபட்ட எடுகோள்களை எல்லாம் வெளிப்படையாக ஆராயவேண்டும்.

2. ஓர் எடுகோளை ஆராயும்பொழுது, பிழைநீக்கிச் செய்தலையே விரும்புகிறோம். எனவே சோதனைகளைச் செய்கையில், பிழைகளின் எண்ணிக்கை குறைவுபடுமாறு ஒரு சோதனையைத் தேரவேண்டும்.

3. இவ்விதமான ஆய்வுக்குரியதாகி H_0 என்ற ஓர் எடுகோள் திட்டவட்டமாக வரையறை செய்யப்பட்டிருப்பதையும், இதுவேயன்றி சாத்தியமான பிற எடுகோள்களின் குடும்பமொன்று இருப்பதையும், இக் குடும்பத்தின் ஓர் எடுகோளையே H_1 என்று குறிக்கிறோம் என்பதையும் நேமன்-பியர்சன் கொள்கை ஒப்புக்கொள்கிறது. (கீழ்வரும் கருத்துகளுக்கு இணங்க) ஒரு சோதனையைத் தேர்ந்தெடுத்துப் பயன்படுத்தும்போது, இருவகையான பிழைகளை ஆய்வாளர் செய்ய நேரலாம்.

1. முதல் வகைப் பிழை (வகை 1) பின்வரும் இரு சூழ்நிலைகளில் தோன்றும் :
   (a) சோதனை செய்யப்படும் எடுகோளான H_0 உண்மையாகவே இருக்கலாம் ;
   (b) சோதனையின் முடிவு, H_0 என்ற எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்வதாக இருக்கலாம்.
2. இரண்டாவது வகைப் பிழை (வகை 2) பின்வரும் இரு சூழ்நிலைகளில் தோன்றும்:
   (a) H_0 என்ற சோதனைக்குரிய எடுகோள் பொய்யானதாகவே இருக்கலாம் (மற்ற ஏதோவோர் எடுகோளான H_1 உண்மையாக இருக்கலாம்);
   (b) H_0 என்ற எடுகோளை ஏற்குமாறு சோதனையின் முடிவு இருக்கலாம்.

நேரிடக்கூடிய இந்த இருவகைப் பிழைகள், எடுகோள் சோதனை களில் எழும் சிக்கல்களுக்கு அடிப்படையானவை.

முந்திய அத்தியாயத்தில் ஆராயப்பட்ட புள்ளிவிவர உய்த் துணர்வு வகைகளில் ஒன்ருன இடைவெளி மதிப்பீடுகளில் கொடுக்கப் பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் அளவு, கூறப்பட்ட எல்லைக்குள் அமைகிறது என்று ஆய்வாளர் பொதுவாகக் கூறிவிடுகிருர். அந்த எல்லைகளுக்குள் அந்த அளவை அமையாவிட்டால், கூற்று தவருன தாகிவிடும். இது ஒருவகைப் பிழை. இடைவெளி மதிப்பீடுகளி லிருந்து எடுகோள் சோதனைக்குச் செல்கையில், ஒரு புதிய கருதுகோள் சிக்கல் எழுகிறது. இந்தச் சிக்கலின் தீர்வே புள்ளி யியல் ஆய்வுக்கு வலிமையுடைய கருவிகளாகும். இச் சிக்கலுக்குக் கண்ட தீர்வின் பொதுத் தன்மைபற்றி முதலில் ஆராய்வோம்; பின்னர் இதன் பயன்பற்றிக் காண்போம்.

பொதுவாகக் கூறப்போனுல், இருவகைப் பிழைகளையும் எத் தனைக் குறைவாக்கவேண்டுமோ அத்தனை குறைவாக்கவேண்டும். இரண்டாம் வகைப் பிழையைவிட முதல் வகைப் பிழையை நீக்குவது அவசியமாகக் கருதப்படுவதால், உண்மையான எடுகோளைத் தள்ளிவிடுவதற்கு மிக அரிதாக நேரும் சோதனையைத்தான் பயன் படுத்தவேண்டும். எனவே, சாத்தியமான சோதனைகளில் ஏற்ற சோதனையைத் தேர்ந்தெடுப்பதில் பின்வரும் செயல்முறையைக் கையாளவேண்டும். முதலில், முதல்வகைப் பிழையைக் கட்டுப் படுத்த முனையவேண்டும். அதாவது முதல்வகைப் பிழையின் நிகழ்திறத்தை எதேச்சையாகக் குறிப்பிட்ட ஒரு சிறப்பு எல்லைக்குள் வரைகட்டிவிடவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, 0.05 லிருந்து 0.01 வரை இது அமையலாம். இதை 'a' (ஆல்பா) என்போம். முதல்வகைப் பிழை a ஆகவுள்ள இரண்டு சோதனை களை ஒப்புநோக்கும்போது, இவற்றிலே இரண்டாவது வகைப் பிழையின் நிக்ழ்திறம் குறைவாகவுள்ள ஒன்றை எடுத்துக் கொள்வோம்.

கண்டறிந்த விவரங்களின்படி எடுகோளை ஏற்றுக்கொள்ள வேண்டுமானுல், கண்டறிந்த விவரங்களிலே 'தன்மைகள்' இருக்கவேண்டும் என்பதற்கு விதி வகுப்பதுதான் இவ்வகைச் சோதனையின் நோக்கம். அத்தகைய முடிவைத் தீர்மானிக்கும் தன்மைகள் காணப்படாவிட்டால், எடுகோளைப் புறக்கணிக்கிருேம். [n-பரிமாணவெளியில் (n-dimensional space) பரிமாணங் களின் எண்ணிக்கை மாதிரிப் புள்ளியான E என்பதன் ஆயங்களின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்தது.] இந்த முடிவைத் தீர்மானிக்கும் தன்மைகளை மண்டலங்களாக (regions) வரையறை செய்வது மரபு.

மாதிரியில் கண்டறிந்த விவரங்களால் தீர்மானிக்கப்பட்ட E என்ற புள்ளி ஏற்பு மண்டலத்தில் (acceptance region) அமையுமானால், எடுகோள் பொருத்தமுடையது. அதனை ஏற்கலாம்.

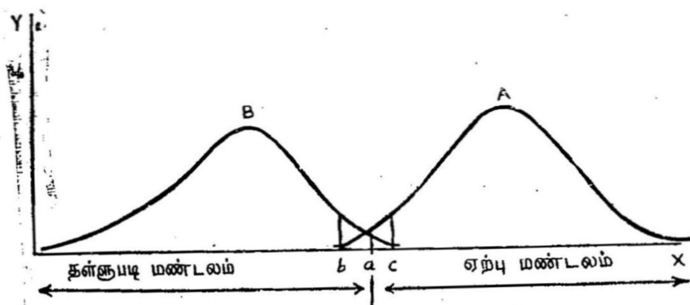
E என்ற புள்ளி மாறுநிலை மண்டலத்தில் (critical region)—இது தள்ளுபடி மண்டலம் (rejection region) என்றும் கூறப்படும்—அமையுமானால், எடுகோள் தள்ளுபடி செய்யப்படுகிறது. W என்ற குறியீடு மாதிரி வெளி முழுவதையும் (அதாவது, கிடைக்கக் கூடிய மாதிரிகள் எல்லாவற்றிலுமிருந்து கிடைத்த புள்ளிகள் முழுவதும் அமைகின்ற மண்டலத்தைக்) குறிக்குமானால், தள்ளுபடி மண்டலத்தை 'w' என்பதாலும், ஏற்பு மண்டலத்தை W-w என்பதாலும் குறிக்கலாம். இவ்விரு பகுதிகளும் ஒன்றையொன்று முழுமையாக்குவன (complementary). முன்பு குறிப்பிட்டபடி எடுகோள் உண்மையாய் இருக்கையில், E என்ற புள்ளி w என்ற புறக்கணிப்புப் பகுதியில் அமைவதற்கான நிகழ்திறத்தைச் சோதனையின் சிறப்பு வரம்பு (significance level) என்று கூறுவோம். இருவகைப் பிழைகளின் சாத்தியமான விளைவுகளை மனத்தில்கொண்டு கொடுக்கப்பட்ட சந்தர்ப்பத்தில் சிறப்பு வரம்பு என்ன என்பதை ஆய்வாளர் தீர்மானிக்க வேண்டும்.[2]

ஓர் எடுத்துக்காட்டு: [மூட் (Mood) என்பவர் கூறியதையொட்டி] இரண்டு வேறுபட்ட எடுகோள்களுள் ஒன்றைத் தேர்வதற்கான எடுத்துக்காட்டு ஒன்றைக் காட்டிச் செயல்முறையை விளக்குவோம். ஒரே கண்டறிந்த மதிப்பை அடிப்படையாக வைத்துச் செய்யப்படுகின்ற சோதனை இது. 'x' என்பதன் முழுமைத் தொகுதியானது படம் 8.1-ல் கண்டபடி 'A' என்ற நிகழ்திறச் சார்பலனையொட்டியோ, 'B' என்ற சார்பலனையொட்டியோ அமைவதாகக் கொள்ளுவோம். H_0 என்ற எடுகோளை—அதாவது, ஆராயப்படுகின்ற முழுமைத் தொகுதி 'A' என்ற பரவலைப் பெற்றிருக்கிறதா என்பதைச் சோதனை செய்யவேண்டும். சிறப்பு வரம்பை 0.05-ல் அமைப்போம். மிகுதியான ஒரே மாற்று எடுகோள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள முழுமைத் தொகுதி 'B' என்ற பரவலைப்

[2] ஏரணநூல் வல்ல ஒரு கொள்ளைக்காரன் ஒரு பாங்குக்குள் நுழைவதற்கு முன் பின்வரும் எடுகோளை அமைக்கிறான். இந்தப் பாங்கு, கொள்ளைக்காரர் வந்தால் எச்சரிக்கை செய்யும் மணியை உடையது. இந்த எடுகோள் உண்மையாக இருந்து அதனை அவன் புறக்கணித்துத் திருட முயலுவானானால் முதல்வகைப் பிழையைச் செய்கிறான். இதன் விளைவாக அவன் கைதுசெய்யப்படுகிறான். எடுகோள் தவறானதாக இருக்கும்போது அதனை அவன் ஏற்றுத் திருடாது இருப்பானாகில், இரண்டாவது வகைப் பிழையைச் செய்கின்றான். அதன் விளைவாகப் பயனளித்திருக்கக்கூடிய ஒரு செயலைச் செய்யாது விட்டுவிடுகிறான். முதல் வகைப் பிழை, அவனைப் பொறுத்த வரையில், இரண்டாவது வகைப் பிழையைவிட அதிக பாதகத்தை விளைவிக்கக் கூடியதாகத் தோன்றும்.

பெற்றிருக்கிறது என்பதுதான். இந்த இரண்டில் ஒன்றே சரியானது.

x_1 என்ற கண்டறிந்த தனிக்குறிப்பின் அடிப்படையில் சோதனை செய்வதனால், இது x அச்சில் ஒரு புள்ளியாக இருக்கும். இந்த அச்சில் ஏற்பு இடைவெளியையும், தள்ளுபடி இடைவெளியையும் வரையறை செய்வதே நமது சிக்கலாகும். [இன்னும் பரிமாணங்கள்



8.1. படம்.

எடுகோள் சோதனைகளுக்கு ஒரு விளக்கம். எளிய சோதனை ஒன்றின்மூலம் ஏற்பு மண்டலங்களையும், தள்ளுபடி மண்டலங்களையும் இடங்காணல்.

(dimensions) அதிகமாகவுள்ள மண்டலங்களிலும் சோதனை செய்வதற்குக் கையாளும் முறையை ஒத்ததே இவையாகும்.] இங்கே புனைந்துகொள்ளப்படுகின்ற செய்தி நமக்குத் தெரிந்திருந்தால்—அதாவது, A, B ஆகிய பரவல்களைப்பற்றிச் செய்தி தெரிந்திருந்தால்—A வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்பை மொத்தத்தில் 0.05, 0·95 பங்குகளாக ஆகுமாறு இருகூறுகப் பிரிக்கும் குத்தாயம் x அச்சில் எந்தப் புள்ளியில் நிறுத்தப்படவேண்டுமோ, அந்தப் புள்ளியான a-ஐக் கண்டுபிடிப்பதே நமது சிக்கலுக்கு விடை (8.1 படம் காண்க). x அச்சில் a என்ற புள்ளிக்கு வலப்புறம் அமையும் இடைவெளியே ஏற்பு மண்டலம்; a-க்கு இடப்புறம் அமையும் இடைவெளி தள்ளுபடி மண்டலம். x_1 என்ற புள்ளி ஏற்பு இடைவெளிக்குள் விழுமானால், H_0 ஏற்கப்படுகிறது; தள்ளுபடி இடைவெளிக்குள் x_1 விழும்போது, H_0 தள்ளுபடி செய்யப்படுகிறது.

H_0 என்பது உண்மையானதாகவே இருந்துவிட்டால், x_1 a என்ற புள்ளிக்கு வலப்புறம் விழ 0.95 நிகழ்திறம்; இடப்புறம் விழ நிகழ்திறம் 0.05. எனவே, முதல் வகைப் பிழை (அதாவது, H_0 உண்மையாக இருக்கும்போது தள்ளுபடி செய்தல்) நேர

வாய்ப்பு 0.05. ஏற்பு இடைவெளியையும் தள்ளுபடி இடைவெளியை யும் பிரிக்கும் a என்ற புள்ளியிலேயே x_1 விழுமானால், இரண்டாம் வகைப் பிழை நேர இடம் உண்டு. (அதாவது, தவறான எடுகோளை ஏற்றுக்கொண்டுவிடுதல்.) ஏனெனில், H_0 உண்மையிலேயே தவறாக இருந்து (அதாவது, H_1 உண்மையாக இருந்து) விட்டால், B என்ற பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட குறிப்பானது H_0-ன் ஏற்பு மண்டலத்தில் நுழைய ஒரு வாய்ப்பு—சிறியதுதான்—இருக்கிறது. இந்த நிகழ்திறம் 8.1 படத்தில் காட்டப்பட்டபடி, ஏற்பு இடைவெளியில் அமைகிற B பரவலின் மொத்தப் பரப்பின் வீதம்.

H_0 ஐப் பொறுத்தவரையில், முதல் வகைப் பிழை நேரும் நிகழ்திறத்தை விரும்பியவாறு செம்மைப்படுத்தலாம். இத்தகைய பிழை நேர்வதற்கு நிகழ்திறத்தை 0.0001 என்ற அளவுக்குக் குறைக்க விரும்புவதாக வைத்துக்கொள்வோம். H_0-ன் ஏற்பு இடைவெளியை யும், தள்ளுபடி இடைவெளியையும் இருகூறாகப் பிரிக்கும் கோட்டை x அச்சில் b என்ற புள்ளியில் அமைப்போம். b என்ற புள்ளியானது A என்ற வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்பை 0.9999, 0.0001 பங்குகளாகப் பிரிக்குமாறு ஓரிடத்தில் அமையவேண்டும். இப்படிச் செய்வதால், இரண்டாம் வகைப் பிழையின் நிகழ்திறத்தை அதிகரித்துவிடுகிறோம் என்பது உண்மையே. ஏனெனில், H_0-ன் ஏற்பு இடைவெளியில் அடங்கும் B வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்பின் பகுதி கூடிவிடுகிறது. எதிர்மறையாக, இதே சூழ்நிலைகளில் இரண்டாம் வகைப் பிழையை மிகக் குறைந்த நிகழ்திறத்துக்குக் குறையுமாறு, ஆனால் முதல் வகைப் பிழையைக் கணிசமான அளவு அதிகரித்து இரு கூறாகப் பிரிக்கும் புள்ளியை c என்ற புள்ளிக்கு நகர்த்தலாம்.

சாத்தியமான பல சோதனைகளில் ஒன்றைத் தேர்வதற்கு முக்கியமான கட்டளை விதி, இரண்டாம் வகைப் பிழையினைத் தவிர்ப்பதில் ஒப்பீட்டு அடிப்படையில் அவற்றின் ஆற்றலைக் குறித்தது ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட எடுகோளான H_0 என்பது உண்மையிலேயே தவறாக இருக்கையில், மாதிரிப் புள்ளியான E, மாறுநிலை மண்டலமான—அதாவது, தள்ளுபடி மண்டலத்தின்—w-ல் விழுவது விரும்பத்தக்கதே. இதுபோன்று நடந்தால், தவறான எடுகோளைக் கண்டுபிடிப்பதில் சோதனை வெற்றிபெறுகிறது. இந்தச் சோதனை இதனைச் சாதிப்பதற்குரிய நிகழ்திறம், இதனுடைய சக்தியின் (power) அளவாகும். முதல் வகைப் பிழையைப் பொறுத்தவரையில், ஒரே தன்மையுடைய இரு சோதனைகளில் தவறான எடுகோளைக் கண்டுபிடிக்கும் ஆற்றல் மிகுந்ததையே மிகுந்த சக்தியுடையதாகக் கருதுகிறோம்.

நேமனும் (Neyman) பியர்சனும் (Pearson) எடுகோள் சோதனைகளைப்பற்றிய ஆராய்ச்சிகளில் மற்றுமொரு கட்டளை விதியைப்பற்றி வலியுறுத்தியுள்ளனர்—அதுதான் பிறழ்ச்சியைப் பற்றியது. சோதனை செய்யப்படுகின்ற எடுகோள் உண்மையான தாகவோ தவறான தாகவோ இருக்கலாம்; தவறானதாக இருந்தால், அதனைத் தள்ளுபடி செய்ய விரும்புகிறோம். ஒரு கொடுக்கப்பட்ட சோதனையானது H_0 என்ற எடுகோளை, அது உண்மையாக இல்லாத போது தள்ளுபடி செய்வதைவிட உண்மையாக இருக்கும்போது தள்ளுபடி செய்வதற்கு வாய்ப்புக் குறைந்து காணப்பட்டால், அதனைப் பிறழ்ச்சியற்ற (unbiased) சோதனை என்று கூறுகிறோம். அதாவது, பிறழ்ச்சியற்ற, சோதனையில் கூறப்படும் எடுகோள், அது மெய்யாக இருக்கையில் தள்ளப்படவேண்டிய நிகழ்வாய்ப்பு சிறுமமாக இருக்கும்.

மொத்தத்தில் இந்தக் கட்டளை விதிகளைப் பயன்படுத்துவதன் நோக்கம், பிழையை—முதல் வகையானாலும் சரி, இரண்டாம் வகையானாலும் சரியே—தவிர்ப்பதே. இந்தக் குறிக்கோளை மனத்தில் கொண்டு, மெய்யான எடுகோளையும் தவறான எடுகோளையும் இனம் பிரித்து, மெய்யான எடுகோளை ஏற்றுத் தவறான எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்து வழிகாட்டக்கூடிய திறம் மிக்கதொரு செயல் முறையைப் பயன்படுத்த விரும்புகிறோம்.

இந்தச் சிக்கல் எளிமையானதன்று; இவ்வகைச் சிக்கல்கள் எல்லாவற்றுக்கும் பொருந்திவரக்கூடிய பொதுவான தீர்வுகளுமல்ல. சில சமயங்களில், ஒரு மெய்யான எடுகோளுக்குப் புறம்பாக ஒன்றுக்குமேற்பட்ட பல தவறான எடுகோள்கள் இருக்கக்கூடும் என்ற உண்மை சிக்கலை மிகவும் அதிகமாக்குகிறது. எனவே, ஒரு தொடரான ஒப்புநோக்குதல்களை நாம் மேற்கொள்ள வேண்டியிருக்கிறது: H_0 என்ற மெய்யான எடுகோளும் H_1' என்ற கொடுக்கப்பட்ட தவறான எடுகோளும்; H_0-ம், H_1'' என்ற மற்றொரு தவறான எடுகோளும்; H_0-ம், H_1''', என்ற மூன்றாவது தவறான எடுகோளும்; இன்ன பிற. முதல் வகைப் பிழைக்கு மாறாத நிகழ் திறத்தை அமைத்தால், ஒப்புமைக்கொப்புமை மாறுநிலை மண்டலங்கள் மாறுபடும்.

$\mu=40$ என்ற சராசரியுடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $\bar{X}=38$ என்று தரப்பட்ட சராசரியையுடைய மாதிரி பிரித்தெடுக்கப்பட்டது என்ற எடுகோளைச் சோதனை செய்வதை இந்த வகைச் சூழ்நிலைக்கு எடுத்துக்காட்டாகக் கொள்வோம். அதாவது, $\mu=40$ என்பது H_0 என்ற எடுகோள்—இது உண்மை; இதற்கு மாறான எடுகோள்கள் பல சாத்தியமானவை—$\mu=25$ என்பது, $\mu=39$

என்பது, $\mu=52$ என்பது, இன்ன பிற. H_0 என்ற எடுகோள் மெய்யானது என்பது உண்மையாக இருந்து, $\mu=25$ என்ற தவறான எடுகோளான H_1' ஏற்றுக்கொண்டால், இரண்டாம் வகைப் பிழை ஏற்படுகிறது. மெய்யான எடுகோளுக்கும், தவறான எடுகோளுக்குமுள்ள வேறுபாடு பெரிதாக இருப்பதால், இரண்டாம் வகைப் பிழை ஏற்படும் அபாயம் மிகக் குறைவே. ஆனால், $H_0=40$, $H_1''=39$ என்ற மாற்று எடுகோள்களில் இவ்விதம் கூறமுடியாது. மெய்யான எடுகோளுக்கும், தவறான எடுகோளுக்கும் வேறுபாடு குறைவாக இருக்கிறது. (H_1'' என்ற எடுகோளை ஏற்றால் ஏற்படக்கூடிய) இரண்டாம் வகைப் பிழை முந்திய எடுத்துக்காட்டைவிட இப்போது நேர அதிக இடமுண்டு. இதுபோலவே மற்றத் தவறான எடுகோள்களுக்கும் இரண்டாம் வகைப் பிழை நேரும் நிகழ்வாய்ப்புகள் வேறுபடுகின்றன. அதாவது, ஒரு சோதனையின் மாறுநிலை மண்டலமான w' மற்றொரு சோதனைக்கு மாறுநிலை மண்டலமான w'' என்பதும் ஒன்றாகவே இருக்காது என்பதாகும்.

சில அரிய சூழ்நிலைகளில், சாத்தியமான எல்லா எடுகோள்களுக்கும் சிறந்த சோதனையாக விளங்குமாறு ஒரே மாறுநிலை மண்டலமும் இருக்கலாம்; அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட முதல் வகைப் பிழையோடு இந்த மாறுநிலை மண்டலத்தின் மாற்று எடுகோள்களில் எதை எடுத்துக்கொண்டாலும், இரண்டாம் வகைப் பிழை நேரும் நிகழ்திறம் சிறுமமாக இருக்கும். இத்தகைய சோதனையை முற்றிலும் சக்தி உடைய சோதனை (uniformly most powerful test) என்போம். தவறான எடுகோள்கள் எல்லாவற்றையும் கண்டுபிடிக்க இது மிகவும் சக்தி வாய்ந்த சோதனை. ஆய்வாளருக்கு மிகவும் மகிழ்ச்சியைத் தருகிற நிலை இது. ஆனால், மாற்று எடுகோள்களை வேண்டுமென்றே கட்டுப்பாடுகள் செய்தால்தான் இத்தகைய அரிய சூழ்நிலை தோன்றும். பெரும்பாலான சமயங்களில் இத்தகைய 'மிகச் சிறந்த' சோதனைகளுக்குச் சற்று மாற்றுக் குறைந்த சோதனைகளோடேயே ஆய்வாளர் திருப்தியடைய வேண்டியிருக்கிறது. எனவே, ஒரு கொடுக்கப்பட்ட சூழ்நிலையில் தரப்படுகின்ற எல்லாச் செய்திகளையும் பயன்படுத்தவும் தரம்பிரித்து அறியவும் பொருத்தமான சோதனைகளைத் தேர்ந்து காணவேண்டும்.

பலவகைப் புள்ளியியல் எடுகோள்களைச் சோதனை செய்யக் கையாளப்படும் செயல்முறைகளை அடுத்துத் தரவிருக்கும் எடுத்துக்காட்டுகள் விளக்கும். (பிற வகையான சோதனைகள் பின்னர் வரும் அத்தியாயங்களில் தரப்படும்.) சிறப்புகாண் சோதனைகள்பற்றிய கோட்பாடுகளைக்குறித்துச் சொல்லப்பட்ட பொதுக் கூற்றுகளுக்கு இந்த எடுத்துக்காட்டுகள் வடிவ அளவு தந்து விளக்கும். இத்தகைய சோதனைகளின் தன்மையைக்குறித்தும், அவற்றின் பயன்

களைக்குறித்தும் விளக்குவதாகமட்டுமே பின்வரும் எளிய எடுத்துக் காட்டுகள் அமையும்.

சில சிறப்புகாண் சோதனைகள்

சராசரியின் சிறப்பு

பகடை உருட்டுவதன் முடிவுகளைத் தெரிவிக்கும் வெல்டனுடைய (Weldon) விவரங்கள் (6-1 பட்டியல் பார்க்கவும்) ஒரு சிறந்த எடுத்துக்காட்டாகும். 4, 5, 6 ஆகிய குறிகள் தெரிந்தால் முடிவு வெற்றியாக எண்ணப்படுவதால், $p=0.5$, $q=0.5$ என்பதை நினை வூட்டுகிறோம். 12 பகடைகள் எறியப்படுகின்றன. இங்கே $n=12$. எறிவுகளின் எண்ணிக்கை 4096; இது 'N'-ன் மதிப்பைக் காட்டு கிறது. சராசரியின் கருதுகோள் அளவு 6 ($=np$). தரவிலக்கத்தின் கருதுகோள் அளவு 1 732 ($=\sqrt{npq}$). உண்மையான சராசரி யான $\bar{X}$-ன் மதிப்பு 6.139. இந்தச் சராசரி மதிப்பு பகடைகள் செம்மையானவையாக இருந்ததால் கிடைத்திருக்கக் கூடியதா? அதாவது, $\mu=6$, $\sigma=1.732$ மதிப்புகளையுடைய முழுமைத் தொகுதியினின்று 4096 எறிவுகள்கொண்ட இந்த மாதிரி வந்திருக்கக் கூடியதா ?

முன்னர் கூட்டுச் சராசரிகளாலான மாதிரிப் பரவல் ஒன்றை ஆராய்ந்தோம். கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறக்கும் 'N' அளவுள்ள மாதிரிகளின் சராசரிகளைக்கொண்டு ஒரு பரவல் அமைத்தால், அப் பரவலின் சராசரி முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியான 'μ' வுக்குச் சமமாக இருக்கும். அதன் தரவிலக்கமான (σ_m) என்பது $\sigma/\sqrt{N}$க்குச் சமம். (இதில் முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கம் σ; மாதிரியின் அளவு N.) தற்போதைய எடுத்துக் காட்டில் $\mu=6.00$, $\sigma=1.732$ உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறக்கும் சராசரிகளின் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலாக அமையும். இதில் சராசரி 6.00 ஆகவும் பெற்றிருக்கும். $\sigma_m=1.732/\sqrt{4096}$ $=0.027$ ஆகவும் அமையும். 6.139 என்று கிடைக்கின்ற சராசரியைக் கூட்டுச் சராசரிப் பரவலின் ஓர் இயைபிலா உறுப்பாகக் கருத முடியுமா?

இத்தகைய ஆய்வுகளில், மாதிரிச் சராசரிக்கும் எதிர்பார்க்கும் சராசரிக்கும் வேறுபாடான $\bar{X}-\mu$ என்பது மைய அளவையாகும். இந்த வேறுபாடு '0' ஆக இருக்கும் என்ற எடுகோளைப் புனைந்து கொள்கிறோம். [இத்தகைய எடுகோள் 'சூனிய எடுகோள்' (null hypothesis) என அழைக்கப்படும்.] கண்டறிந்த விவரங்கள் எடு கோளுக்கு இயைந்தனவா என்பதே நமது கேள்வி.

இந்த ஆய்வுகளைப் பயன்படுத்துவதில், எடுகோள் சராசரிக்கும் மாதிரிச் சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாட்டைத் தரவிலக்க அலகுகளால் குறிக்கவேண்டும்.

அதாவது,

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_m} \quad (8.1)$$

$$= \frac{6.139 - 6.00}{0.027} = 5.1$$

என்று வரும்.

σ_m தொடர்புடைய இயல்நிலையாக இருப்பதால் (230, 231ஆம் பக்கங்கள் பார்க்க), 'T' என்ற அளவையை—இயல்நிலைப் பரவலில் தரவிலக்க அலகுகளால் அளக்கப்படும் சராசரி—இயல்நிலை விலக்கமாக அளக்கவேண்டும். இந்த எடுத்துக்காட்டில் (இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரியிலிருந்து) 5.1 தரவிலக்கங்களுடைய ஒரு விலக்கம் கிடைக்கிறது. இத்தகைய விலக்கம் நிகழக்கூடியதா ? விடை இல்லை என்பதே ஆகும். 6.139 என்ற மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி 6.00 சராசரி மதிப்பையும், 0.027 என்ற தரவிலக்கத்தையுமுடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து உண்மையாகவே எடுக்கப்பட்டதாகக் கருதினுல், இந்த நிகழ்ச்சியை 1,000,000-க்கு ஒரு தடவைக்கும் குறைவாக எதிர்பார்க்கிறோம். அத்தகைய நிகழ்ச்சி நடப்பது மிகவும் அரிது. நடக்காது என்றே தள்ளிவிடலாம். அத்தகைய பெரிய விலக்கம் தற்செயலாக நடந்திருக்கக்கூடியது அன்று. எனவேதான் நாம் பின்வருமாறு முடிவுகட்டுகிறோம். கண்டறிந்த விவரங்கள் சூனிய எடுகோளோடு பொருந்திவரவில்லையாதலால், தள்ளுபடி செய்யப்படவேண்டும். எனவே, இந்த மாதிரி பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி 6.00 அன்று என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம்; பகடைகள் செம்மையாகவும், சமநிலையிலும் அமைந்தன அல்ல. புறக்கணிப்பை நிகழ்திறச் சொற்களிலே கூறவேண்டும். நாம் கண்டறிந்த விவரங்களைப்போன்ற விவரங்கள் செம்மையான பகடைகளிலிருந்து கிடைப்பது நடக்கமுடியாதது அன்று; ஆனுல், மிகவும் அரிது. ஆனுல், இத்தகைய முடிவுகளுக்கு நிகழ்திறம் மிகச் சிறிதாக இருக்குமானுல் (அதாவது, ஆராயப்படும் எடுகோள் உண்மையானதாக இருக்குமானுல்), அது ஏதோ ஓர் அற்புதத்தின் விளைவே என்றுதான் அதற்குக் காரணம் காட்டமுடியும். மிக்க நம்பகத்தோடு நாம் இந்த எடுகோளைப் புறக்கணிக்கலாம்.

முக்கியமான கேள்வி ஒன்றை இங்கே காண்போம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்வதற்கு (T என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட விலக்கத்திற்கு இசைந்த) நிகழ்திறம் எத்தனை சிறியதாக

இருக்கவேண்டும்? இதற்குச் சிறப்பு வரம்பை எங்கே அமைக்க-வேண்டும்? முதலில் இந்த வரம்பின் ஒரு பகுதியை யதேச்சையாக அமைத்தே தீரவேண்டும் என்று விடை கூறுவோம். நிச்சயமாக நிகழமுடியாதது என்று ஓர் ஆய்வாளர் கருதுகின்ற அதே வரம்பு நம்பிக்கை உள்ளங்கொண்ட மற்றவரால் முற்றிலும் நிகழ முடியாததன்று என்று கருதப்படலாம். ஆனால், முன் பக்கங்களில் கூறியதுபோல், $P=0.05$ அல்லது $P=0.01$ என்ற வரம்புக்கு எல்லை காண்பதே ஒருமுகமான வழக்கம். இந்த இரண்டு வரம்புகளில் கீழ்வரம்பைப் பயன்படுத்தினால், பின்வருமாறு கூறுவோம்: 100 தடவைகளில் ஒரு தடவையோ அல்லது அதற்கும் குறைவான தடவையோ நிகழும் நிகழ்ச்சி நடைமுறையில் காணப்படுவதில்லை. ஆகையால், T-ன் மதிப்பு 2.576-க்குச் சமமாகவோ அதற்கும் மேலோ இருக்குமானால், எடுகோளைத் தள்ளிவிடவேண்டும். அதே வகையான விவாதத்தைப் பயன்படுத்தி $P=0.05$ என்ற வரம்பு கட்டலாம் (இதில் T-ன் இயல்நிலை விலக்கம் 1.96-க்குச் சமம்). 20-ல் ஒரு தடவை அல்லது அதற்குக் குறைவாக ஒரு நிகழ்ச்சி நடை பெறுவதானது எடுகோளை ஏற்குமளவுக்குச் சாத்தியமானதன்று எனக் கருதப்படும்.

T-ன் 2.576 என்ற மதிப்பு 100-ல் 1 தடவை பெறப்படுகிற அல்லது மீறப்படுகிற விலக்கத்தைக் குறிக்கிறது என்று கருதினால், உண்மையான எடுகோள் மதிப்புக்கு மேலும் கீழுமுள்ள மதிப்புகளைக் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்கிறோம் என்பதே பொருள். நாம் எடுத்துக்கொண்டதில் மாதிரிச் சராசரியான 6.139, எடுகோள் சராசரியான 6.00-ஐ விஞ்சுகிறது; ஆனால், சிறப்புகாண் சோதனைகளில் தனித்த (absolute) வேறுபாட்டை, குறிகளைப் பொருட்படுத்தாது காண முயல்கிறோம். ஒரு திக்கிலிருந்து மற்றொரு திக்கை வேறுபடுத்திப் பிறழ்ச்சியை இங்கே எதிர்பார்ப்பதில்லை; ஒரு புற விலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி எடுகோள்களை உருவாக்கப்போவதுமில்லை. வேறுவிதமாகக் கூறினால் இங்கே இரு வாலுள்ள சோதனையைச் (two-tailed test) செய்கிறோம். அதாவது T என்பதனை ஆராயும்போது இயல்நிலைப் பரவலின் இரு வால் பகுதிகளையும் ஆராய்கிறோம். தள்ளுபடி மண்டலத்திலும், பரவலின் இரு கோடிகளும் அடங்குகின்றன. ஒரு திக்கில்மட்டும் விலக்கமுள்ள பரவல்களுமுள்ளன; இத்தகைய பரவல்களில் ஒரு வால் பகுதிச் சோதனைகளே பொருத்தமானது.

முதல் இரண்டாம்வகைப் பிழைகளால் நேரக்கூடிய விளைவுகளை முன்கூட்டியே எண்ணிப்பார்த்துத் தள்ளுபடிமண்டலத்தின்எல்லையை வரையறை செய்யவேண்டும் என்று கூறினோம். முதல்வகைப் பிழை முற்றிலும் விரும்பத்தகாதது (அதாவது, உண்மை எடுகோளைத்

தள்ளுபடி செய்தல்) என்று கருதினல், சிறப்புகாண் சோதனையின் எல்லையை மேலும் விளக்கலாம். காட்டாக 1,000-ல் ஒரு தடவையோ அதற்கும் குறைவாகவோ அமையுமளவு கண்டறிந்த விலக்கத்துக்கும் எடுகோள் விளக்கத்துக்குமுள்ள வேறுபாடு இருக்குமானல் கொடுக்கப்பட்ட எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்வதென்று தீர்மானிக்கலாம். அதாவது கண்டறிந்த குறிப்புகள் எடுகோளோடு முரணுடையன என்று முடிவு செய்யுமாறு அமைவதற்கு மேற்கூறியது போன்ற சோதனைகளில் T-ன் மதிப்பு 3.291-க்குச் சமமாகவோ, பெரிதாகவோ இருக்கவேண்டும். இதற்கு மாருக, தவருன எடுகோளை ஏற்காதிருக்கவேண்டுமானல் 0.10 என்ற சிறப்பு எல்லையையொட்டி (1.645 என்ற T மதிப்புக்கு இசைந்தது) வேலை செய்ய வேண்டும். இதன்மூலம் பொய்யான எடுகோளை ஏற்காதிருப்பதுடன், உண்மையான எடுகோளை ஏற்கும் நிகழ்வாய்ப்பும் அதிகமாகிறது. ஒவ்வொரு சோதனைக்கும் சிறப்பு எல்லையைக் காண்பது அதற்கே உரித்தான தனிப்பட்ட சிக்கலாகும். சிறப்பு எல்லைகளைத் தேறுவதற்கேற்ற ஏற்பாடுகளைச் செய்வது தனிப்பட்ட ஆய்வாளரது பொறுப்பு. எடுத்துக்காட்டாகத் தரப்பட்டுள்ள வெல்டன் கணக்கில் ஒரு பக்கமும் முடிவுகட்டிக் கூறவில்லை. அது மாதிரிக்காகவே தரப்பட்டது. ஆனல், செயல்முறையான பகடைபற்றிய கணக்குகளில் முடிவு தெளிவது அவசியம். பகடை திருத்தமானது என்று அப்படி இல்லாதபோது ஏற்பது (இரண்டாம் வகைப்பிழை), விளையாடுபவர்களில் ஒரு சிலருக்குப் பெரும் பாதகமாய் அமைந்து ஆட்டத்தின் நேர்மையைக் குலைக்கும்.

மற்ருேர் எடுத்துக்காட்டு, உறுதிப் பத்திரங்கள் (securities), வாங்குவோர் விற்போர் பெறும் நிதி அனுபவம்பற்றியது. பால் எஃப். வெண்ட் (Paul F. Wendt) என்பவரால் விரிவான முறையில் தயாரிக்கப்பட்ட ஓர் அறிக்கையினின்று எடுக்கப்பட்ட 8-1 பட்டியல், பெற்ற லாபங்களையும் இழப்புகளையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு, நியூயார்க் ஸ்டாக் எக்ஸ்சேஞ்ச் நிறுவனத்தின் வாடிக்கைக்காரர்களைப் பாகுபாடு செய்த பரவலைக் காட்டும். இங்குப் பயனுகும் மாதிரி 5,000 டாலருக்கும் குறைவான மூலதனக்காரர்களை மாதிரி முறையில் தேர்ந்தெடுத்து அமைத்தது. இங்கே பதிவு செய்யப்பட்ட வணிக அனுபவம் 1933-க்கும் 1938-க்கும் இடைப்பட்ட காலத்தியது. 8-1 பட்டியலில் காணப்படும் பரவலின் சராசரி $ 135.44 ஆகும். மதிப்பிடப்பட்ட தரவிலக்கம் s', அதாவது $ 1,214.90 ஆகும்.

இந்த இயைபிலா மாதிரியானது, 1933-38 காலகட்டத்தில் நியூயார்க் ஸ்டாக் எக்ஸ்சேஞ்ச் உறுப்பின் நிறுவனங்கள்மூலமாக உறுதிப்பத்திரங்கள் வாங்கிய சிறிய முதலீட்டுக்காரர்கள் ($ 5,000-க்கும் மேலிடாத மூலதனத்தை முதலீடு செய்தவர்கள்) எல்லோரும்

அடங்கிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்தது. இந்தக் காலகட்டத்தில் இத்தகைய முதலீட்டுக்காரர்கள் மொத்தத்தில் லாபமடைந்தார்களா அல்லது இழப்பு அடைந்தார்களா என்பதை அறிவதில் ஓரளவு அக்கறை காட்டப்படுகிறது. இந்தத் தொகுதியில் நிகர இலாபங்கள், இழப்புகள் ஆகியவற்றின் முழுமைச் சராசரி சுழியாகும் என்ற சூன்ய எடுகோளைப் புனைந்துகொள்கிறோம். மாதிரி முடிவுகள் இந்த எடுகோளோடு ஒத்து வருகின்றனவா? இந்தச் சோதனையில் 0.01 என்ற நிகழ்திற எல்லையைப் பயன்படுத்துவது பொருத்தமாகத் தெரிகிறது.

முந்திய எடுத்துக்காட்டில் கூறியதுபோன்ற சோதனையையே மேற்கொள்கிறோம். ஆனால், மாதிரியின்மூலமாக அறிந்ததேயன்றி முழுமைத் தொகுதியின் சிதறலின் அளவுபற்றிய செய்தி எதுவும் நமக்குத் தெரியாது. அதனால் சராசரியின் தரவிலக்கத்தை மதிப்பீடு செய்ய, s' என்பதை முழுமைத் தொகுதியின் அளவாகிய σ என்பதின் மதிப்பீடாகக் கொள்ளவேண்டும். அதனால்,

$$s_m = \frac{s'}{\sqrt{N}} = \frac{1214.90}{\sqrt{395}} = 61.13$$

மாதிரிச் சராசரிக்கும், எடுகோள் சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாட்டைத் தரவிலக்க அலகுகளில் கூறும் T-ன் அளவாக

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{s_m} = \frac{135.44 - 0}{61.13} = 2.22$$

என்பது கிடைக்கிறது.

இதனை இயல்நிலை விலக்கமாகக் கருதுவோம்; மாதிரிகளின் கூட்டுச் சராசரியை இயல்நிலைப் பரவலாகக் கருதுவோம். மேலும் இத்தகைய எடுகோளைச் சோதனை செய்யும்போது லாபப் பக்கமும், இழப்புப் பக்கமுமுள்ள விலக்கங்களைக் கணக்கிலெடுத்துக்கொள்ள வேண்டியிருப்பதால் எடுகோள்களைச் சோதனை செய்கையில் இரு வால் பகுதிக்குமான சோதனையை மேற்கொள்ளவேண்டும்.

ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில், இங்குக் கண்டறிந்த அளவு விலக்கம் 100 சோதனைகளில் ஏறக்குறைய 2.6 தடவைகள் ஏற்படும். நாம் அமைத்துள்ள சிறப்பு வரம்பில், இயைபிலா மாதிரிமுறையின் ஏற்ற இறக்கங்கள் காரணம்பற்றி, மாதிரிச் சராசரிக்கும் எடுகோள் மதிப்பான சுழிக்குமுள்ள வேறுபாடு இங்குப் பதிவு செய்யப்பட்டுள்ள அளவு பெரிதாக இருக்கிறது. சிறிய அளவு முதலீட்டுக்காரர்கள் 1933-38 ஆண்டுகளில் லாபமோ இழப்போ அடையவில்லை என்ற எடுகோளுக்குக் கண்டறிந்த மதிப்புகள் முரணடையவில்லை. எனவே, நாம் எடுகோளை ஏற்கிறோம்.

பட்டியல் 8–1

1933-38-ல் நியூயார்க் நகர ஸ்டாக் எக்ஸ்சேஞ்சின் 395 வாடிக்கைக்காரர்களது பங்குபற்றிய பரவல்*

($ 5,000-க்கும் குறைவான முதலீடு உள்ளவர்களது லாபம், இழப்புபற்றிய இயைபிலா மாதிரி)

பிரிவு இடைவெளி† (டாலர்கள்)	மையப்புள்ளி (டாலர்கள்)	அலைவு
— 9,000லிருந்து — 8,000 வரை	— 8,500	1
— 4,000லிருந்து — 3,000 வரை	— 3,500	2
— 3,000லிருந்து — 2,000 வரை	— 2,500	7
— 2,000லிருந்து — 1,000 வரை	— 1,500	15
— 1,000லிருந்து 0 வரை	— 500	147
0லிருந்து + 1,000 வரை	+ 500	187
+ 1,000லிருந்து + 2,000 வரை	+ 1,500	23
+ 2,000லிருந்து + 3,000 வரை	+ 2,500	5
+ 3,000லிருந்து + 4,000 வரை	+ 3,500	2
+ 4,000லிருந்து + 5,000 வரை	+ 4,500	3
+ 5,000லிருந்து + 6,000 வரை	+ 5,500	1
+ 6,000லிருந்து + 7,000 வரை	+ 6,500	1
+ 9,000லிருந்து + 10,000 வரை	+ 9,500	1
		395

* வெண்ட் (Wendt), து. நூ. ப. 189, பக்கம் 31.

† ஒரு பிரிவின் மேல் எல்லையை மதிப்பாகவுடைய குறிப்பு—$ 2,000 லாபம் எடுத்துக்காட்டு—அதனிலும் அடுத்த மேல் பிரிவில் அடங்கும்.

இரண்டு சராசரிகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் சிறப்பு

புள்ளிவிவர ஆய்வுகளில் அடிக்கடி தோன்றும் கேள்வி இது. கொடுக்கப்பட்ட இரு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்தனவா அல்லது ஒருசில அளவைகளில் ஒத்த வேறுபட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்தனவா என்று அறிய விரும்புகிறோம். ஒரே முழுமைத் தொகுதியினின்று இயைபிலா முறைகளால் பிறந்த இரு மாதிரிகளில் ஒத்த அளவைகளில்கூட மாதிரி முறையின் ஏற்ற இறக்கங்கள் காரணமாக சில வித்தியாசங்கள் இருக்கலாம். கூட்டுச் சராசரி, கோட்ட அளவைகள், பரவல் அளவைகள் ஆகியவை மாறுபடலாம். இரு மாதிரி அளவைகளை (எடுத்துக்காட்டாக இரு மாதிரிகளின் தர விலக்கங்கள்) ஒப்பிடுவதன் மூலமோ, இரு மாதிரிகளின் அலைவுப் பரவல்களை முற்றிலும் ஒப்பிடுவதன்மூலமோ இந்தச் சிக்கலை அணுகலாம். மருத்துவர், வழக்கறிஞர் ஆகியோருடைய சராசரி வருமானம் சிறப்பாக

மாறுபடுகிறதா? இரு கூட்டுச் சராசரிகளின் வேறுபாட்டின் சிறப்பை அறிவதற்கான செயல்முறையைக் காண்போம்.

1943-ல் ராணுவத்தில் நுழைந்தவரது மாதிரி ஒன்றின் உயரங்களும், 1917-ல் அதுபோன்ற மாதிரி ஒன்றின் உயரங்களும் அமெரிக்க ராணுவத்தின் சர்ஜன் ஜெனரல் அலுவலக ஏடுகளில் பதிவாகியுள்ளன.[3] அதன் சுருக்கம் :

	1943 மாதிரி	1917 மாதிரி
N	67,995	868,445
சராசரி உயரம் ...	68.11 அங்குலம்	67.49 அங்குலம்
தரவிலக்கம் ...	2.59 அங்குலம்	2.71 அங்குலம்

1943, 1917 மாதிரிகள் சமமான கூட்டுச் சராசரிகளையுடைய முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து பிறந்தன என்ற எடுகோள் பொருத்தமுடையதா? அமெரிக்க ஆண்களின் வேலை வயதில் உள்ளோரின் சராசரி வயதில் 1917-க்கும் 1943-க்கும் வேறுபாடு இல்லை என்பது சூன்ய எடுகோள்.

இரு கூட்டுச் சராசரிகளுக்குமுள்ள வேறுபாடான D-ஐக் குறித்தே, நாம் அக்கறை காட்டுகிறோம். இந்தக் கணக்கில் $D = 68.11 - 67.49$ அல்லது $+ 0.62$. சூன்ய எடுகோள்படி உண்மை வித்தியாசம் 0. ஒரே கூட்டுச் சராசரி உள்ள இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து அடுத்தடுத்து இரு மாதிரிகளை எடுத்துக்கொண்டு போனால் D-க்குப் பல மதிப்புகள்—சில நேராக, சில எதிராகக்—கிடைக்கும். D-ன் மாதிரிப் பரவல் ஒன்று உருவாகும். இது இயல்நிலை விதியையொட்டி, சுழி ஆகிய சராசரி மதிப்பைச் சார்ந்து பரவலாக அமையும். இந்த மாதிரிப் பரவலின் தரவிலக்க அளவையை அறிய விரும்புகிறோம். இந்த மாதிரியின், D மாதிரிகளின் சிதறல் எப்படி உள்ளது? D-ன் சிதறல்

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}} \qquad (8.2)$$

என்பதால் தரப்படுகிறது. இதில் σ_1 என்பது முதல் மாதிரி பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கம்; σ_2 என்பது இரண்டாவது மாதிரி பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கம். இரண்டு σ-க்களும் நமக்குத் தெரியாது. மாதிரிகளில் இவற்றிற்கொத்த s-ஐ இவற்றிற்கு ஈடாகப் பயன்படுத்துகிறோம். எனவே, σ_D என்பதன்

[3] 'ராணுவத்தில் சேர்க்கப்பட்ட மனிதர்கள், புறக்கணிக்கப்பட்ட மனிதர்கள் ஆகியோரது உயரம், நிறைபற்றிய புள்ளிவிவரங்கள்.' Report No. 1-BM, Army Service Forces, Office of the Surgeon General. Medical Statistics Division.

மதிப்பீடாக

$$s_D = \sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}} \qquad (8.3)$$

என்பதைப் பயன்படுத்துகிறோம். (மாதிரிகளின் அளவு கருதி, s-ன் மதிப்பீட்டில் ஒரு வரம்பிலாப் பாகையில் இழப்பைக் கவனிக்க வேண்டியதில்லை.) (8.3) என்ற வாய்பாட்டை

$$s_D = \sqrt{s_{m_1}^2 + s_{m_2}^2} \qquad (8.4)$$

என்று எழுதலாம். s_m என்பது கொடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் சராசரியின் தரப்பிழை.

இங்கே சூன்ய எடுகோளைச் சோதனை செய்கையில் நம்பக எல்லையை 0.01 என எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். இந்தச் சோதனைக்கு வேண்டிய அளவையை (8.3)-லிருந்து பின்வருமாறு பெறலாம்.

$$s_D = \sqrt{\frac{2.59^2}{67,995} + \frac{2.71^2}{868,445}}$$

$$= \sqrt{0.000106}$$

$$= 0.01$$

சோதனை, கண்டறிந்த D-க்கும் எடுகோள் மதிப்பான சுழிக்குமுள்ள வேறுபாடான T-ன் மதிப்புகளால் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இது தரப்பிழையான D-ன் அலகுகளால் அளக்கப்படுகிறது. அதாவது,

$$T = \frac{D - 0}{s_D} \qquad (8.5)$$

$$= \frac{0.62 - 0}{0.01}$$

$$= 62.0$$

T-ன் இம் மதிப்பு இயல்நிலை விலக்கமாகக் கருதப்படுகிறது. இது ஒரு நுண்ணிய நிகழ் அளவையைக் குறிக்கிறது. 1943-ல் சேர்ந்தோருக்கும், 1917-ல் சேர்ந்தோருக்கும் எடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளில் கண்டறிந்த சராசரிகளில் வேறுபாடு சந்தர்ப்பத்தால் ஏற்பட்டது என்று கருதமுடியாத அளவு பெரியது.[4]

[4] இரண்டு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்தன என்ற எடுகோளை நாம் சோதனை செய்வதாக இருந்தால், s_1^2, s_2^2 ஆகிய இரு மாதிரி மாறுபாடுகளையும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டின் மதிப்பீடுகளாகக் கருத வேண்டும். இத்தகைய சமயத்தில், முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டின் இணைத்த ஒரே மதிப்பீட்டுக்கு அடிப்படையாக இரண்டு மாதிரிச் சராசரிகளிலிருந்து விலக்கங்களைப் பயன்படுத்துவதும், (8·3) வாய்பாட்டில் படிமூலக் குறிக்குள் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புடைய விகுதியாக இந்த ஒரே மாறுபாட்டு மதிப்பைப் பயன்படுத்துவதும் பொருத்தமானதே. இதே செயல்முறையைச் சிறிய மாதிரிகளுக்குப் பயன்படுத்துவது குறித்து (8.16), (8.17) ஆகிய வாய்பாடுகளைப் பார்க்கவும்.

இப்போது கூறிய எடுத்துக்காட்டில், இரண்டு சார்பிலா இயைபிலா மாறிகளின் வேறுபாட்டின் தரப்பிழையைப்பற்றிய ஒரு சோதனையைக் கண்டோம். முன் தந்த எடுத்துக்காட்டுகளைப் போலவே 1943ஆம் ஆண்டு மாதிரியின் சராசரியை, இயைபிலா மாறியின் ஒரு மதிப்பாகக் கருதுகிறோம். இதேபோல அதே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெற்ற மாதிரிகளின் சராசரிகள், மாறியின் பிற மதிப்புகளாம். 1917ஆம் மாதிரியின் சராசரியும் இதேபோல இயைபிலா மாறியின் ஒரு கண்டறிந்த மதிப்பாகும். பின்வரும் பொதுவிதி நிலவும்: இரண்டு சார்பிலா இயைபிலா மாறிகளின் வேறுபாட்டின் தரப் பிழையானது இவற்றின் மாறுபாடுகளின் கூடுதல் தொகையின் வர்க்கமாகும். (8.4) வாய்பாட்டினால் கிடைப்பதும் இதுவேதான் (இரண்டு சார்பிலா இயைபிலா மாறிகளின் கூடுதலின் தரப்பிழை, அவற்றின் மாறுபாடுகளின் கூடுதலின் வர்க்கமாகும்). சார்பிலா (independent) என்ற சொற்றொடர் முக்கியமானது; ஒப்பு நோக்கப்படும் மாறிகள் (இந்த எடுத்துக்காட்டில் சராசரிகள்) சார்புடையதானால், இரு மாறிகளுக்கிடையே உடன் தொடர்பின் அளவைப்பொறுத்து ஓர் அளவால், அவற்றின் வேறுபாட்டின் தரப் பிழை குறைவுபடும்; அதேபோல அவற்றின் கூடுதலின் தரப்பிழை அதிகரிக்கும்.[5] தற்போதைய சந்தர்ப்பத்தில், இந்த மாறிகள் முற்றிலும் சார்பிலாதவை. சார்புடைய மாறிக்கு எடுத்துக்காட்டாக, வரும் அத்தியாயத்தில் விவாதிக்கப்படுகின்ற கமர்ஷியல் பாங்குகள், ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்குகள் ஆகியவற்றின் தள்ளுபடி வீதங்களைப் பற்றிக் குறிப்பிடலாம். இந்த வீதங்கள் சார்பிலாதிருக்கும் இயைபிலா மாறிகள் அல்ல; ஏனெனில், ஒரு மாவட்டத்தில் கமர்ஷியல் பாங்கு வீதங்கள், அந்த மாவட்டத்தின் ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு வீதங்களால் உடனடியாகப் பாதிக்கப்படுகின்றன. இந்த இரு வீதங்களின் சராசரிகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் தரப்பிழை (8.2) வாய்பாட்டினால் கிடைக்காது.

மாதிரிகள் பெரிதாகவுள்ள இத்தகைய சோதனைகளுக்கும், மாதிரிகள் பிரித்தெடுக்கப்படுகின்ற முழுமைத் தொகுதிகள் இயல் நிலையாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. இங்கே எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட அளவு பெரிய மாதிரிகளுக்கு முழுமைத் தொகுதிகள் இயல்நிலையாக இருந்தாலும், இல்லாவிட்டாலும், சராசரிகளின் பரவல்களும், D மதிப்புகளின் பரவலும் இயல்நிலைப் பரவல் களாகவே இருக்கும். இத்தகைய சோதனைகள் முற்றிலும் திருத்த மாக இருக்கவேண்டுமானால், மாதிரிகள் அளவிலே சிறிதாகவும்

[5] 9ஆம் அத்தியாயத்தில் உடன் தொடர்புபற்றிப் பொதுக் கோட்பாடுகள் அறிமுகப்படுத்தப்படும். அந்தக் கோட்பாட்டைப்பற்றிய பழக்கமில்லாத மாணவர் தற்போதைக்கு, உடன் தொடர்பு என்பது சார்பிலாது இல்லாமை (non-independent) என்று பொருள்படுவதாகக் கொள்ளலாம்.

சமமின்றியும் இருப்பின், இந்த மாதிரிகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிகளில் மாறுபாடுகள் சமமாக இருக்கவேண்டியது அவசியம். (சிறிய மாதிரிகளுக்குத் தேவையான பிற கட்டுப்பாடுகளுமுண்டு என்பதைப் பின்னர் காண்போம்.) ஆனால், பெரிய மாதிரிகளில், முழுமைத் தொகுதி மாறுபாடுகள் சமமின்றி இருப்பின் அதனால் சோதனை பிழைபடுவதில்லை.

இரண்டு தரவிலக்கங்களுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் சிறப்பு

8-2 பட்டியலில் புதிய இங்கிலாந்திலும், தென்கிழக்கு மாநிலங்களிலும், 1946-ல் ரசாயனத் தொழிற்சாலைகளில் வேலை

பட்டியல் 8-2

1946 ஜனவரியில் நியூ இங்கிலாந்து, தென்கிழக்குப் பகுதி ஆகியவற்றில் இரசாயனத் தொழிற்சாலைத் தொழிலாளரின் மணி ஊதியப் பரவல்*

சராசரி மணி ஊதியம்† (சதங்களில்) (1)	தொழிலாளர் எண்ணிக்கை நியூ இங்கிலாந்து (2)	தென்கிழக்கு (3)
30.0— 39.9	1	0
40.0— 49.9	0	2
50.0— 59.9	23	326
60.0— 69.9	74	500
70.0— 79.9	184	368
80.0— 89.9	174	202
90.0— 99.9	119	174
100.0—109.9	312	150
110.0 - 119.9	428	154
120.0—129.9	145	72
130.0—139.9	117	22
140.0—149.9	22	6
150.0—159.9	9	4
160 0—169.9	0	8
170.0—179.9	5	4
180.0 —189.9	2	2
190.0—199.9	2	
200.0 209.9	5	
210.0 219.9	2	
220.0 229.9	1	
மொத்தம்	1,625	1,994

* ஆதாரம்: கூலிவிகித ஆராய்ச்சிப் பிரிவு, U.S. பீரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ்.

† அதிகநேர வேலை, இரவு வேலை, ஆகியவற்றுக்கான மிகுதிப்படியான தொகைபோக மற்றது.

செய்வோரின் பரவல் மணி ஊதிய அடிப்படையில் தரப்பட்டுள்ளது. இரு மாகாணங்களிலும் மணி ஊதிய சராசரி குறிப்பிடத்தக்க அளவுக்கு வேறுபாடுடையதாக இருக்கிறது. நியூ இங்கிலாந்து தொழிற்சாலைகளில் சராசரி விதம் மணிக்கு 104.50 சதம். தென் கிழக்கில் 80.81 சதம். இரு மாநிலங்களிலும் கூலிப்பரவலின் தரவிலக்கங்கள் சிறப்பாக வேறுபடுகின்றனவா ?

இரு சார்பிலாத இயைபிலா மாறிகளில் வேறுபாட்டின் தரப்பிழை, அவற்றின் மாறுபாட்டின் கூடுதலின் வர்க்கமாகும் என்று மேலே குறிப்பிட்டோம். இங்கே நாம் எடுத்துக்கொண்டுள்ள இயைபிலா மாறிகள் தரவிலக்கங்களாகும். ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட அடுத்தடுத்த மாதிரிகளின் தரவிலக்கங்கள் முழுமைத் தொகுதியின் இரு உறுப்புகளாகும். தரவிலக்கங்கள் ஒவ்வொன்றின் மாறுபாடும் தரப்பிழையின் வர்க்கமாகும். எடுத்துக் கொண்டுள்ள கணக்குக்கு இவ் விதி பொருந்தும்.

$s_{s_1 - s_2}$ என்ற குறியீட்டை இரண்டு தரவிலக்கங்களுக்குமுள்ள வித்தியாசத்தின் தரப்பிழையாகவும், $s^2_{s_1}$; $s^2_{s_2}$ ஆகியவற்றை இந்தத் தரவிலக்கங்களின் மாறுபாடாகவும் குறிப்போம். இதன் மூலம்

$$s_{s_1 - s_2} = \sqrt{s^2_{s_1} + s^2_{s_2}} \tag{8.6}$$

எனக் கிடைக்கிறது. முழுமைத் தொகுதிகள் இரண்டும் இயல் நிலையாக இருந்தால், அவற்றின் தரவிலக்கத்தை $s^2_s = \dfrac{s^2}{2N}$ என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து மதிப்பீடு செய்யலாம். s என்ற வலப்புற உறுப்பு மாதிரியின் தரவிலக்கம்; இது முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கத்துக்கு ஒரு மதிப்பீடாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. பட்டியல் 8-2-ல் தரப்பட்டுள்ள இரண்டு பரவல்களும் இயல்நிலைவகை எனக் கூறமுடியாததலால், இரண்டு தரவிலக்கங்களின் மாறுபாடுகளின் மதிப்பீட்டைக் காண முன்கூறிய வாய்பாட்டின் பொதுப்படையான

$$s^2_s = \frac{m_4 - m_2^2}{4m_2 \cdot N}$$

என்ற உறவைப் பயன்படுத்தலாம். இரு ரசாயனத் தொழிற் சாலைத் தொகுதிகளில் ஊதியம் பெறுவோர்பற்றிய ஒப்பீட்டு அளவைகள் பின்வருமாறு:

நியூ இங்கிலாந்து	தென்கிழக்கு
$s = 23.16$	$s = 22.72$
$s^2_s = 0.336$	$s^2_s = 0.193$

தரவிலக்கங்களின் வேறுபாடு 0.44; இந்த வேறுபாட்டின் தரப்பிழை,

$$s_{s_1 - s_2} = \sqrt{0.336 + 0.193} = 0.727$$

என்பதாகும். இதனைத் தரப்பிழை அலகுகளால் கூற,

$$T = \frac{0.44}{0.727} = 0.605$$

என்று வரும். எனவே, இரண்டு தரவிலக்கங்களுக்கு மிடையேயுள்ள வேறுபாடும் சிறப்புடையது அன்று என்பது தெளிவு.[6]

வீதங்களுக்கிடையே வேறுபாட்டின் சிறப்பு

வீதங்கள், சதவீதங்கள் ஆகியவற்றை ஒப்புநோக்கிச் சோதனை செய்வதும் நடைமுறையில் அதிகப் பயனுடையது. இரு தொழில் துறைகளில் ஒருசமயத்தில் வேலைவாய்ப்புப்பெருத தொழிலாளர்வீதம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. இந்த வேறுபாடு வீதங்களுக்கிடையே யுள்ள நிகழ்திறத்தின்பாற்பட்டது. அல்லது வேலைவாய்ப்பு இரு தொழில் துறைகளிலும் உண்மையிலேயே வேறுபாடுடையதா ? சிறு தொழில் சுழற்சிகளின் (cycle) சதவீதம் கிரேட் பிரிட்டனைப் பார்க்க அமெரிக்காவில் குறைவாகவுள்ளது.

f_s/n (f_s வெற்றியின் அலைவு; n நிகழ்ச்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை) என்ற வீதத்தின் தரப்பிழை

$$\sigma_p = \sqrt{pq/n} \qquad (8.7)$$

என்பதாகும்; p கொடுக்கப்பட்ட வீதம்; q என்பது $1 - p$. ஒப்பீட்டு அலைவுகள் அல்லது வீதங்களின் வேறுபாடுதான் இவ்வகைக் கணக்குகளில் ஆய்வுக்குரிய பொருள். இரண்டு ஒப்பீட்டு அலைவுகளும் ஒன்றுரெடொன்று சார்பில்லாது இருந்தால் இரண்டு இயைபிலா மாறிகளின் வேறுபாட்டின் தரப்பிழைக்கு முன்கூறிய விதியினைப் பயன்படுத்தலாம். இரு வீதங்களில் ஒவ்வொன்றையும் இயைபிலா மாறிகளின் தொடரில் ஓர் உறுப்பாகக் கருதலாம். இதற்குரிய சூன்ய எடுகோளை ஆராயும்போது முதல் மாறியின் வேறுபாடு $\bar{p}\bar{q}/n_1$; இரண்டாவது மாறுபாடு $\bar{p}\bar{q}/n_2$. (நிறையிட்ட சராசரி வீதமான ($\bar{p}$) என்ற $\dfrac{n_1p_1 + n_2p_2}{n_1 + n_2}$, முழுமைத் தொகுதியின் p-க்குச் சிறந்த மதிப்பீடு.) இரண்டு மாறிகளும் n ஆல்தான் வேறுபட்டவை; ஏனெனில் இரண்டுமே ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்தன.

[6] 16ஆவது அத்தியாயத்தில், தரவிலக்கங்கள் வேறுபாடுகள் ஆகியவற்றை ஒப்பிடும் கணக்குகள் பலவற்றைக் காண்போம். பிற, ஆய்வுக் குறைகளையும் உருவாக்கிக் காட்டுவோம்.

எனவே,

$$s_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n_1}+\frac{\bar{p}\bar{q}}{n_2}} \qquad (8.8)$$

இதில் $s_{p_1-p_2}$ என்பது இரண்டு வீதங்களுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் தரப்பிழை.

இச் சோதனையின் பயனை விளக்க, 1933-38 காலகட்டத்தில் ஒரு ஸ்டாக் எக்ஸ்சேஞ்ச் நிறுவனத்தின் வாடிக்கைக்காரர்களின் பொருளாதார அனுபவம்பற்றி வெண்ட் (Wendt) செய்த ஆய்வின் விளைவாகக் கிடைத்த விவரங்களைப் பயன்படுத்துவோம். 285 வாடிக்கைக்காரர்கள் அடங்கிய மாதிரியை வெண்ட் இரு வகையாகப் பிரித்தார்; பத்திரங்களிலும், லாப ஈவு தருகின்ற சாதாரணப் பங்குகளிலும், சலுகைப் பங்குகளிலும் பெரும்பாலும் தொடர்புடைய 'முதலீட்டு'த் தொகுதியாகவும், குறைவு விலையிலமைந்த ஊகப் பங்குகளில் (speculative shares) பெரும்பாலும் தொடர்புடைய 'ஊகத்' தொகுதியாகவும் பிரித்தார்.[7] முதலீட்டுத் தொகுதியைச் சேர்ந்த 98 வாடிக்கைக்காரர்களில் 68 பேர் லாபமடைந்தனர். 30 பேர் இழப்படைந்தனர். [இந்த லாபமும் இழப்பும் பணமாக்கிய (realized) கணக்கு குறித்தது. லாப இழப்புப் புத்தகத்தினை நேர் செய்த பின்னர் முடிவு இன்னும் பாதகமாக இருந்தது.] எனவே, $p_1 = 68/98$ அல்லது 0.694; $q_1 = 1-0.694 = 0.306$. 105 வாடிக்கைக்காரர்கள் கொண்ட ஊகத் தொகுதியில் 187 பேர் லாபமும் 82 பேர் இழப்பும் அடைந்தனர். எனவே, $p_2 = 105/187 = 0.561$; $q_2 = 0.439$. இங்குக் கண்ட மாதிரியின்படி முதலீட்டுத் தொகுதி ஊகத் தொகுதியினைவிட லாப கணக்குக்கு ஆதாயம் தருகிறது.

p_1-க்கும் p_2-க்குமுள்ள வேறுபாடு $0.694-0.561 = 0.133$. இந்த வீதங்களிலுள்ள வேறுபாடு, அவற்றின் 'முழுமைத் தொகுதியின்' வேறுபாட்டினால் விளைவதா? இந்தச் சோதனையில் 0.01 என்ற சிறப்பு வரம்பைப் பயன்படுத்துவோம்.

வெண்ட் சோதனைகளில் எளிய மாதிரி முறை (simple sampling — பக்கம் 260) கையாளப்படுவதாகக் கொண்டால், 8.8 வாய்பாட்டில் தரப்படும் உறவினால் இரண்டு வீதங்களுக்குள்ள வேறுபாட்டின் தரப்பிழையைக் காணலாம். வீதங்களின் நிறையிட்ட சராசரி $\bar{p} = 0.607$, $\bar{q} = 0.393$. எனவே,

$$s_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{0.2386}{98}+\frac{0.2386}{187}}$$

$$= 0.061$$

[7] வெண்ட் நூ.நா.ப. பக்கங்கள் 149-158. இங்கே 'ஊகத்' தொகுதி என்று நான் கூறியுள்ளது, வெண்ட் கூறிய 'முற்றிலும் ஊகத்' தொகுதி என்ற தொகுதியையே.

இரண்டு வீதங்களுக்குமுள்ள கண்டறிந்த வேறுபாடு 0.133. சூன்ய எடுகோளை அமைத்து இரண்டு ஒப்பீட்டு அலவுகளுக்கும்—அவை பிறக்கின்ற முழுமைத் தொகுதிகள்—இடையேயுள்ள உண்மை வேறுபாடு சுழி என்று கருதுவோம். சிறப்புகாண் சோதனையைச் செய்யும்போது 0.133 என்பது 0 சராசரியும், 0.061 தரவிலக்கமுமுடைய இயல்நிலையாகப் பரவியுள்ள மாறியின் தனித்த அளவையாகக் கருதலாமா என்பதே கேள்வி. (p_1—p_2 என்ற அளவையில் பரவல் பெரிய மாதிரிகளுக்கு இயல்நிலைத் தன்மையை அடையும். சிறிய மாதிரிகளுக்கு இது பொருந்தாது என்றாலும், இந்த எடுத்துக்காட்டில் இயல்நிலைத் தன்மையைப் புனைந்து கொள்வோம்.) கண்டறிந்த விவரங்களுக்கும் எடுகோள் விவரங்களுக்குமுள்ள வேறுபாட்டை வேறுபாட்டின் தரப்பிழை அலகுகளாகக் கூறினால்,

$$T = \frac{0.133 - 0}{0.061} = 2.18$$

என்று வரும். இதுபோன்ற அல்லது இதனினும் பெரிதான விலக்கம் தற்செயல் ஏற்ற இறக்கங்களின் காரணமாக 100 தடவைகளுக்கு 2.9 தடவை வருகிறது. 0.01 என்ற கட்டளை விதியை இங்கே எடுத்துக்கொண்டால், எடுகோளை ஏற்காது தள்ளுபடி செய்வது முறையன்று. இந்த வேறுபாடு, மூலதனப் பிரிவு எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதி, ஊகப்பிரிவு தோன்றிய 'முழுமைத் தொகுதியை'விட ஆதாயத்தில் மேம்பட்டு விளங்குகிறது என்பதைத் தோற்றுவிக்குமளவு பெரியதுதான்; என்றாலும், இந்த வேறுபாடு தெளிவான சிறப்பைப் பெற்றிருக்கவில்லை.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டில், p, q ஆகியவற்றின் 'முழுமைத் தொகுதி' மதிப்புகளும், முழுமைத் தொகுதி ஒன்றிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரி ஒன்றிலிருந்து மதிப்புகளும் தரப்பட்டுள்ளன. வோர்ல்ட் ஆல்மனக்படி (World Almanac) அமெரிக்க நாட்டிலுள்ள ஆண்களில், மொத்தத்தில் 8.28 சதவீதத்தினர் ஜான் என்று பெயரிடப்பட்டிருக்கின்றனர். 0.43 சதவீதத்தினர் கிளாரன்ஸ் எனப் பெயரிடப்பட்டிருக்கின்றனர். ஸ்மித், பிரௌன், ஜோன்ஸ் போன்று பொதுவாக வழங்கப்படும் குடும்பப் பெயர்களையுடைய 400,000 ஆண்கள் கொண்ட மாதிரியில் 5.48 சதவீதம் ஜான் எனவும், 1.04 சதவீதம் கிளாரன்ஸ் எனவும் பெயர் கொண்டுள்ளனர். இந்த வீதங்களால், பொதுவான குடும்பப் பெயருடையவர்கள் பொதுவான குடும்பப் பெயரில்லாதார்களினும் பார்க்கத் தங்கள் புதல்வர்களுக்கு வழக்கிலிருக்கும் பெயர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பது குறைவாக இருக்கிறது என்றும், ஒப்பீட்டு அடிப்படையில் வழக்கத்தில் அதிகமாக இல்லாத பெயர்

களைத் தேர்ந்தெடுப்பது அதிகமாக இருக்கிறது என்றும் தெரிகிறது. இந்த எடுத்துக்காட்டில் முழுமைத் தொகுதி மதிப்பொன்று தெரிவதால், $\sqrt{pq/n}$ என்ற ஒப்பீட்டு அலைவுகளின் பரவலின் தர விலக்கத்துக்கான பொது வாய்பாட்டிலிருந்து வீதத்தின் தரப் பிழையை மதிப்பீடு செய்யலாம். ஜான் என்ற பெயருடைய ஆண்கள் மாதிரியில் இருக்கும் வீதமான 0.0548, முழுமைத் தொகுதியின் வீதமான 0.0828-லிருந்து அதிகமாக மாறுபட்டதா? என நாம் கேட்கலாம். இந்த அளவினை உடைய மாதிரியில்,

$$s_p = \sqrt{\frac{0.0828 \times 0.9172}{400{,}000}} = 0.000436.$$

p, q என்ற முழுமைத் தொகுதி மதிப்புகளையும், மாதிரியின் N (சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை) என்பதற்குப் பதிலாக n என்ற மதிப்பையும் வாய்பாட்டில் பயன்படுத்துகிறோம். சோதனை பின்வரும் உருவம் பெறுகிறது :

$$T = \frac{p_0 - p_a}{s_p} \tag{8.9}$$

இதில் p_0 என்பது 400,000 பேர் அடங்கிய மாதிரியில் ஜான் என்னும் பெயரையுடைய ஆண்களின் வீதம்; 400,000 பேர் அடங்கிய மாதிரியில் ஜான் என்னும் பெயரை ஓர் ஆண் தாங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்வாய்ப்பு அதே பெயரை முழுமைத் தொகுதியில் தாங்கியிருப்பதற்கான நிகழ் வாய்ப்பிலிருந்து வேறில்லை என்ற எடுகோளின் அடிப்படையில் எதிர்பார்க்கப்படும் வீதம், p_a என்பது; s_p என்பது 400,000 பேர் அடங்கிய மாதிரியின் வீதத்தின் தரப்பிழை. இந்த எடுத்துக்காட்டில்

$$T = \frac{0.0548 - 0.0828}{0.000436} = -64.2$$

T-ன் இந்த மதிப்பை இயல்நிலை விலக்கமாகக் கருதினால், இந்த அளவுக்கு இது பெரிய விலக்கமாக இருப்பது சாத்தியமன்று. ஜான் என்ற பெயர், மொத்தத்தில் முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்பினர்களுக்கு வழங்கப்படுவதைவிடப் பொதுவான குடும்பப் பெயர்களுடைய குடும்பத்தினர்க்கு வழங்கப்படுவதற்கு, நிகழ்திறம் சிறப்பாகக் குறைவுபட்டு இருக்கிறது. கிளாரன்ஸ் என்ற பெயரின் வீதத்தைப்பற்றி இதேபோலச் சோதனை செய்து பார்த்தபோதிலும், மாதிரியில் காணப்படும் வீதம் முழுமைத் தொகுதியில் காணப்படும் வீதத்தை விடச் சிறப்பான வேறுபட்ட நிலையைக் காட்டியது; இதில், முழுமைத் தொகுதி வீதத்தினும் மாதிரி வீதம் அதிகப்படியாக இருந்தது.

சிறிய மாதிரிகளிலிருந்து பொதுமையான முடிவுகளைக் காணல்; t-பரவல்.

முந்தைய பக்கங்களில் கண்ட சோதனைகளைப் பயன்படுத்துகையில், n அதிகரிக்கும்போது புள்ளிவிவர மாதிரிப் பரவல்கள் இயல்நிலைத் தன்மையை அணுகுகின்றன என்ற பயனுள்ள அடிப்படைக் கருத்தைக் கையாண்டோம். இயல்நிலைக்கு அணுகுவதுபற்றிய அடிப்படையிலேயே, மாதிரிப் பரவல்களின் உண்மையான அமைப்பைப்பற்றியோ, அவை பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் உண்மையான அமைப்பைப்பற்றியோ, தனியாக அக்கறை காட்டாது பெரிய மாதிரிகளிலிருந்து பெற்ற அளவைகள் பலவற்றிற்குச் சிறப்புகாண் சோதனைகளைச் செய்தோம். ஆனால், பெரிய மாதிரிகளுக்குப் பொருத்தமாகவுள்ள அதே நடைமுறைகள், மாதிரி சிறிதாக இருக்கும்போது, திருத்தம் இல்லாமலும் தோராயமாகவும் இருக்கின்றன. 6 அல்லது 8 குறிப்புகளையுடைய மாதிரிகளிலிருந்து முடிவு எடுக்க வேண்டியிருக்கும்பொழுது, ஆயிரம் குறிப்புகளைக் கொண்ட மாதிரியின் அளவை இயல்நிலைத் தன்மை உடையதாய் இருக்கிறது என்ற செய்தி பயனைப் போவதில்லை. அத்தகைய சமயத்தில் குறிப்பிட்ட முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரி அளவைகளின் பரவல்கள்பற்றி திட்டவட்டமான செய்திகள் தெரிந்தால்தான் மேற்கொண்டு பொருத்தமான முடிவுகள் எடுப்பதற்கு இயலும். 'ஸ்டூடன்ட்' '(Student)' (W. S. Gosset), R. A. ஃபிஷர் (R. A. Fisher) முதலியோர் பல ஆராய்ச்சிகளைச் செய்துள்ளனர். எனினும், திருத்தமான மாதிரிப் பரவல்களைப் (exact sampling distributions) பற்றி நமது அறிவு இன்னும் குறைபாடுடையதாகவே இருக்கிறது. முக்கியமில்லை என்று திட்டமாகக் கூற முடியாத சில துறைகளில், சிறிய மாதிரிப் பரவல்களின் அடிப்படையில் பொதுமையான முடிவுகளை ஓரளவு நம்பகத்துடன் காண்பது முடியும். முதன்முதலில் திருத்தமாக வரையறை செய்யப்பட்டதான ஒரு மாதிரிப் பரவலை விளக்கிக் கூறி அதன் பயன்களைக் காண்போம்.

முந்தைய பக்கங்களில் மாதிரிச் சராசரி முழுமைத் தொகுதியினின்று பெற்றுள்ள விலக்கம் தரவிலக்க அலகுகளால் அளக்கப்பட்டால் கிடைக்கும் T என்ற அளவையை இயல்நிலை விலக்கமாக எடுத்துக் கொள்ளலாம் என்ற அடிப்படைக் கருத்தைப் பயன்படுத்தியிருக்கிறோம். அதாவது,

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_m} \tag{8.10}$$

மாதிரியில் கிடைத்த விவரங்களைமட்டும் அடிப்படையாகக் கொண்டு, சராசரியில் தரப்பிழைக்குச் செய்த மதிப்பீடான σ_m

என்பதை s_m-க்குத் தோராயமாக எடுத்துக்கொள்ளக்கூடிய பெரிய மாதிரிகளில்கூட T என்பதை இயல்நிலை விலக்கமாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். T என்பதின் வாய்பாடு பின்வருமாறு வரும்:[8]

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{N - 1}} \qquad (8.11)$$

இதில் s என்பது மாதிரியின் தரவிலக்கம். T என்பதை, $\bar{X} - \mu$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்த விலக்கமானது, அதன் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட தரப்பிழையான $s/\sqrt{N-1}$-க்கு உள்ள வீதமாகக் கருதலாம். s என்பதற்குப் பதிலாக s'ஐப் பயன்படுத்தினால் ($s' = \sqrt{\Sigma d^2 / N - 1}$)

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{s' / \sqrt{N}}$$

என வரும்.

N என்பது 30 அளவுக்குப் பெரிதாக இருக்குமானால் T என்பதை இயல்நிலை விலக்கமாகக் கொள்வதில் அதிகப் பிழை நேராது; கோடி மதிப்புகளிடையேதான் சிறு பிழைகள் நேரும். N என்பது 100 அளவுக்குப் பெரிதாக இருக்குமானால் பிழை மிகமிகக் குறைவாகும். ஆனால், N என்பது சிறிதாக இருக்கும்பொழுது, T-க்குத் தரப் பட்ட மேற்சொன்ன கோவை இயல்நிலை விலக்கமாக அமையாது. ஓர் உறுதியான பிறழ்ச்சி இடம் பெற்றுவிடுகிறது. இதனால் இயல் நிலையிலிருந்து விலக்கம் நிலைபெறுகிறது. மிகச் சிறிய மாதிரிகளில் கணிசமான அளவுக்கு விலக்கம் நேரிடுகிறது. இத்தகைய சிறிய மாதிரிகளுக்குப் பெரிய மாதிரிகளில் கையாளப்பட்ட முறைகள் பொருந்தாது. இயல்நிலைக்குள்ள அணுக்கம் மிகவும் குறைவுபடு மாதலால், அந்த ஆதாரத்தைக் கொண்ட முறைகளைப் பயன்படுத்து வதற்கு வலுவில்லை.

'ஸ்டூடன்ட்' (Student) என்பாரது பணி

இந்த நூற்றாண்டில் முதல் பத்தாண்டுகளில் 'ஸ்டூடன்ட்' என்ற புனைப் பெயரில் எழுதிய டபிள்யூ. எஸ். காஸ்ட் (W. S. Gosset) என்பவர், சாதாரணமாக நாம் வழங்கும் வீதத்தைச் (இதனை T என்று முன்னர் குறிப்பிட்டோம்) சிறு மாதிரிகளுக்குப் பயன்படுத்தும் போது பொருந்தாமல் ஏற்படும் குறைபாடுகளை உணர்ந்தார். மாதிரியிலிருந்து பெறப்பட்ட தரவிலக்கமான s என்பது நிலையி னின்று விலகுவதினாலேயே இந்தக் குறைகள் பிறக்கின்றன

[8] இங்கே நான் பயன்படுத்தியுள்ள T என்ற குறியீட்டைப் பொதுமையான ஸ்டூடன்ட் வீதத்துக்கு வழங்கப்படும் ஹோட்டலிங்ஸ் T (Hoteling's T) என்பதி லிருந்து வேறுபடுத்திக் காண்க.

என்பதை அவர் கண்டறிந்தார்.[9] சிறு மாதிரிகளில், s-களின் பரவலை அமைக்கும்போது, அவை இயல்நிலை அமைப்பிலிருந்து ஓர் ஒழுங்குடன் பிறழ்ச்சி அடைவதை அவர் கண்டார். இதனால் σ என்பதை மதிப்பீடு செய்வதில் திருத்தக் குறைவு ஏற்படுகிறது. இதனால் சராசரியின் தரப்பிழையை மதிப்பீடு செய்வதில் குறைபாடுகள் நேர்கின்றன. இதே முறை பெரிய மாதிரிகளுக்குப் பொருந்திவந்த போதிலும், சிறிய மாதிரிகளில் பொருந்திவருவதில்லை. s^2 என்பதன் மாதிரிப் பரவலை ஸ்டூடன்டு அமைத்துக் காட்டினர். பின்னர் z என்னும் அளவாகக் குறிக்கப்படும் $\frac{(\bar{X} - \mu)}{s}$ என்ற வீதத்தின் பரவலை அவர் ஆராய்ந்தார். அந்தப் பரவலைத் திருத்தமாகக் கண்டறிந்ததன்மூலம், ஸ்டூடன்ட் மாதிரிக் கொள்கையில் முன்னேற்றம் ஒன்றுக்கு வித்திட்டார். (பார்க்க, ஸ்டூடன்ட் து.நூ.ப. 153, 1908.) 17 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் R. A. ∴பிஷர் என்பவர் ஸ்டூடன்டின் விகிதத்திற்கு இன்னும் திருத்தமான கருதுகோள் அடிப்படையை நிறுவினர். அத்துடன் இப்போது பொதுவாக வழக்கத்திலிருக்கும் விகிதத்தின் அமைப்பினை மாற்றி அமைத்தார். அதாவது,

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{N-1}} \qquad (8.12)$$

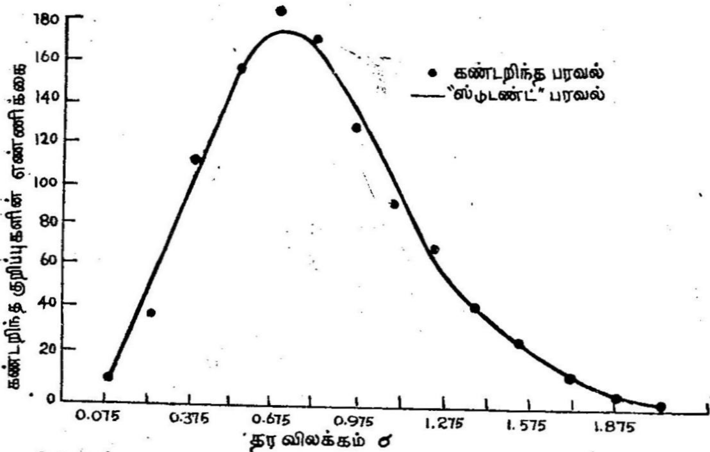
இதில் $\bar{X}$ என்பது மாதிரியின் சராசரி; அந்த மாதிரி பிறந்த முழுமைத் தொகுதிக்கு μ என்பது சராசரி; s என்பது மாதிரியின் தரவிலக்கம். ($\sqrt{\Sigma d^2/N}$ என்பதிலிருந்து பிறந்தது.)[10] N என்பது மாதிரியிலுள்ள குறிப்புகளின் எண்ணிக்கை. (இந்த வாய்பாட்டின் தனிச் சிறப்பானது, தொகுதியில் பயனுகும் s, மாதிரியில் பயனுகும் s ஆகும்; இது முழுமைத் தொகுதியின் σவுக்கு மதிப்பீடாக அன்று. t என்பதனைத் தீர்மானிக்க முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கம் பயன்படுவதில்லை.) t என்ற அளவை $z\sqrt{N-1}$ என்பதற்குச் சமம் என்பது தெளிவு; இதில் z என்பது முன்பு ஸ்டூடன்ட் வரையறை செய்த விகிதமான $\frac{(\bar{X} - \mu)}{s}$. (ஸ்டூடன்ட் t என்றும், ∴பிஷர் t என்றும் அழைக்கப்படுகிற) t என்பதன் மாதிரிப் பரவல், மாதிரி முறை

[9] S^2-ன் மாதிரிப் பரவலை எஃப். ஆர். ஹெல்மர்ட் (F. R. Helmert) என்பார் முப்பது ஆண்டுகளுக்கு முன்னரே கண்டுபிடித்திருந்தது காஸட்டுக்குத் தெரியாது. பார்க்க, டெமிங் அண்டு பெர்ஜ், து.நூ.ப. 31.

[10] s-க்குப் பதிலாக, $\sqrt{\Sigma d^2/N-1}$ என்பதிலிருந்து பெற்ற s' ஐப் பயன்படுத்தினல், t என்பது $\frac{\bar{X} - \mu}{s'/\sqrt{N}}$ என்பதிலிருந்து கிடைக்கும்.

யின் அடிப்படைக் கருவிகளில் ஒன்ருகும். மாதிரிகள் சிறியனவாக இருக்கும்பொழுது, s-ல் ஏற்படும் பிறழ்ச்சியின் தன்மையினை முதலில் கண்டறிந்து, பின்னர் இந்தப் பரவலையும் அதன் பயன்களையும் ஆராய்வோம்.

டபிள்யூ. ஏ. ஷெவ்வார்ட் (W. A. Shewhart) என்பவர் நிகழ்த்திய சுவையான சோதனை ஒன்றின்மூலம் s என்பதன் மாதிரிப் பரவலின் முக்கியமான பண்புகள் வெளியாகின்றன.[11] தரவிலக்கம் ஒன்று எனக் கண்டறிந்த ஓர் இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து நான்கு குறிப்புகள்கொண்ட ஆயிரம் மாதிரிகளை ஷெவ்வார்ட் தேர்ந்தெடுத்தார். ஒவ்வொரு மாதிரியின் தரவிலக்கத்தையும் Σd^2 என்பதை 4ஆல் வகுத்துக் கணக்கிட்டார். 8.2 படத்தில் s-ன் இந்த 1,000 மதிப்புகளின் பரவலும் புள்ளிகளாகக் குறித்துக் காட்டப்பட்டுள்ளது.[12] (ஸ்டுடன்டின் கோட்பாட்டு அடிப்படையில்



8.2. படம்.

இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுத்து நான்கு குறிப்புகள் கொண்ட மாதிரிகள் பலவற்றின் தரவிலக்கங்களின் பரவல்.

நான்கு குறிப்புகள்கொண்ட மாதிரிகளுக்கு எதிர்பார்க்கப்படுகின்ற s-களின் எடுகோள் பரவலை, புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் கோடு வரையறை செய்கிறது. எடுகோள் பரவலுக்கும், கண்டறிந்த பரவலுக்குமுள்ள நெருங்கிய ஒற்றுமை தெளிவாகிறது.) முழுமைத்

[11] டபிள்யு. ஏ. ஷெவ்வார்ட்: து.நா.ப. 140, 163-173, 185-6.

[12] டாக்டர் ஷெவ்வார்ட், அவரது பதிப்பகத்தார் ஆகியோர் இசைவுடன் இங்குக் காணும் விளக்கப் படம் மீண்டும் பதிப்பிக்கப்படுகிறது.

தொகுதியின் σ மதிப்பான ஒன்றையொட்டி, s-களின் இயல்நிலைப் பரவல் அமையவேண்டும் என்று சாதாரணமாக வழக்கத்திலுள்ள மாதிரிக் கோட்பாடுகளின் அடிப்படையில் எதிர்பார்க்கிறோம். ஆனால், பரவலோ கோட்டம் உடையதாக இருக்கிறது ; ஒன்றுக்கும் குறைவான மைய மதிப்பைச் சார்ந்தே அளவுகள் நெருக்கமாகக் காணப்படுகின்றன. s-ன் 1,000 மதிப்புகளின் முகடு இங்கே கண்டுள்ளபடி 0.717; கூட்டுச் சராசரியோ 0.801. நான்கு எண்ணிக்கைகள் கொண்ட மாதிரிகளில் கிடைக்கும் s-களின் மதிப்புகள் உண்மை மதிப்புகளுக்குச் சற்றுக் குறைந்தே இருக்கின்ற போக்கு தெளிவாகக் காணப்படுகிறது. σ என்பதன் மதிப்பீடுகளாக, அவைகள் மெய்யாகவே பிறழ்ச்சியுள்ளன.[13]

[13] டபிள்யூ. ஏ. ஷெவ்வார்ட் (loc. cit., 185) என்பவர் சிறிய மாதிரிகளுக்கு σ-வின் தோராயமாக s ஐப் பயன்படுத்துவதில் ஏற்படும் பிழைகளின் அளவாகக் குறித்த விவரங்கள் பின்வருமாறு: தரவிலக்கம் தெரிந்த முழுமைத் தொகுதி ஒன்றினின்று எடுக்கப்படும் N அளவுள்ள மாதிரிகளின் முகட்டு மதிப்பான s-க்கும், அந்த முழுமைத் தொகுதியின் உண்மையான σ-வுக்குமுள்ள உறவை இவை வரையறை செய்கின்றன.

மாதிரியின் அளவு N	உண்மையான σ மதிப்புக்கு முகட்டு s-ன் விகிதம் (தசாம்ச பின்னமாக)
3	.577
4	.707
5	.775
6	.817
7	.845
8	.866
9	.882
10	.894
15	.931
20	.949
25	.959
30	.966
50	.980
100	.990

சிறிய மாதிரிகளைப் பாதிக்கும் சூழ்நிலைகளையொட்டி ஸ்டூடன்ட் அமைத்த பிழைக் கொள்கையின் ஆதாரத்தில், எதிர்பார்க்கப்படும் உறவுகளை மேற்கண்ட பின்னங்கள் வரையறை செய்கின்றன. மேலே கண்டபடி இந்தக் கொள்கையை நடைமுறையில் சோதனை செய்த ஷெவ்வார்ட்டின் 1,000 தரவிலக்கங்களின் முகட்டு மதிப்பானது, முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கத்தில் 0·717 பங்கு. N என்பது நான்காக இருக்கும் மாதிரிகளில் எதிர்பார்க்கப்பட்ட மதிப்பான 0·707 மதிப்பிற்கு மேற்குறிப்பிட்ட மதிப்பு மிகவும் நெருங்கிக் காணப்படுகிறது.

t என்பதன் பரவல்

t என்பதன் தன்மையும், அதன் பரவலின் அமைப்பும்பற்றிச் சுருங்கக் காண்போம்.

$$\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{N-1}} \tag{8.13}$$

என்பதன் பகுதியான t என்பது சராசரியாகச் சுழியையுடைய இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்த மாறி; தொகுதி அந்த மாறியின் மாறுபாட்டினுடைய, சார்பிலாத பரவலாக அமைந்த மதிப்பீட்டின் வர்க்கமூலமாகும். (தொகுதியை மாறியின் தரப்பிழை என்று கூருது, சம்பந்தப்பட்ட மாறியின் மாறுபாட்டின் வர்க்கமூலம் என்று கூறுகிரோம். ஏனெனில், 'தரப்பிழை' என்ற சொல் இயல்நிலை விலக்கமாக அமைந்த விகிதத்தினைக் குறிக்கும். N சிறியதாக இருக்கும்பொழுது அங்ஙனம் எடுத்துக்கொள்வது பொருந்தாது என்பதை முன்னரே குறித்தோம்.) 'சார்பிலாத பரவலாக அமைந்த' என்ற சொற்றொடரைக் கவனிப்போம். இதன் பொருளாவது (8.13) என்ற கோவையின் பகுதியில் அமைந்த மாறிகளின் பரவலும், தொகுதியில் அமைந்த மாறிகளின் பரவலும் சார்பில்லாதன என்பதாகும். இது ஒரு முக்கியமான நிபந்தனையாகும். $\bar{X}$-ம் s^2-ம் சார்பிலாத மாறிகளாக இருக்கும்பொழுதுதான் (8.13) வாய்பாட்டின்மூலம் கொடுக்கப்படுகின்ற விகிதம் ஸ்டூடன்டாலும், ∴ பிஷராலும் வரையறை செய்யப்பட்ட வகையில் பரவலாக இருக்கும். இந்த நிபந்தனை இயல்நிலையாக அமைந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளுக்கே பொருந்தும். இவ்விதமாகப் பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரி ஒன்றில் $\bar{X}$ சிறிதாகவும் (μ-க்கு மதிப்பில் மிகக் குறைந்தும்), s^2 பெரியதாகவும் (σ^2-க்கு மதிப்பில் மிக உயர்ந்தும்) இருக்கலாம். இன்னும் ஒரு மாதிரியில் $\bar{X}$ பெரிதாகவும், s^2 சிறிதாகவும் இருக்கலாம். மூன்ருவது மாதிரியில் இரண்டும் சிறியனவாகவோ அல்லது இரண்டும் பெரியனவாகவோ இருக்கலாம். இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளுக்கு t-ன் மாதிரிப் பரவலை முற்றிலும் திருத்தமாகப் பயன்படுத்துவதற்குக் கட்டுப்பாடிருந்தே தீரும்.

t வீதத்தைப் பெறுவதில், முழுமைத் தொகுதியின் அளவை எதுவும் பயனுவதில்லை என்பதை முன்னரே கவனித்தோம். அதாவது, புனைந்துகொள்ளப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியிலிருந்து மாதிரிச் சராசரியின் விலக்கத்தினைச் சோதனை செய்ய T ஐக் கணக்கிடும்போது (8.10 வாய்பாடு), σ வைப் பயன்படுத்துகிரேம். σ தெரியாதபோது s' பயன்படுத்துகிரேம்; இது மாதிரியிலிருந்து பெறப்பட்ட அளவையாயினும், σ-வுக்குத் தோராய

மாக உபயோகிக்கப்படுகிறது. ஆனல் t-ன் கணிப்பில் மாதிரிச் சராசரியும் மாதிரியின் தரவிலக்கமும் (அதோடு N-ம்) மட்டுமே பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இங்கேதான் இதன் தனிச் சிறப்பு அமைந்துள்ளது. t-ன் கருதுகோள் பரவல் கண்டறிந்த குறிப்புகளிலிருந்து பெறுகின்ற அளவையினைப் பொருத்ததாகும்.

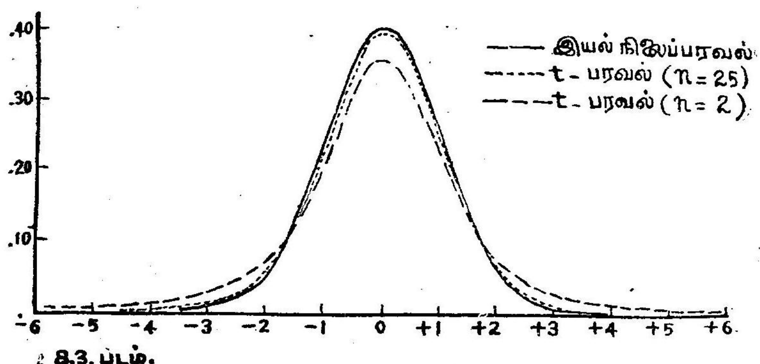
t-ன் பரவலைப் பின்வரும் சமன்பாட்டால் வரையறை செய்யலாம் :

$$y = \frac{y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} \qquad (8.14)$$

இந்தக் கோவையில், t-ன் அளவுத் திட்டத்தில் 0 என்ற மூலத்திலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட தூரமாகிய t-ல் அமைந்த குத்தாயம் y; y_0 என்பது t_0 ஆக இருக்கும்போது கிடைக்கும் உச்சக் குத்தாயம். n என்பது t-ன் வரையற்ற பாகைகளின் (degrees of freedom) எண்ணிக்கை—இங்கே எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட வகையான கணக்கில், இது $N-1$ ஆகும்; மற்ற எடுத்துக்காட்டுகளில் ஒரு வரையற்ற பாகை இழப்பு நேரிடலாம். t அளவுத் திட்டத்தில், 0 மதிப்பிலுள்ள உச்சக் குத்தாயத்திலிருந்து t-ன் வளைகோடு t-ன் நேர் எதிர் மதிப்புகளுக்கு ஒரே சீராகச் சரியும் என்பது தெளிவு. n-ன் மிகச் சிறிய மதிப்புகளுக்கு வளைகோடு தட்டையான சிகரத்தைப் பெற்றிருக்கும்; இதற்கிசைந்த இயல்நிலைப் பரவலோடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கையில், வால் பகுதிப் பரப்புகளின் வீதம் அதிகமாக அமைந்திருக்கும். வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்புகளை ஒப்பீட்டு அலைவுகள் அல்லது நிகழ்திறங்களாக விளக்கம் தர இருப்பதால், இயல்நிலைப் பரவலைவிட t பரவலுக்குச் சராசரியிலிருந்து அதிக விலக்கங்கள் ஏற்பட வாய்ப்புகள் இருக்கின்றன என்ற உண்மை தெரிகின்றது. n-ன் மதிப்பு அதிகமாக அதிகமாக, t பரவல் இயல்நிலை வகைக்கு அணுகுகிறது. n என்பது 30 அளவுக்குப் பெரிதாக இருக்குமானல் வேறுபாடு குறைவாக இருக்கும் என்பதை முன்னர் கண்டோம். 8.3 படத்தில் இயல்நிலை அலைவு வளைகோட்டோடு $n = 2$, $n = 25$ ஆகியவற்றுக்கான t வளைகோடுகளைக் குறித்து, t பரவலுக்கும் இயல்நிலை வகைக்குமுள்ள உறவுகளைக் காட்டியுள்ளோம்.

t பரவலைப் பட்டியல்களாக அமைப்பது இந்த அளவையினைச் செயல்முறையில் பயன்படுத்துவதை எளிமையாக்கும். 8-3 பட்டியலில் அத்தகைய இரண்டு பட்டியல்களிலிருந்து பகுதிகள் தரப்பட்டுள்ளன. மாறுபடும் n-ன் மதிப்புகளுக்கு t-ன் சதவிகித மதிப்புகளை, அந்தப் பட்டியலின் A பகுதியில் பதிவுசெய்யப்பட்டுள்ள

எண்கள் தெரிவிக்கின்றன. மேலே குறிப்பிட்டதுபோல், n மாறுபடும்பொழுது பரவலின் மதிப்பும் வேறுபடுகின்றது. n-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் t-ன் ஒரு தனிப்பட்ட பரவல் கிடைக்கும்.



8.3. படம்.

இயல்நிலைப் பரவலின் அலைவு வளைகோடுகளும், $n = 2, n = 25$ இருக்கும்போது t பரவல்களின் வளைகோடுகளும்.

8-3 பட்டியலின் A பகுதியில் பதிவாகியுள்ள குறிப்புகள்பற்றி இங்கே சுருங்கக் கூறுவோம். $n=10$ என்பதற்கான t பரவல் வரைபடத்தை அமைப்போமானால், படுக்கை மட்டத்தில் (t அளவுத் திட்டத்தில்) சராசரியிலிருந்து 2.764 அலகுகள் இடதுபுறம் தள்ளி ஒரு குத்தாயம் அமைப்போமானால், இது வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் மொத்தப் பரப்பில் .01 பங்கை அடக்கும் ஒரு வால்பகுதியை வெட்டித் தரும். இயல்நிலைப் பரவலில் இத்தகைய வீதத்தை நிகழ்திறமாகக் கருதுவோம். அத்தகைய பரவலிலிருந்து இயைபிலா முறையில் பிரித்தெடுக்கப்பட்டால் கிடைக்கின்ற அளவை இந்தப் பரவலின் வால்பகுதியில் அமைவதற்கான வாய்ப்பு 100-ல் ஒரு தடவை குறிப்பிடப்பட்ட எண்ணை 2.764 என்பது 10 வரையற்ற பாகைகளுள்ள (degrees of freedom) பரவலில் t-ன் முதல் சதமான மதிப்பாகும் (first percentile value). இது $n = 10$ மதிப்புகள் வரியில் $t = .01$ என்ற பத்தியில் (t-ன் ஒட்டுக்குறி சதமானத்தினை உணர்த்துகிறது) காணப்படுகிறது. பரவல் சமச்சீருடையதாதலால் t-ன் 99ஆவது சதமான மதிப்பு ($t_{.99}$) 2.764 ஆகவே இருக்கும்; ஆனால், சராசரியின் வலப்புறத்தில் அமைந்த ஒரு புள்ளியை இது குறிக்கும். (சராசரிக்கு இடப்புறத்திலுள்ள 0.50-க்குக் கீழேயுள்ள மானங்களுக்கு இசைந்த விலக்கங்கள் எல்லாம் எதிராகவே இருக்கும்; 0.50-க்கு மேலுள்ள சதமானங்களுக்கு இசைந்த விலக்கங்கள் நேராக

இருக்கும். இந்தக் குறிகள் பட்டியலில் இல்லாவிடினும் எளிதில் அறிந்துகொள்ளக்கூடியதே).[14]

n-மாற t பரவலின் அமைப்பும் மாறுபடுவதால், 8-3 பட்டியலின் A பகுதியில் ஒரு பத்தியை எடுத்துக்கொண்டால், t-ன் சதமான மதிப்புகள் வரிக்கு வரி மாற்றமடைகின்றன. அதாவது, 99 சதமானத்தில் n, 1 ஆக இருக்கும்போது, t-ன் மதிப்பு 31.821 ஆக இருக்கும்; n, 2 ஆக இருக்கும்போது, t-ன் மதிப்பு 6.965 ஆக இருக்கும்; n, 30 ஆக இருக்கும்போது, t-ன் மதிப்பு 2.457-க்குக் குறையும். n வரம்பிலாது பெரியதாக (infinitely large) இருக்கும்போது 2.326 ஆகவும் இருக்கும். n அதிகரிக்க அதிகரிக்க, பெரிய விலக்கங்கள் நேர்வது குறைவுபடும் என்பதே இதன் பொருளாகும்.

8-3 பட்டியலில் B பகுதியில் பதிவுசெய்துள்ள விவரங்கள் போன்றே பெரும்பாலும் t பரவலை வெளியிடுவார்கள். இந்த அளவைகள், பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படும் t பரவலின் இருபுறவால்பகுதிச் சோதனைகளில் கையாளப்படுவனவாகும். இத்தகைய சோதனை செய்யும்போது நாம் கேட்கிறோம், 't-பரவலில் சராசரிக்கு மேலோ அன்றிக் கீழோ கொடுக்கப்பட்டுள்ள விலக்கம் (அல்லது அதற்கு மேற்பட்டது) இருக்க நிகழ்திறம் என்ன?' என்று. இந்தக் கேள்விக்குப் பதில் வேண்டுமானால், 8-3 பட்டியலின் A பகுதியினைக் கொண்டு விடை கூறிவிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $n=10$ ஆகவுள்ள மாதிரிக்கு, சராசரிக்குக் கீழே 3.169 (அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட) அளவில் விலக்கம் நேர வாய்ப்பு 0.005 ஆகும். (A பகுதியில் $t_{.005}$ தலைப்பிட்ட பத்தியைப் பார்க்கவும்.) சராசரிக்கு மேலே 3.169 (அல்லது அதற்கு மேற்பட்டு) விலக்கமடைய வாய்ப்பு 0.005 ஆகும். (A பகுதியில் $t_{.995}$ தலைப்பிடப்பட்ட பத்தியைப் பார்க்கவும்.) இந்த நிகழ்திறங்களின் கூடுதலான 0.01, 3.169 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மதிப்புடன், சராசரிக்கு இருபுறத்திலும் விலக்கமடைவதன் நிகழ்திறத்தினை அளக்கிறது. இந்த நிகழ்திறக் கூடுதலை 8-3 பட்டியலின் B பகுதியில் பதிவு செய்யப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து நேரிடையாகவே கண்டுகொள்ளலாம்.

[14] டிக்சன், மேஸி (Dixon and Massey) (து.நூ.ப. 32) ஆகியோரால் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டு, வாக்கர், லெவ் (Walker and Lev) (து.நூ.ப. 186) ஆகியோரால் பின்பற்றப்படும் ஒரு குறியீட்டு முறையினை அடியொற்றிச் சதமானங்களை ஒட்டுக்குறிகளுடன் பயன்படுத்தியுள்ளேன். t பரவலை எளிமையாகவும், நேரடியாகவும் வெளியிடுகிறது என்ற காரணத்தால், இக் குறியீட்டு முறை தற்போது வழக்கத்திலுள்ள குறியீட்டு முறையைவிட (8-3 பட்டியல் B பகுதியில் இதன் எடுத்துக்காட்டினை காண்க) வசதியானது எனத்தேறலாம். சரியாகச் சொல்ல வேண்டுமானால், 8-3 பட்டியலில் t-ன் ·01, ·05, ·95, 0·99 மதிப்புகளைத் தரும் பத்திகளே சதமானங்களை வரையறை செய்கின்றன. ஆனால், t_{005} முதலான பின்ன சதமான மதிப்புகளே தனிச் சிறப்புடையன என்பது தெரியவரும்.

பட்டியல் 8-3

பகுதி A: t பரவல்: சதமான மதிப்புகள்

n	$t_{.005}$	$t_{.01}$	$t_{.025}$	$t_{.05}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$
1	63.657	31.821	12.706	6.314	6.314	12.706	31.821	63.657
2	9.925	6.965	4.303	2.920	2.920	4.303	6.965	9.925
3	5.841	4.541	3.182	2.353	2.353	3.182	4.541	5.841
4	4.604	3.747	2.776	2.132	2.132	2.776	3.747	4.604
5	4.032	3.365	2.571	2.015	2.015	2.571	3.365	4.032
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.943	2.447	3.143	3.707
7	3.499	2.998	2.365	1.895	1.895	2.365	2.998	3.499
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.860	2.306	2.896	3.355
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.833	2.262	2.821	3·250
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.812	2.228	2.764	3.169
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.725	2.086	2.528	2.845
30	2.750	2.457	2.042	1.697	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	2.576	2.326	1.960	1.645	1.645	1.960	2.326	2.576

பகுதி B: இரு வால்பகுதி சோதனைகளில் கொடுக்கப் பட்ட நிகழ்திறங்களுக்கேற்ப t மதிப்புகள்

	நிகழ்திறம்							
n	0.80	0.50	0.40	0.20	0.10	0.05	0·02	0.01
1	.325	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	.289	.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.277	.765	.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.271	.741	.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.267	.727	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.265	.718	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.263	.711	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.262	.706	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.261	.703	.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3 250
10	.260	.700	.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	.257	.687	.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	.256	.683	.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	.253	.674	.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

எடின்பர்க், ஆலிவர் அண்டு பாயிட் (Oliver and Boyd) வெளியிட்ட R. A. Fisher's 'Statistical Methods for Research Workers' எனும் நூலிலுள்ள விரிவானதொரு பட்டியலிலிருந்து (Table IV) இங்கே B பகுதியில் காணப்படும் குறிப்புகள் எடுக்கப்பட்டன. டாக்டர் ஃபிஷர், அவரது பதிப்பகத்தார் ஆகியோர் இசைவுடன் இந்தப் பட்டியல் இங்கு அச்சிடப்பட்டது. ஃபிஷர் அண்டு யேட்ஸ் (Fisher and Yates) அமைத்த 'Statistical Tables' (து.நூ.ப. 51) நூலையும் பார்க்க

$n=10$ என்ற வரியில் 0.01 தலைப்பிடப்பட்ட பத்தியில் 3.169 என்ற மதிப்பினைப் பார்க்கிறோம்: இந்த விலக்கம் 100-ல் ஒரு தடவை கிடைக்கும் அல்லது மீறப்படும். B பகுதியில் பதிவுசெய்யப்பட்டவையெல்லாம் குறிகளைக் கருதாத தனித்த விலக்கங்கள். எனவே, அவற்றை நேரிடையாகவே இரு வால்பகுதிச் சோதனைகளுக்குப் பயன்படுத்தலாம். A பகுதியில் பதிவுசெய்யப்பட்டவைகளோ ஒரு வால்பகுதிக்கே பயன்படுவன.

8-3 பட்டியலில் B பகுதியில் 0.01 நிகழ்திறமுடைய பத்தியில் பதிவாகியுள்ள விவரங்கள், அதற்கிசைந்த A பகுதியில் $t_{.005}$, $t_{.995}$ ஆகிய தலைப்புடைய பத்திகளில் பதிவாகியுள்ள விவரங்களுக்குச் சமம் என்பதைக் கவனிக்கவும்; B பகுதியில் 0.05 என்ற நிகழ்திறத்தைத் தரும் பகுதியில் காணப்படும் விவரங்கள் A பகுதியில் $t_{.025}$, $t_{.975}$ ஆகிய தலைப்புடைய பத்திகளில் காணப்படும் விவரங்களுக்குச் சமமானவை. இங்ஙனம் சமமாக இருப்பதற்குக் காரணம் முன்னரே குறிப்பிடப்பட்டது. அதாவது, B பகுதியில் தரப்பட்டுள்ள தனித்த (absolute) விலக்கத்தின் நிகழ்திறம், A பகுதியில் அதற்கிசைந்த விலக்கத்தினை நேராகவும் எதிராகவும் தருகின்ற நிகழ்திறங்களின் கூடுதல் என்பதே.

8-3 பட்டியலின் B பகுதியில் தரப்பட்டுள்ளதற்கு ஒப்பிடும் வகையில் இயல்நிலை வளைகோட்டுக்கு உள்ளடங்கிய பரப்புகளின் பட்டியல் தரப்படுகின்றன. கடைசி வரியில் (n பத்தியில் ∞ பதிவாகியுள்ளபோது) 0.01, 0.05 முதலானவற்றிற்கு நிகழ்திற மதிப்புகளாக நமக்குப் பழக்கமான t-ன் மதிப்புகள் (இயல்நிலை விலக்கம்) காணப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, 0.01 என்ற நிகழ்திறத்துக்கு இசைந்த இயல்நிலை விலக்கமாக 2.57582 காணப்படுகிறது. n அதிகரிக்கும்பொழுது கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்திறங்களுக்கு t நெருங்குகின்ற மதிப்புகளின் வரம்பு 8-3 பட்டியலின் B பகுதியில் கடைசி வரியில் பதிவுசெய்யப்பட்டுள்ளது. n வரம்பிலாது பெரிதாகும்போது tயும் Tயும் ஒன்றுகின்றன. 30 அளவுக்குப் பெரிதாக இருந்தால் கூட, இயல்நிலை மதிப்புகளுக்கு நெருக்கம் காணப்படுகிறது. அதாவது, மிகச் சிறிய மாதிரிகளை ஆயும்போதுதான், t பரவலின் துணையைத் தேடவேண்டும் என்பது இதன் பொருள்.

t பரவலின் சில பயன்கள்

சிறிய மாதிரிகளில் சராசரியின் சிறப்பு

இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் சராசரி மதிப்பானது (முழுமைத் தொகுதிச் சராசரியின்

எடுகோள் மதிப்பான) கொடுக்கப்பட்ட சராசரியிலிருந்து சிறப்பாக வேறுபடுகிறதா என்பதைத் தீர்மானிக்குமுன்பு கொடுக்கப்பட்ட விகிதமான

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{N-1}}$$

என்பதிலிருந்து tஐக் கணிக்கிறோம். மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரியின் சிறப்பினைக் காண சோதனை செய்கையில், t-க்கு விளக்கம் தரும்போது, $n = N-1$ என்ற மதிப்பை எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

தொழில் சம்பந்தமாகப் பலவகையான கடன் வாங்குபவர் செலுத்தும் வட்டி வீதங்களைப்பற்றிய ஆராய்ச்சியொன்றில்,[15] பெரும் கடன் வாங்குபவர்களை (அதாவது, 5,000,000 டாலர்கள் அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சொத்துள்ளவர்கள்) 5 சில்லறை விற்பனைத் தொகுதிகளாகப் பிரிக்க, பின்வரும் சராசரி வட்டிவீதங்களில் கடன் பெற்றுள்ளது தெரிந்தது :

சில்லறை விற்பனை	தொழிற் கடன்களில் சராசரி வட்டி விகிதம் (சதவீதங்களில்)
உணவு, மது, புகையிலை, மருந்துகள்	1.8
உடை, உலர்ந்த பொருள்கள், பலநோக்கக் கடைகள்.	1.9
குடும்பப் பொருள்கள், உலோக உற்பத்திகள், வீடு கட்டும் பொருள்கள்.	2.0
கார்கள், அதன் பாகங்கள், பெட்ரோல் நிலையங்கள்.	1.7
பிற	2.2

இந்த ஐந்து தொகுதி வீதங்களின் கூட்டுச் சராசரி 1.92 சதவிகிதமாகும். தரவிலக்கம் s (வர்க்க விலக்கங்களின் கூடுதல்களை N ஆல் வகுத்துப் பெற்றது) 0.172 ஆகும். இந்தத் தொகுதிகளில் கண்ட பெரும் சில்லறை விற்பனை வணிகர்கள் கொடுத்த சராசரி வட்டிவீதமானது அமெரிக்காவிலுள்ள தொழிற் கடன் பெறுவோர்

[15] *1946 நவம்பரில் தீர்க்கப்படாத கடன்கள்பற்றி போர்டு ஆஃப் கவர்னர்ஸ் ஆஃப் தி ஃபெடரல் ரிசர்வ் சிஸ்டம்* (Board of Governors of the Federal Reserve System) *நடத்திய ஆய்வு இது. பார்க்க: யங்டால்* (Youngdahl) *து.நூ.ப. 198. இந்த எடுத்துக்காட்டில் ஒவ்வொரு தனித் தொகுதிக்கும் குறிப்பிட்ட வீதங்களாவது, தனிப்பட்ட கடன்காரர்களால் தரப்பட்ட வீதங்களை ஒவ்வொரு வீதத்திலும் தரப்படவேண்டிய மொத்த டாலர் கடன்களால் நிறையிட்டுப் பெற்ற நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி. தற்போதைய எடுத்துக்காட்டில் சில்லறை விற்பனை பற்றிய சராசரியைப் பெறுவதற்கு நிறைகளைப் பயன்படுத்தாமல் சில்லறை விற்பனைத் தொகுதிகளின் வீதங்களைச் சேர்த்து உருவாக்கியுள்ளோம்.*

எல்லோருடைய சராசரி வட்டி வீதங்களிலிருந்தும் சிறப்பாக மாறுபடுகிறதா என்பதே நமது சிக்கலாகும். தொழிற் கடன் பெறுவோரது 100 தொகுதிகளை எடுத்துக்கொண்டு, அவர்களால் தரப்பட்ட சராசரி வீதங்களின் நிறையிட்ட சராசரியான 2.9 சதவிகிதத்தை முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியாகப் பயன்படுத்துவோம். இந்த எடுத்துக்காட்டின் சூனிய எடுகோளை, 0.01 என்ற சிறப்பு வரம்பினைப் பயன்படுத்திச் சோதனை செய்வது பொருத்தமானது. t என்பதற்கு

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{N-1}} = \frac{1.92 - 2.9}{0.172/\sqrt{5-1}} = \frac{-0.98}{0.086}$$

$$= -11.4$$

என்ற மதிப்புக் கிடைக்கிறது. ஏனெனில். முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கு 0·98 வரை மேலோ கீழோ விலக்கம் இருப்பதற்கான நிகழ்திறத்தை ஆராய்ந்துகொண்டிருப்பதால், சிறப்புகாண் சோதனை இருசிறை சோதனையாக இருக்கவேண்டும். 8-3 பட்டியலின் B பகுதியில் (பிற்சேர்க்கை மூன்ருவது பட்டியலில்) $n=4$ ஆக இருக்கும்போது, 0·01 என்ற நிகழ்திறத்திற்கு இசைந்ததாக t-க்கு 4.604 என்ற மதிப்பு இருக்கிறது. t-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு இதனினும் மிகப் பெரியது. இங்கே பயன்படுத்திய சிறப்பு வரம்பின் அடிப்படையில் சூனிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்கிறோம். மொத்தத்தில் பெரிய சில்லறை வியாபாரிகள் வாங்கிய கடன்களின் மீது தொடுத்த வட்டி வீதங்கள், பேரளவில் தொழிற் கடன் பெறுவோர் கொடுத்த வீதங்களைவிடச் சிறப்பாகக் குறைவுபட்டிருக்கிறது.

சிறிய மாதிரிகளுக்கு நம்பக வரம்புகளை அமைத்தல்

சிறிய மாதிரியின் முடிவுகளில் எடுகோள்களைப் பயன்படுத்திய எடுத்துக்காட்டுகள் இப்போது தரப்பட்டுள்ளன. இப்போது மதிப்பீட்டுச் செயல்முறைகளைப் (estimation) பற்றி மீண்டும் சுருங்கக் குறிப்பாகக் காண்போம். சிறிய மாதிரிகளின் அடிப்படையில் முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளை மதிப்பீடு செய்யும்பொழுது எழும் சிக்கல்களைக் காண்போம். 7ஆம் அத்தியாயத்தில் பெரிய மாதிரிகளுக்குப் பயன்படுத்திய முறைகளை ஒத்தனவே இவையும். ஆனல், தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட நம்பக எல்லைக்கான வரம்புகளை அமைப்பதில் இயல்நிலைப் பரவலைவிட t பரவலையே பயன்படுத்தவேண்டும்.

வளர்ச்சிக் காலத்தில் 18 அங்குலம் தண்ணீர் பாய்ச்சப்பட்ட நான்கு நிலப்பகுதிகளில், அல்ஃபல்ஃபா (alfalfa) பெற்ற விளைச்சலை ஏக்கருக்கு டன் கணக்கில் கண்டறிந்த குறிப்புகள் பின்வருமாறு:[16]

5.69; 6.46; 7.02; 8.02

[16] பெக்கட், ராபர்ட்சன் (Beckett and Robertson), கு. நூ. ப. 10.

இந்த மாதிரி எந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப் பட்டதோ அதன் சராசரிக்கு நம்பக எல்லையை நாம் அமைக்க வேண்டியிருக்கிறது. இந்த மாதிரிக்கு

$$\bar{X} = 6.7975$$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}} = 0.849$$

என்ற மதிப்புகளைக் காண்கிறோம்.

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{N-1}}$$

என்ற உறவினை எடுத்துக்கொள்வோம். s, N ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் நமக்குத் தெரியும்; ஆகவே, வரையற்ற பாகைகளான $n\ (= N - 1)$ என்பதும் தெரியும். மதிப்பீட்டின் நம்பக எல்லை 0.95 என எடுத்துக்கொள்வோம். P-ம் n-ம் தெரிவதால், t பட்டியலைப் பயன்படுத்தி t-க்கு ஏற்ற மதிப்பை எளிதில் கண்டுகொள்ளலாம். P ஆனது 0.05 ஆக இருக்கும்போது, $n = 3$ஆக இருக்கும் போது, $t = 3.182$ ஆகும். மேற்கூறிய சமன்பாட்டில் தெரியாத அளவு, வலதுகைப் பக்கமுள்ள உறுப்பின் பகுதியான $\bar{X} - \mu$ என்ற வீச்சு ஆகும். $\bar{X}$ என்பதற்கு இருபுறத்திலும், குறிப்பிடப்பட்ட நம்பிக்கை பாகைகளின் அளவுக்குட்பட்டு, இருபுறத்திலும் μ அமைவதை எதிர்பார்த்து எல்லைகளை அமைக்க விரும்புகிறோம். தேவைப் படுகின்ற வீச்சை (ஒன்பது வரிகளுக்குமுன் தரப்பட்ட சமன் பாட்டிலிருந்து)

$$\begin{aligned} \bar{X} - \mu &= t \times s/\sqrt{N-1} \qquad (8.15) \\ &= 3.182 \times (0.849/\sqrt{3}) \\ &= 1.5592 \end{aligned}$$

என எழுதலாம். எனவே, நம்பக இடைவழியின் தேவைப்படுகின்ற வரம்புகள் 6.7975 ± 1.5592. பின்னங்களை முழுமையாக்கி இதனை 6.80 ± 1.56 என்று எழுதலாம். 0.95 என்ற நிகழ்திறத்தால் அளக்கப்படுகிற நம்பகத்தோடு, மாதிரி பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி 5.24 டன்களிலிருந்து 8.36 டன்களுக்குள் அமைகிறது என்று நாம் கூறலாம்.

இந்தச் சந்தர்ப்பத்தைப் பயன்படுத்திக்கொண்டு இடைவெளி மதிப்பீட்டில் கையாளப்படும் நவீன செயல்முறைகளையும், அத்தகைய மதிப்பீட்டில் t பரவல் பயன்படுத்தப்படுவதையும் ஒருங்கே விளக்கும் வகையில் சிறிய மாதிரிகளில் மதிப்பீடு செய்கின்ற முறை பற்றிய எடுத்துக்காட்டு ஒன்று தருவோம். இங்கே பயன்படுத்தப்

படும் விவரம் டபிள்யூ. ஏ. ஷெவ்வார்ட் (து.நூ.ப. 140) அவர்கள் கையாண்டது. வரைபட அமைப்பும் அதே ஆசிரியரது இசைவு பெற்றுத் தரப்படுகிறது. (பார்க்க, 59ஆம் பக்கம், து.நூ.ப. 141). சராசரி சுழியாகவுடைய முழுமைத் தொகுதியொன்றை ஷெவ்வார்ட் அமைத்தார். இந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ஒவ்வொன்றும் நான்கு 100 குறிப்புகள் கொண்டதாக 100 மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுத்தார். ஒவ்வொரு மாதிரிக்கும் $\bar{X}$ஐயும் sஐயும் (பின்னதை Σd^2ஐ 4 ஆல் வகுத்துப் பெற்ருர்) கணக்கிட்டார். ஒவ்வொரு மாதிரிக்கும் கண்ட இரு அளவைகளின் அடிப்படையில், 0.50 என்ற நம்பக வரம்புக்கு இசைந்த நம்பக எல்லைகளுக்குட்பட்டு ஒரு கூற்றினைக் கூறினர். அதாவது, மொத்தத்தில் பாதி மெய்யாகவும், பாதி பொய்யாகவும் இருக்கிறது என எதிர்பார்க்கப்படும் பல கூற்றுள் அடங்கிய ஒரு தொகுதியில் இதுவும் ஒன்று. எனவே, 100 மாதிரிகளும் நம்பக இடைவெளிகளுக்கு 100 மதிப்பீடுகளைத் தருவதற்கு அடிப்படையாக அமைகின்றன.

பின்வரும் இரண்டு எடுகோள் உருகைகளும் (drawings) செயல் முறையினை விளக்கும்.

மாதிரி A	+ 0.5, — 0.3, — 0.6, + 0.8
மாதிரி B	— 2.1, + 0.5, — 2.6, — 0.2

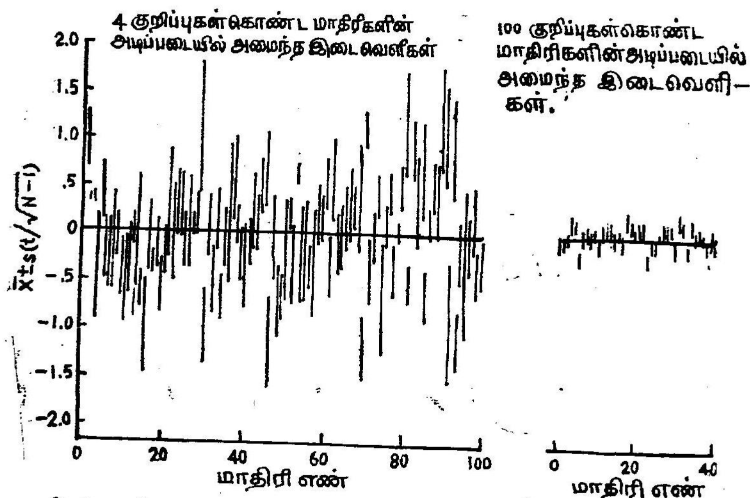
முதல் மாதிரியில் சராசரி $\bar{X} = 0.10$, $s = 0.570$. $P = 0.50$ ஆகவும் $n = 3$ ஆகவும் இருக்கும்பொழுது, $t = 0.765$. முன்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் பயன்படுத்தப்பட்ட முறையினையொட்டி

$$t \times \frac{s}{\sqrt{N-1}} = 0.765 \times \frac{0.570}{1.732} = 0.25$$

எனக் கணிக்கலாம். மாதிரியின் அடிப்படையில் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கு, 0.50 நம்பக இடைவெளியின் எல்லைகள் —0.15-லிருந்து +0.35 வரை ஆகும். (இவை + 0.10 — 0.25-லிருந்து 0.10+0.25 வரை என்பதனுல் பெற்றதாகும்.) —1.0 சராசரியாகவும், 1.366 s ஆகவும் உள்ள இரண்டாவது மாதிரியும் அத்தகைய மதிப்பீட்டுக்கு அடிப்படையாக இருக்கிறது. அதேபோன்ற செயல்முறையில் 0.50 நம்பக எல்லைகளை —1.60-லும், —0.40-லும் அமைக்கிரேம்.

முதல் மாதிரியிலிருந்து கிடைக்கின்ற ஆதாரங்கள், 'முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி —0.15-லிருந்து +0.35-க்குள் வீழ்கிறது' என்ற கூற்றுக்கும், இரண்டாவது மாதிரியிலிருந்து பெறுகின்ற ஆதாரங்கள், 'முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி —1.60-லிருந்து

—0.40-க்குள் விழுகிறது' என்ற கூற்றுக்கும் இடம் தருகின்றன. ஷெவ்வார்ட்டின் விளக்கம் சோதனை முறையில் அமைந்ததால், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி நமக்குத் தெரியும். அது சுழி ஆகும். எனவே, முதல் கூற்று மெய்யானது; இரண்டாவது தவறுடையது. இத்தகைய 100 கூற்றுகளுக்கு ஷெவ்வார்ட்டின் புள்ளி விவரங்கள் ஆதாரங்கள் தந்தன. இவ்விதமாகப் பெறுகின்ற 100 நம்பக இடைவெளிகளின் வீச்சும், அமைப்பும் 8.4 படத்தின் இடப்புறம் காட்டப்பட்டுள்ளன. இது ஷெவ்வார்ட் எழுதிய 'Statistical Method from the Viewpoint of Quality Control' எனும் நூலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாகும்.



8.4. படம்.

சராசரி சுழியாகவும், தரவிலக்கம் ஒன்றாகவுமுடைய இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளின் அடிப்படையில் அமைந்த நம்பக இடைவெளிகளைக் காட்டும் படம்.

* ஆதாரம்: டபிள்யு. ஏ. ஷெவ்வார்ட், எழுதிய 'Statistical Method from the Viewpoint of Quality Control', Washington, D.C., The Graduate School, U. S. Department of Agriculture, 1939—இசைவுடன் வெளியிடப்படுகிறது.

புள்ளியியல் உய்த்துணர்வுக்கு இந்தப் படம் நல்லதோர் எடுத்துக்காட்டாகும். குத்து அச்சில், தடிப்பான படுக்கைப்பட்டை சுழியில்—அதாவது, முழுமைத் தொகுதி சராசரி மதிப்பில்—வரையப்பட்டிருக்கிறது. ஒவ்வொரு குத்துக்கோடும் 100 மாதிரிகளில் ஒன்றின் அடிப்படையில் அமைந்த நம்பக இடைவெளியைக்

காட்டுகிறது. ஒவ்வொரு குத்துக்கோட்டின் மையமும் ஒரு மாதிரிச் சராசரியில் அமைந்திருக்கிறது. மாதிரிச் சராசரிக்கு மேலும் கீழும் அமைந்த இதற்கிசைந்த இடைவெளியின் வீச்சு முன்னர் கூறிய (8.15) வாய்பாட்டினைப் போன்ற[17] செயல்முறை ஒன்றின்மூலம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. குத்துக்கோடுகள் அவற்றின் வீச்சிலும், மையப்புள்ளிகளின் இட அமைப்பிலும் பெரிதும் வேறுபடுகின்றன என்பது தெளிவு. ஒரு மாதிரிச் சராசரி, முழுமைத் தொகுதியின் உண்மைச் சராசரிக்கு நெருங்கி இருக்குமானால், அதற்கிசைந்த பட்டையின் மையம், அழுத்தமான மையப்பட்டைக்கு அருகில் இருக்கும்; இன்றேல் மிகவும் விலகியிருக்கும். மாதிரியின் s மதிப்பு சிறியதாக இருக்குமானால் அதற்கிசைந்த குத்துக்கோட்டின் வீச்சு சிறிதாகவும், மாதிரி பெரிதாக இருக்குமானால் அதற்கிசைந்த குத்துக் கோட்டின் வீச்சு பெரிதாகவும் இருக்கும். இந்தக் குத்துக்கோடுகள், இத்தகைய வேறுபட்ட இட அமைப்பாலும் வேறுபட்ட நீளங்களாலும், மாதிரி முறைகளில் கிடைக்கும் முடிவுகள் எங்ஙனம் நிகழ்திறங்களால் பாதிக்கப்படுகின்றன என்பதுபற்றிய விரிவான படவிளக்கமாக அமையக் காண்கிறோம்.

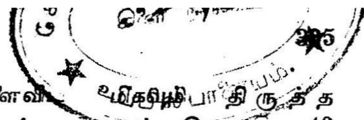
மாதிரி முடிவுகளில் வகைகள் பலவாக இருப்பினும், செம்மையாக அமைக்கப்பட்ட செயல்முறைகளின்மூலம் திருத்தமான மதிப்பீட்டினைப் பெறுவது இயலும். மாதிரிக் கொள்கைக்கிணங்க ஷெவ்வார்ட் அமைத்துக்கொண்ட நம்பக எல்லைகளில் (அவரது நம்பக வரம்பு 0.50) தோராயமாக ஒரு பாதியில் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி அடக்கப்படும். 8.4 படத்தில் ஒரு குத்துக்கோடு அழுத்தமான மையக்கோட்டினை வெட்டுமானால், அதன் பொருள், எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட நம்பக இடைவெளி முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியை உள்ளடக்கும் என்பதே. விளக்கப் படத்தில் காணப் படுகின்ற நம்பக இடைவெளிகளின் 51-ல் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி அடங்குகிறது என்பதையும், 49-ல் அடங்கவில்லை என்பதையும் கவனிக்கவும். எதிர்பார்க்கப்படுகின்ற முடிவுகளுக்கு இது மிகவும் நெருக்கமாகப் பொருந்திவருகின்றது.

[17] இந்தப் பகுதியிலுள்ள குறிப்புகளுக்கு, ஒவ்வொரு நம்பக இடைவெளியின் வீச்சும் $\bar{X} \pm 0.4417s$ என்பதனால் கிடைக்கும்; இதில் S என்பது மாதிரித் தர விலக்கமாகும். $t/\sqrt{N-1}$ (அதாவது, $0.765/1.732$) என்பதிலிருந்து 0.4417 என்ற கெழு கிடைக்கிறது. (8.15) வாய்பாட்டின் வலதுகைப்புறம் முதல் உறுப்பைவிட இரண்டாவது உறுப்பின் முதல் காரணிகையை 1.732 ஆல் வகுப்பதே வசதியானது. அதாவது, t-ஐ sஆல் வகுப்பதற்குப் பதிலாக $\sqrt{N-1}$ ஆல் வகுக்கிறோம்; ஏனெனில், s மாதிரிக்கு மாதிரி வேறுபடுகிறது; பிற அளவுகள் மாறுவதில்லை. $t/\sqrt{N-1}$ என்பது ஸ்டுடன்டின் மூல z அளவே என்பதைக் கவனிக்கவும் (பக்கம் 289 பார்க்க).

ஒருசில குறிப்புகள் இருக்கும்பொழுது சிறிய மாதிரிக் கொள்கை மூலம் திருத்தமான மதிப்பீடு செய்வது இயலுமெனினும், மாதிரி முறைகளின் உறுதியிலாப் போக்கு இதனால் முற்றிலும் நீங்கிவிடுவதில்லை. சிறிய மாதிரிகளும் பெரிய மாதிரிகள்போன்ற சிறப்புடையன என்பதும் இதன் பொருளன்று. இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்படுகின்ற மாதிரிகளுக்குமட்டும் t பரவலை மிகவும் திருத்தமாகப் பயன்படுத்தலாம் என்பதை நினைவில் கொண்டு, சிறிய மாதிரிகளை வைத்துக்கொண்டு ஆயும் ஆய்வாளரது மதிப்பீடுகள் மாதிரிக்கு மாதிரி பெரிதும் வேறுபடுகின்றன என்பதையும் கவனிக்கவேண்டும். அதோடு ஒப்பீட்டு அடிப்படையில் மிகவும் பெரிய நம்பக எல்லைகளைக் கையாள்வதோடு அவர் திருப்தியடைய வேண்டும். இடைவெளி பரந்ததாக ஆக, கூற்றின் உறுதி குறைவுபடுகிறது என்பது உண்மைதான். சிறிய மாதிரிகளைவிடப் பெரிய மாதிரிகள் உறுதியானவை (பெரிய மாதிரிகளின் சராசரிகள் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கு மிகவும் நெருக்கமாக அமையும்); அதனால் உய்த்துணர்வுகள் செய்யப்படுவதில் திருத்தம் அதிகமாக இருக்கும்.

பெரிய மாதிரிகளின் இந்தத் தன்மைகளும், சிறிய மாதிரிகளை விட அவை மேம்பட்டு விளங்குவதும் 8.4 படத்தின் வலப்புறப் பகுதியில் நன்கு காட்டப்பட்டுள்ளன. இடது கைப்புறத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நம்பக இடைவெளிகளோடு தொடர்புடைய அதே முழுமைத் தொகுதியின் நம்பக இடைவெளிகளே இவையும். இருப்பினும், ஒவ்வொரு குத்துக்கோடும் 100 குறிப்புகொண்ட மாதிரியின் அடிப்படையில் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியினை உள்ளடக்குமாறு நம்பக இடைவெளியின் வரம்புகளை (நம்பக எல்லை 0.50) வரையறை செய்கின்றன.[18] இடது கைப்புறத்திலுள்ளது போன்றே (வலது புறத்துக்கும்) செங்குத்து அளவுத் திட்டம் அமைந்திருப்பதால், முடிவுகளை ஒப்பிடலாம். வலது கைப்புறத்திலுள்ள குத்துக்கோடுகளின் மையங்கள் (இந்த மையங்கள் மாதிரிச் சராசரிகளில் அமைகின்றன என்பதை முன்னரே கண்டோம்) முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கு மிகவும் நெருக்கமாகச் செறிந்துள்ளன. இதைவிட 100 எண்ணிக்கைகள்கொண்ட மாதிரியின் அடிப்படையிலமைந்த நம்பக இடைவெளியின் வீச்சுகள் மிகவும் சிறியனவாக இருப்பது நம் கவனத்தை ஈர்க்கிறது. பெரிய மாதிரி முடிவுகளிலிருந்து அமைத்துக்கொள்ளப்பட்ட எல்லைகளுக்குள் செய்யப்படுகின்ற உய்த்துணர்வுகள், சிறிய மாதிரிகளிலிருந்து

[18] இந்த எடுத்துக்காட்டில் ஒவ்வொரு நம்பக இடைவெளியின் வீச்சும் $\bar{X} \pm 0.0769\ s$ என்பதனால் தரப்படுகிறது. ($t/\sqrt{N-1}$ அல்லது $0.765/\sqrt{99}$ என்பதனால் 0.0769 என்ற மதிப்பு கிடைத்தது.)



செய்யப்படுகின்ற உய்த்துணர்வுகளைவிட மிகவும் பாதிருத்த மானவை. (பெரிய மாதிரிகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட 40 நம்பக இடைவெளிகளில், 45 சதவீதம் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியை உள்ளடக்கியிருப்பதையும், 55 சதவீதத்தில் அந்தச் சராசரி அடங்காததையும் கவனிக்கவும். 50 சதவீதம் சரி, 50 சத வீதம் தவறு என எதிர்பார்க்கப்படுகின்ற முடிவுக்கு இந்த சதவீதங்கள் பொருந்திவருகின்றன.) இதன் பொருள் வெளிப் படையாகவே தெரிகிறது. சிறிய மாதிரிகளின் அடிப்படையில் செய்கின்ற உய்த்துணர்வுகள் பெரிய மாதிரிகளின் அடிப்படையில் செய்கின்ற உய்த்துணர்வுகளைவிட நம்பகம் குறைந்தனவே என்ருலும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூழ்நிலைகளில் முடிவுகள் சிறிய மாதிரிகளிலிருந்து செய்யவேண்டுமாஞல், ஒரு நம்பகமான செயல் முறையினைக் கையாள முடியும்.

சிறிய மாதிரிகள் இரண்டின் சராசரிகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் சிறப்பினை அறிதல்

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரி யின் சராசரியின் சிறப்பினை அறிவதற்கு நாம் பயன்படுத்திய அதே சோதனையை, இரண்டு மாதிரிகளின் சராசரிகள் சிறப்பாக வேறு படுகின்றனவா என்பதை அறியவும் பயன்படுத்தலாம். ஆர். ஏ. ஃபிஷர் கண்டுபிடித்த, ஸ்டுடன்டின் செயல்முறையின் இந்த முக்கிய மான நீட்சியை (extension), இரண்டு மாதிரிகளின் சராசரிகளை ஒப்பிட்டு, அம் மாதிரிகள் ஒரே இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியினின்று பிறந்தனவா என்ற எடுகோளைச் சோதனை செய்யப் பயன்படுத்தலாம். முந்திய எடுத்துக்காட்டைப்போலவே, இங்கும் ஸ்டுடன்டின் பரவல் ஒரு பிறழ்ச்சியில்லாத சோதனையைத் தருகிறது.

பெரிய மாதிரிகளில் விவரிக்கப்பட்டதுபோன்றே இந்தச் சோதனையும் அதே கையமைப்பிலேதான் கையாளப்படுகிறது. இரு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்தன என்ற அடிப்படையில், இரு மாதிரிகளின் சராசரிகளிலிருந்து பெற்ற வர்க்க தரவிலக்கங்களை ஒன்ருக இணைத்துப்பெற்ற s'ஐ, முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கத்துக்குச் சிறந்த மதிப்பீடாகக் கருதுவது பொருத்தமே; எனவே,

$$s' = \sqrt{\frac{\Sigma d_1^2 + \Sigma d_2^2}{N_1 + N_2 - 2}} \qquad (8.16)$$

எனக் கிடைக்கிறது. s'-க்கு இந்த மதிப்பீட்டைப் பெற்றபின், சராசரி களின் வேறுபாட்டின் தரவிலக்கத்தை வழக்கமான வாய்பாட்டால் காண்கிறேம்.

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s'^2}{N_1} + \frac{s'^2}{N_2}} \qquad (8.17)$$

$$= s' \sqrt{\frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}} \qquad (8.18)$$

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ என்பது $s' \sqrt{(N_1 + N_2) / N_1 N_2}$ என்பதற்கு இருக்கும் வீதம் t பரவலாகப் பரவியுள்ளது.

அதாவது,

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s' \sqrt{\frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s'} \sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}} \qquad (8.19)$$

இந்தச் சமயத்தில், t என்ற அளவை $N_1 + N_2$ —2-க்குச் சமமான n என்ற வரையற்ற பாகைகளை உடையது என்பதையும் கருதி விளக்கம் தர முற்படவேண்டும். [மேற்கூறிய (8.16) என்ற வாய்பாட்டில் s'-ன் இரண்டு கூறுகளில் ஒவ்வொன்றையும் கணிப்பதில், வரையற்ற பாகை ஒன்று (one degree of freedom) இழப்பு ஏற்பட்டதாகக் கருதலாம்.] (8-4) பட்டியலில் கண்ட விவரமான ஐந்து சிறிய

பட்டியல் 8-4

சிறிய, பெரிய நகரங்களின் மாதிரிகளில் மின் நுகர்வுக்கான சராசரி குடும்பச் செலவுகள்*

சிறிய நகரங்கள்	மின் நுகர்வுக்கான சராசரிக் குடும்பச் செலவுகள்	பெரிய நகரங்கள்	மின் நுகர்வுக்கான சராசரிக் குடும்பச் செலவுகள்
கிராண்ட் ஜங்ஷன், கொலோ.	$3,538	புராவிடென்ஸ், ஆர். ஐ.	$3,916
மாடில், ஒக்லா.	3,190	மில்வாகி, விஸ்.	4,331
காம்டென், ஆர்க்.	3,094	யங்ஸ்டவுன், ஓஹியோ	4,166
கார்ரெட், இண்ட்.	3,699	கன்சாஸ் சிடி, மோ.	3,989
புளஸ்கி, வா.	3,326	சின்சினாட்டி, ஓஹியோ	4,186
டல்ஹார்ட், டெக்சாஸ்	3,548		
சராசரி	3,399.17		4,117.6

* யு. எஸ். பீரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ் புல்லட்டின் 1097 (U.S. Bureau of Labour Statistics Bulletin) (1953 ஜூனில் திருத்திய பதிப்பு) Family Income - ல் வெளியான 'Expenditures and Savings in 1950' என்ற கட்டுரையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள். எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட உதாரணத்தில் 2,500-லிருந்து 30,500 வரை மக்கள் தொகை கொண்ட நகர்கள் சிறியதாகவும், 240,000-லிருந்து 1,000,000 வரை மக்கள் தொகை கொண்ட நகர்கள் பெரியதாகவும் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டன. 1,000,000-ம் அதற்கு மேற்பட்டதும் மக்கள் தொகையுடைய நகர்களும், மாணவர்களும் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ளப்படவில்லை.

நகரங்கள் கொண்ட மாதிரியோடு, ஐந்து பெரிய நகரங்கள் கொண்ட மாதிரியை, மின்சக்தி நுகர்வுக்காகும் சராசரி குடும்பச் செலவு குறித்து ஒப்பிடுவோம். கண்டறிந்த குறிப்புகளுக்கு அலகு ஒரு நகரத்தில் மாதிரியாகத் தேர்ந்து எடுத்த மக்களின் மின் நுகர்வுச் செலவுகளிலிருந்து கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இந்த மாதிரியிலுள்ள குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையில் 65 குடும்பங்கள் கொண்ட சிறு நகரங்களிலிருந்து, 250 குடும்பம் கொண்ட பெருநகரங்கள்வரை யுள்ளன.

8-4 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளவிவரங்கள்,பெரிய நகரங்களைவிடச் சிறிய நகரங்களில் மின்சக்தி நுகர்வுக்கான குடும்பச் செலவுகள் குறைவாகவுள்ளன என்று தெரிவிக்கின்றன. என்றாலும். இதனைத் தெளிவுபடுத்தும் சோதனை ஒன்று தேவை. மீண்டும் 0.01 என்ற சிறப்பு எல்லையைப் பயன்படுத்துவோம். (8.16 வாய்பாட்டில் காட்டப்பட்ட உறவுகளைக் கொண்டு கணித்தால்)

$$s' = \sqrt{\frac{273,557+109,741}{11-2}} = 206.4$$

என்ற s' மதிப்புக் கிடைக்கிறது. (8·19 வாய்பாட்டிலிருந்து) t-ன் மதிப்பு, பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$t = \frac{4,117.60 - 3,399.17}{206.4}\sqrt{\frac{30}{11}}$$

$$= 5.75$$

t பட்டியலை (8-3 பட்டியலில் B பகுதியையோ அல்லது பிற்சேர்க்கைப் பட்டியல் IIIஐயோ) கண்டு $n = 9$ என்பதற்கு, 0.01 என்ற நிகழ்திறத்திற்கிசைந்த t மதிப்பாக 3.250-ஐப் பெறுகிறோம். இப்போது கிடைக்கின்ற மதிப்பு சிறப்புடையது என்று தெரிகிறது. ஒரே அமைப்புடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இரண்டு நகரங்களின் மாதிரிகளும் பிரித்தெடுக்கப்பட்டிருக்கமுடியாது. மின்சக்தி நுகர்வுக்கான சராசரி குடும்பச் செலவுகள், சிறிய நகரங்களைவிடப் பெரிய நகரங்களில் அதிகம் என்பது தெளிவாக விளங்குகிறது.

எந்த மாதிரிகளின் சராசரிகளை ஒப்புநோக்குகின்றோமோ, அந்த இரு மாதிரிகளும் ஒரே இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்தனவா என்பதே இங்கு ஆய்வு செய்யப்படுகின்ற எடுகோளாகும்.

இந்த மாதிரிகளின் வேறுபாட்டுக்கு நேரடி ஆய்வையே பயன்படுத்தலாம்; ஆனால், மாதிரிகளின் s மதிப்புகளைக் கணிப்புகளில் பயன்படுத்துவதால் கிடைக்கின்ற முடிவுகள் பாதிக்கப்படலாம்.

இத்தகைய சோதனையைக் கையாளும்போது வேறுபட்ட சராசரிகளை யுடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரிகள் பிறந்தன என்பதை விட, வேறுபட்ட தரவிலக்கங்களையுடைய முழுமைத் தொகுதியி லிருந்து மாதிரிகள் பிறந்தன என்பது, t-க்குச் சிறப்பான மதிப்பு கிடைப்பதற்குக் காரணமாக இருக்கலாம். இதன் விளைவாக எடு கோளைத் தள்ளுபடி செய்யவேண்டியிருக்கும்; ஆனால், தள்ளுபடி செய்வதற்கு, சராசரிகளின் வேறுபாடு காரணமாக அமையாது. ஆனால், ∴பிஷர் கருத்துப்படி இதற்கு வாய்ப்புகள் அதிகம் இல்லை. மாதிரித் தரவிலக்கங்கள் சிறப்பாக வேறுபடுகின்றன என்று நம்ப இடமிருக்குமானால், அவற்றின் வேறுபாட்டை ஆராயலாம்.

எடுகோள்களைச் சோதனை செய்வதுபற்றி சில பொதுக் கருத்துகள்

இந்த அதிகாரத்தில் புள்ளிவிவர எடுகோள்களைச் சோதனை செய்வது குறித்து முக்கியமாகக் கண்டோம். (சிறிய மாதிரிகளைப் பற்றிப் பேசும்போது மதிப்பீடுபற்றியும் சுருங்கக் கண்டோம்.) இந்த விவாதத்தில் ஆய்வுமுறைகளைப்பற்றிச் சில பொதுக் கருத்துகளையும் செயல் முறைகளைப்பற்றிய விளக்கங்களையும் கண்டோம். முன் பக்கங்களில் போதுமான அளவு விளக்கம் தரப்படாத, தர்க்க ரீதியான கருத்துகள் சிலவற்றை இந்த விவாதத்தின் முடிவாக வலியுறுத்திக் கூறுவோம். மூன்று கருத்துகளைச் சிறப்பாகத் தெளிவுபடுத்துவோம்.

1. ஒரு மாதிரியிலிருந்து கண்டறிந்த குறிப்பினை அடிப்படை யாகக் கொண்டு செய்யப்படுகின்ற பொதுமைக் கருத்தை (எடுகோளை) அதே மாதிரியிலேயே வைத்து சோதனை செய்வது கூடாது என்று தெரிவிக்கப்பட்டது. சோதனை செய்யப்படுகின்ற எடுகோளைப்பற்றி அல்லது முழுமைத் தொகுதியின் அளவையைப்பற்றி முன்கூட்டியே முடிவு செய்திருக்கவேண்டும்.[19] வாணிகம் சம்பந்தப்பட்ட வட்ட

[19] ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஆட்டக்காரர் ஒருவர், நான்கு சீட்டுகளைத் தனித்தனியாக உருவுகுறார். (ஒவ்வொரு தடவையும் எடுத்த சீட்டு அடுத்த தடவை எடுப்பதற்குள் திரும்ப வைக்கப்படுகிறது.) டைமண்ட் நாலாம் பந்து, இஸ்பேட் ராஜா, கிளாவர் ஐந்தாம் பந்து, கிளாவர் ஒன்பதாம் பந்து ஆகிய சீட்டுகள் தமக்குக் கிடைத்திருப்பதாகவும், இத்தகைய சேர்க்கை 7,311,616 தடவை களில் 4 தடவைகளே வரக்கூடிய ஒரு அரிய வாய்ப்பு என்றும் முழங்குகிறார். (எந்த வரிசையில் என்பதைப்பற்றி இங்கே அக்கறை காட்டவில்லை.) நிகழ்ச்சிக்குப்பின் அவர் தெரிவித்த கருத்தில் ஏதும் குறிப்பிடத்தகுந்தது இல்லை. ஆனால், எடுப்பதற்கு முன்கூட்டியே இந்த நான்கு சீட்டுகளை எடுக்கப்போவதாக அவர் கூறியிருப்பாரானால் அது குறிப்பிடத்தகுந்த செய்தி. ஆனால், முன்கூட்டியே கூறுது மேற்கூறிய சீட்டு

சுழற்சிகளின் மாதிரியொன்று, அமெரிக்காவில் வாணிக வட்ட சுழற்சியின் காலம் 40 மாதங்கள் என்ற கருத்தினை வெளியிடுமானால், இந்த மாதிரி சராசரியினையே பயன்படுத்தி 40 மாதங்கள் என்ற எடுகோள் சராசரியினை ஆய்வுக்குப் பயன்படுத்தலாகாது. இத்தகைய ஆய்வின் பிழை வெளிப்படை; என்றாலும், இத்தகைய ஒன்றுக்குள் ஒன்று அடங்கிய சோதனைமுறை பல சமயங்களில் தவறாகக் கையாளப்படுகிறது. மொத்த விலைகள், உறுதிப் பத்திரங்களின் விலைகள், அல்லது வாணிக நிலைகள்பற்றி முன்கூட்டிய முடிவுகள் கூறப்படுவதற்குக் கையாளப்படுகின்ற முறை, இந்த முறையினைத் தோற்றுவித்த இறந்தகால புள்ளிவிவரங்களின் அடிப்படையில்தான் பல சமயங்களில் செய்யப்படுகிறது. கண்டறிந்த குறிப்புகள் உணர்த்துகின்ற கொள்கையினை ஆய்வாளர் ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடாது என்பது இதன் பொருளன்று. ஒரு கருத்துபற்றிய குறிப்பு தெரியுமானால், புதிய கண்டறிந்த குறிப்புகளின் அடிப்படையிலே அவற்றைச் சோதிக்கவேண்டும். (எடுகோள்சோதனையை ஆய்வாளர் பயன்படுத்துவதற்குமுன்னரே சம்பந்தப்பட்ட எடுகோளை ஏற்கவோ புறக்கணிக்கவோ நம்பக எல்லையை வரையறுத்துக்கொள்ள வேண்டும் என்ற விதி முன்னர்க் கூறப்பட்டது. இங்கும் அதே கோட்பாடு பயன்படுகிறது.)

2. எடுகோளின் உண்மையைப்பற்றிப் புள்ளிவிவர ஆதாரங்கள் முடிந்த முடிவாகச் சான்று கூறுவதில்லை. எடுகோள்களைத் தள்ளுபடி செய்வதற்கேயொழிய உறுதிப்படுத்துவதற்கான புள்ளிவிவர சோதனைகள் அடிப்படையில் பயனுவதில்லை. ஓர் ஆய்வினைக் கையாண்டபின் பெறுகின்ற முடிவினைக் கூறும் முறையை வாசகர்கள் கவனித்திருப்பர். 'கண்டறிந்த குறிப்புகள் எடுகோளோடு முரண்பாடு உடையன அல்ல' என்றோ 'கண்டறிந்த குறிப்புகள் எடுகோளோடு பொருத்தமுடையன அல்ல' என்றோ ஒருவர் கூறலாம். இரண்டாவது கூற்று முதலதைவிடத் தெளிவானது; உறுதியானது. ஓர் எடுகோளைப் புறக்கணிக்கும்போது அதிக அளவு நம்பகத்தோடு செய்யமுடியும். கண்டறிந்த மாதிரி அளவைக்கும் எடுகோள் அளவைக்குமுள்ள வேறுபாடு மிகப் பெரிதாக இருக்குமானால், அதாவது 10,000,000 சோதனைகளில் ஒரு தடவையே

களை எடுத்த பின்னர்தான் அந்தச் சீட்டுகளை அப்படியே எடுப்பதாக, ஒரு எடுகோளை அமைத்தார்.

பேஸ்பால் (Base Ball) விளையாட்டுச் சரித்திரத்திலே புகழ்பெற்ற ஒரு நிகழ்ச்சி: பேப் ரூத் (Babe Ruth) என்ற ஆட்டக்காரர், தனது எதிர்க்கட்சியாரால் ஏளனம் செய்யப்பட்டபோது, ஒரு குறிப்பிட்ட இலக்கினை முன்கூட்டியே கூறி, கூறியவண்ணமே விளையாடி, தனது கட்சிக்கு வெற்றி சேர்த்தார். இதுதான் முன்கூட்டிய அறிவிப்பு.

அத்தகைய வேறுபாடு சந்தர்ப்பத்தால் நிகழக்கூடியது என்பதுபோல அமைந்தால், ஆய்வாளர் இந்த வேறுபாடு மெய்யானதே என்று உறுதியாக நம்பி எடுகோளைப் புறக்கணிக்கலாம். (என்றாலும், இப்படித் தள்ளுபடி செய்வதிலும் நிகழ்வாய்ப்புப்படி தவறுண்டு.) $\frac{1}{10,000,000}$ என்ற நிகழ்வாய்ப்பின் அடிப்படையில் புறக்கணிப்பு செய்வதை எந்த நம்பக அளவில் செய்தோமோ, அதே உறுதியோடு எடுகோள்களை ஏற்பது முடியாது. உண்மையில் தவறான எடுகோள்களுக்குப் பொருந்தி வருவனவாகப் பல காரணக் கூறுகள் அமைந்திருக்கலாம். மெய்யான எடுகோள்களில் இங்ஙனம் அமைவதில்லை. கொடுக்கப்பட்டுள்ள உண்மைகளுக்குப் பொருந்தி வரும் பல எடுகோள்களிலிருந்து ஒன்றைத் தேர்வதில், செயல்முறைச் சான்றுகளைத் துணைகோடாது காரணகாரிய அறிவையே துணைகோடவேண்டும். இந்தக் கடைசிச் செய்தியிலிருந்து மூன்றாவது கருத்துக்கு வருவோம்.

3. ஓர் எடுகோள்மீது நமக்கு நம்பிக்கை ஏற்படவேண்டுமானால், அது குறித்துப் புள்ளிவிவரச் சான்றுகள் மட்டுமல்லாது, பிற சான்றுகளும் நமக்கு வேண்டும். தர்க்கரீதியான அடிப்படை வேண்டும். இதுகுறித்து இரு நிபந்தனைகள்: எதிர்பார்க்கப்படும் தேவைகளுக்கு இசைந்த அளவுக்கு எடுகோள் பொருந்தி வரவேண்டும். இரண்டாவதாக அதைப்பற்றி நாம் பெற்ற அறிவுக்குத் தர்க்கரீதியில் இயைந்ததாய் எடுகோள் பொருந்திவரவேண்டும். எடுகோள் நம்பக அளவைத் தீர்மானிப்பதற்கு, புள்ளிவிவரச் சான்றுகளின் துணை இன்றியமையாதது; முக்கியமானது. ஆனால், இதிலிருந்து பெறும் முடிவுகள் எதிர்மறையை நிறுவுவனவே. அதாவது, எடுகோளைத் தவறான தாக்கவில்லை எனக் கூறலாம். நேரான ஆதரவுக்குக் காரிய காரணங்களே துணைவரவேண்டும்.[20]

[20] எடுகோளுக்குக் காரணகாரிய அடிப்படை வேண்டுமென்ற நிபந்தனை இன்றியமையாததே. ஆனால், இயற்கையில் எதிர்பார்ப்பதற்கும், அறிவுக்கும் முற்றிலுமே நடப்புப் பொருந்திவரவேண்டும் எனவலியுறுத்துவது தவறு என்பதைப் பற்றி லார்ட் ரசல் (Lord Russell) எச்சரிக்கை செய்துள்ளார். எடுகோள் நடைமுறை அறிவுக்குப் பொருந்தி வரவில்லை என்ற காரணத்துக்காக, அதனை முற்றிலும் புறக்கணித்துவிடுவதானால் அறிவு வளர்ச்சிக்கு இடமில்லை. ஆராய்ச்சிகளில் முன்கூட்டியே ஊறிய சில கோட்பாடுகளுடனேயே வேலை செய்வதால், தேடுவதைக் கண்டுபிடிக்கும் ஆபத்தும், எண்ணத்துக்கு முற்றிலும் பொருந்தியதாகத் தோற்றுவதால், சிலவற்றை ஆராயாது ஏற்றுக்கொள்ளும் ஆபத்தும் நேரலாம். துகள் கொள்கை (Quantum Theory) மரபுவழி வந்த பருப்பொருள்பற்றி கருத்துகளையெல்லாம் முரணுவதால், அதனை ஏற்பது அவசியமே என்று ரசல் கூறுகிறார்.

துணை நூல்கள்

Anderson, R. L. and Bancroft, T. A., 'Statistical Theory in Research,' Chap. 11.

Churchman, C. W., 'Theory of Experimental Inference.'

Clark, C. E., 'An Introduction to Statistics,' Chap. 6.

Cramer, H., 'Mathematical Methods of Statistics,' Chaps. 30, 31, 35.

Deming, W. E., 'Some Theory of Sampling,' pp. 537-554.

Dixon, W. J. and Massey, F. J. Jr., 'Introduction to Statistical Analysis,' Chap. 7.

Fisher, Sir Ronald (R. A.), 'Contributions to Mathematical Statistics,' Papers 7, 13.

Fisher, Sir Ronald (R. A.), 'The Design of Experiments,' 4th ed.

Fisher, Sir Ronald (R. A.), 'Statistical Methods for Research Workers,' 11th ed., Chap. 5.

Freeman, H. A., 'Industrial Statistics,' Chap. 1.

Goulden, C. H., 'Methods of Statistical Analysis,' 2nd ed., Chap. 4.

Hoel, P. G., 'Introduction to Mathematical Statistics,' 2nd ed., Chap. 10.

Kendall, M. G., 'The Advanced Theory of Statistics,' 3rd ed., Vol. II, pp. 96-106, 269-306.

Mather, K., 'Statistical Analysis in Biology,' 2nd ed., Chaps. 4, 5.

Mood, A. M., 'Introduction to the Theory of Statistics,' pp. 245-270.

Neyman, J., 'Basic Ideas and Some Recent Results of the Theory of Testing Statistical Hypotheses,' 'Journal of the Royal Statistical Society,' Vol. 105, 1942.

Neyman, J., 'Lectures and Conferences on Mathematical Statistics and Probability,' 2nd ed., Chap. 1, Part 3.

Neyman. J., and Pearson, E. S., 'Contributions to the Theory of Testing Statistical Hypotheses,' 'Statistical Research Memoirs,' Vol. 1, 1936 ; Vol. 2, 1938.

Neyman, J. and Pearson, E. S., 'On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses,' 'Philosophical Transactions of the Royal Society,' Vol. 231, 1933.

Rosander, A. C., 'Elementary Principles of Statistics,' Chaps. 24, 27.

Shewhart, W. A., Economic Control of Quality of Manufactured Product,' Chap. 14.

Shewhart, W. A., 'Statistical Method from the Viewpoint of Quality Control,' pp. 56-63.

'Student,' 'The Probable Error of a Mean,' 'Biometrika,' Vol. 6, 1908.

Tintner, G., 'Mathematics and Statistics for Economists,' Chap. 25.

Tippett, L. H. C., 'The Methods of Statistics, 4th ed., pp. 86-103, 141-149.

Tippett, L. H. C., 'Technological Applications of Statistics,' Chaps. 8, 9.

Wald, A., 'Statistical Decision Functions.

Walker, H. M. and Lev, J., 'Statistical Inference,' Chaps. 3, 7.

Wilks, S. S., 'Elementary Statistical Analysis,' Chap. 11.

Wilks, S. S., 'Mathematical Statistics,' Chap. 7.

Yule, G. U. and Kendall, M. G., 'An Introduction to the Theory of Statistics,' 14th ed., Chap. 21.

இந்த அத்தியாய முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணை நூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரும், பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டும், நூலின் (இரண்டாம் பாக) இறுதியிலுள்ள துணை நூல் பட்டியலில் காணலாம்.

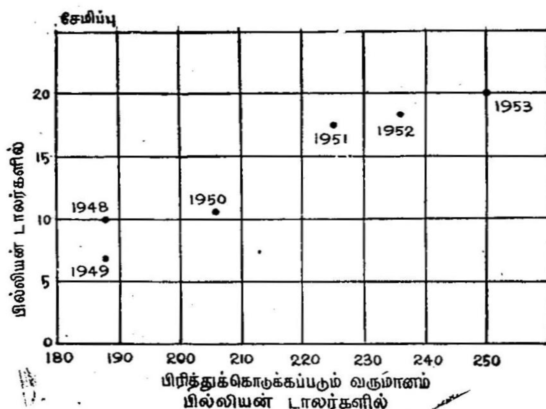
9. தொடர்பு அளவைகள்: நேர்கோட்டு உடன்தொடர்பு

அறிமுகம்

இதுவரையிலுள்ள அத்தியாயங்களில் ஒரு தனித்த மாறியின் தன்மையையொட்டிய சிக்கல்களை ஆராய்ந்தோம். தனி மாறியின் மதிப்புகளின் அளவுத்திட்டத்திற்கேற்ப அமைந்த வரிசையை மைய நிலைப் போக்குமூலமாகவும், மையநிலையையொட்டி அதன் கட்டுக் கோப்பினை அளக்கும் அளவைகள்மூலமாகவும் வருணனை செய்ய லாம். புள்ளிவிவர உய்த்துணர்வுபற்றிய எடுத்துக்காட்டுகளில், இதுவரையில் தனித்த மாறியின் முழுமைத்தொகுதி மதிப்புகளை மதிப்பீடு செய்வதிலும் அத்தகைய மாறியின் எடுகோள் மதிப்புகளைச் சோதனை செய்வதிலும் ஈடுபட்டோம். 6ஆம் அத்தியாயத்தில் கருது கோள் பரவல்களைப்பற்றிப் பேசும்போது, அச்சு அமைப்பில், செங் குத்து அல்லது y அச்சு வழியாக அளக்கப்பெறும் அலைவு என்ற தத்துவத்தை x அச்சு வழியாக அளக்கப்பெறும் மாறியின் சார்பலனை அறிமுகப்படுத்தினோம். குறிப்பிட்ட மூலத்திலிருந்து ஒரு மாறி எத்தனை அளவு விலக்கம் பெற்றுள்ளதோ அதன் சார்பில் (dependent) தனி மதிப்பின் அலைவு அமைவதாகத் தொடர்பு படுத்திக் காட்டப்பட்டது. அத்தகைய கருதுகோள் பரவல்களின் கணித விளக்கமானது சார்பிலா மாறியும் சார்புடைய மாறியும் இணையும் சார்பலன் தொடர்பாகக் (functional relation) காணப் பட்டது. அத்தகைய சில எளிய தொடர்புகளை 2ஆம் அத்தியாயத் தில் சுருங்கக் கண்டோம். மாறுகின்ற அளவைகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளை ஆராய்வதுபற்றி, இப்பொழுது விரிவாகக் காண போம். இரண்டு (அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட) மாறிகள் ஒன்றையொன்று எவ்விதத்தில் பாதித்து மாற்றுகின்றன என்பது தான் நமது முக்கிய ஆய்வு. அத்தகைய இணைந்த போக்குக்குப் புள்ளிவிவர நூலார் உடன்மாற்றம் (covariation) என்பர். இந்த

அத்தியாயத்தில் இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள நேர் கோட்டுடன் தொடர்பாகிய எளிய உடன்மாற்ற வகையை ஆராய் வோம்.

உடன்தொடர்புக்கு எளியதோர் எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு மரத்தின் தண்டிலுள்ள வளையங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் (Y), அதன் வயதுக்கும் (X) உள்ள தொடர்புகுறித்து மீண்டும் காண்



9.1. படம்.

1948—1953-ல் அமெரிக்காவில் தனிப்பட்ட வருமானத்தில், சேமிப்பு செய்யப்பட்டதும் செலவு செய்யப்பட்டதும்.

பட்டியல் 9-1

1948-53-ல் அமெரிக்காவில் தனிப்பட்ட வருமானத்தில் சேமிப்பு செய்யப்பட்டதும் செலவு செய்யப்பட்டதும் (பில்லியன் டாலர்களில்)

	தனிப்பட்டோர் நிகரசேமிப்பு	தனிப்பட்டோரால் செலவு செய்யப்பட்ட வருமானம்
1948	10.0	188
1949	7.6	188
1950	12.1	206
1951	17.7	226
1952	18.4	237
1953	20.0	250

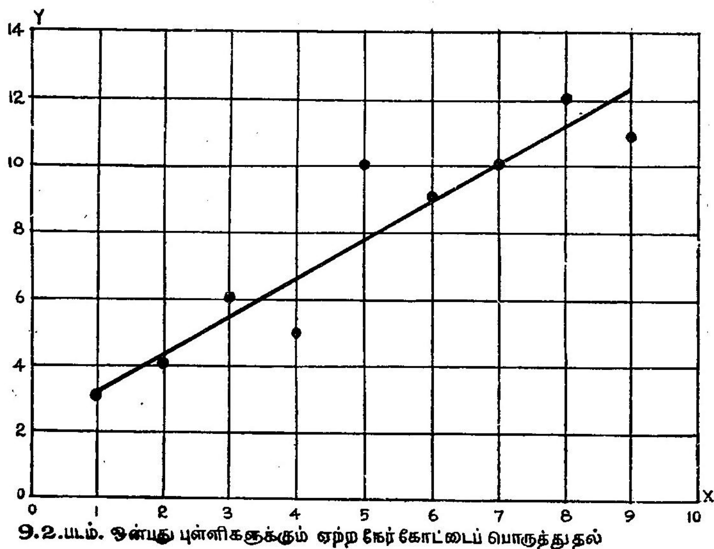
போம். 3 என்ற X மதிப்புக்கு Y மதிப்பு 3; 5 என்ற X மதிப்புக்கு Y மதிப்பு 5. இதனை 2.3 படத்தில் 14ஆம் பக்கத்தில் கண்டோம். இங்கு நேரிடையான ஒன்றிய தொடர்பு காணப்படுகிறது. X-லிருந்து Y-ஐ அறிய முடிகிறது. எல்லாப் புள்ளிகளையும் குறித்தால் அதன்

வழியே ஒரு நேர்கோடு செல்லும். 9.1 படம் (9-1 பட்டியல் அடிப்படையில்) வேறுபட்டதொரு சூழ்நிலையைக் காட்டுகிறது. 1948-53 ஆண்டுகளில் அமெரிக்க நாட்டில் தனிப்பட்ட (personel) மொத்த சேமிப்பும், அதற்கிசைந்த தனிப்பட்ட நிகர வருமானமும் (தனிப்பட்ட வருமானத்திலிருந்து வரி போக) குறிக்கப் பட்டுள்ளன. தனிப்பட்ட வருமானத்தையொட்டியே தனிப்பட்ட சேமிப்பும் அமையும் என்பது எதிர்பார்க்கக்கூடியதே. இந்தத் தொடர்பு குறைபாடுடையதாக இருக்கும் என்பது எதிர்பார்க்கக் கூடியது; ஏனெனில், வருமானத்தைத் தவிர பிற புறச் சூழல்களும், செலவழிக்கும் தொகை, சேமிப்புத் தொகை ஆகியவற்றைப் பாதிக் கின்றன. நாம் நினைத்தது தவறில்லை என்பதை 9.1 படமே காட்டு கிறது. (எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட காலம் மிகக் குறுகியதாதலால் தொடர்பு நிலையானது என்று உறுதி காட்டிக் கூறமுடியாது. இந்தக் குறுகிய கால விவரம் எடுத்துக்காட்டாகவே தரப்பட்டது.) நிகர வருமானம் உயரஉயர, சேமிப்பும் உயர்கிறது என்பதையே குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளின் வழியே செல்கின்ற நேர்கோடு குறிக் கிறது; ஆனால், இந்த உறவு ஒரு போக்கினையேயன்றி மாற்ற மடையாத நீடித்த உறவைக் காட்டுவதில்லை.

இத்தகைய ஆய்வுகளில் ஈடுபடும்போது, சார்பிலா மாறிகளுக் கும், சார்ந்த மாறிகளுக்குமுள்ள தொடர்பினை வரையறை செய்தல் வேண்டும். அதாவது மரத்தைப்பற்றிய எடுத்துக்காட்டில் உறவு முற்றிலும் ஒன்றியதா (perfect) அல்லது மற்ற எடுத்துக்காட்டில் கண்டதுபோல விதிவிலக்குகளுடைய ஒரு போக்கா என்பதனை முடிவு செய்யவேண்டும். பொதுவாகக் கூறப்போனால், நேர்கோட்டு அமைப்புமுறையில், $Y = a + bX$ என்ற நேர்கோட்டுச் சமன் பாட்டுக்கு a, b ஆகிய மதிப்புகளைக் காணவேண்டும். முன்னர்க் கூறிய முதல் எடுத்துக்காட்டில் இது எளிது; இதற்கு வேண்டிய சமன்பாடு $Y = X$ என்பதாகும். சமன்பாட்டின் வலப்புறத்தி லுள்ள மாறிலி மறைகிறது. அதாவது $a = 0$; b என்பதன் மதிப்பு1. இது மிகவும் எளிய எடுத்துக்காட்டு; மிக அரிதாக இதுபோல வரும். 9.1 படத்தில் வரும் மாதிரி அடிக்கடி வருவது குறிக்கப்பட்டுள்ள 6 புள்ளிகளில் எந்த இரண்டை இணைத்தாலும் ஒரு நேர்கோடு கிடைக் கும். இதுபோல 15 கோடுகள் கிடைக்கும். இதில் எதுவுமே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள உறவைச் சரிவரக் குறிப்பதாகக் கொள்ள முடியாது. Y-ம் X-ம் இணைந்து மாற்றமடையும் தன்மையினை நன்கு வரையறை செய்யக்கூடிய Y-க்கும் X-க்குமுள்ள சராசரித் தொடர்பைக் (average relationship) காட்டுகின்ற சிறந்த நேர்கோடே நமக்குத் தேவையானது. நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங் களுக்கு மிகவும் ஏற்புடையதாகிப் பொருந்துகின்ற நேர்கோட்டின்

பொதுச் சமன்பாட்டில் a, b ஆகியவற்றின் மதிப்பைத் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

ஓர் எளிய எடுத்துக்காட்டு, தோராயமான முறையையும், இதனைச் செய்ய ஏற்ற முறையையும் விளக்கும். (1 , 3; 2,4; 3, 6; 4, 5; 5,10; 6,9; 7,10; 8,12; 9,11—ஒவ்வோர் ஆய இணைகளிலும் முதல் எண், X மதிப்பு) ஒன்பது புள்ளிகள் 9.2 படத்தில் குறிக்கப் படுகின்றன. இவற்றிற்கேற்ற நேர்கோட்டைப் பொருத்துவதே நம் வேலை. சோதனைமூலம் a-க்கும் b-க்கும் தோராயமான மதிப்பு களைக் கண்டுகொள்ளலாம். விரும்பும் சமன்பாட்டைத் தோராய மாகப் பொருத்துவதற்கு ஒளி ஊடுருவும் வரைகோலைப் பயன் படுத்தலாம். இதுபோன்று அமைக்கப்பட்ட கோட்டின் சாய்வை (slope) அளக்கலாம். y துண்டத்தைக் கண்டுபிடிக்கலாம். பிறகு, தேவையான சமன்பாட்டைத் தோராயமாகத் தீர்மானிக்கலாம்.



9.2.படம். ஒன்பது புள்ளிகளுக்கும் ஏற்ற நேர் கோட்டைப் பொருத்துதல்

நிச்சயமாக இது ஒரு திருத்தமில்லா முறைதான்; இதன்படி இவ் வேறானவர்கள் வெவ்வேறு முடிவுக்கு வருவார்கள். ஆனால், 'மிகவும் பொருத்தமான' (best) நேர்கோட்டைக் காண்பதற்கு ஒரு திட்ட வட்டமான செயல்முறை தேவைப்படுகிறது. குறைந்த வர்க்க முறை யினைக் கையாண்டு, மிகவும் பொருத்தமான நேர்கோட்டுக்கு நிலை எண்களாகிய a, bஐக் காணுதல் இம்மாதிரியான ஒரு முறையாகும். முந்திய அத்தியாயங்களில் இம் முறைபற்றியும், மதிப்பீடு செய்வதில் இது பயனுவதுபற்றியும் குறிப்பிட்டோம். இம் முறையின் குறை

பாடுகள்பற்றியும் குறிப்பிட்டோம். குறிப்புகள் முரண்படும்போது, மாதிரிகளின் மதிப்புகளை மதிப்பிடுவதில் பொதுவாகப் பயனுள்ள செயல்முறையாக இதனைக் காண்போம்.[1]

குறைந்த வர்க்கமுறை (Method of Least Squares)

ஒரு பொருளைக் குறித்த பல மதிப்புகளைக் குறிப்பெடுத்திருப்பதாகவும் அவை தம்முள் வேறுபட்டிருப்பதாகவும் கொள்வோம். அளக்கப்படும் பொருளுக்கு மிகவும் ஏற்ற மதிப்பைக் காண முற்படுவதாக வைத்துக்கொள்ளுவோம். மிகவும் ஏற்ற மதிப்பிலிருந்து பிற மதிப்புகளின் எச்சங்களின் வர்க்கங்களில் கூடுதல் மிகக் குறைந்ததாக இருக்கும் என்பதனை நடைமுறையில் காட்டமுடியும். ('எச்சம்' என்பது மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட மதிப்புக்கும் கண்டறிந்த மதிப்புக்குமுள்ள வேறுபாடு ஆகும்.) கண்டறிந்த மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரிக்கு இது பொருந்தும். ஒரு குறிப்பிட்ட தொலைவு பலரால் அளக்கப்பட்டால் மாறுபட்ட விடைகள் கிடைக்கலாம். இவற்றில் மிகவும் ஏற்ற மதிப்பு இம் மாறுபட்ட மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியாக இருக்கும். பின்னர் தரப்பட்டுள்ள விளக்கத்தினை எளிதாக்குவதற்கு, சராசரியினைக் காணும் வழிகள் பின்வருமாறு வரிசைப்படுத்தித் தரப்பட்டுள்ளன. நமக்கு வேண்டியது ஒரு முடிவு. அதாவது, அளக்கப்படும் தூரத்திற்கு மிகவும் ஏற்ற மதிப்பு. இதனை

$M =$ (ஒரு மாறிலி) என்போம்.

அதனது தோராய மதிப்புகள் பின்வருமாறு:

$M = 5.672$ அடி

$M = 5.671$ அடி

$M = 5.676$ அடி

கூட்டினால், $3M = 17{,}019$ அடி

ஒரே ஒரு தெரியாத அளவு இருப்பதால், M-ன் மதிப்பைச் சமன்பாட்டிலிருந்து நேராக அறியலாம். அதாவது

$M = 5.673$ அடி.

இந்த மதிப்பிலிருந்து விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதல் சிறுமமாக இருக்கும்.

இரு மாறிகளை அமைக்கும்போதும் இதனையொத்த ஒரு சிக்கல் எழுகிறது. நமது குறிக்கோள் என்னவென்றால் இவற்றிற்குள்ள தொடர்பை வெளிக்காட்டும் ஒரு சமன்பாட்டைக் காண்பது. ஆனால்,

[1] குறைந்த வர்க்க செயல்முறைபற்றிய விரிவான விளக்கத்தை, கணிப்புகளைச் சரிபார்க்க சில முறைகளோடு பிற்சேர்க்கையில் காண்க.

உறவுக்கு அமைத்த சமன்பாட்டில் மாறிலிகளுக்கு ஒன்றுக்கொன்று மாறுபடும் முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

வேறு ஒரு விதமாகக் கூறப்போனல், குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் யாவும் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையவில்லை. தேவைப்படும் சமன்பாட்டில் மாறிலிகளுக்கு மிகவும் ஏற்ற மதிப்புகள் எவை ? ஒரே பொருளை அளக்கும்போது கிடைக்கும் விடையைப்போன்றே இதற்கும் விடைகாண வேண்டும். மாறிலிகளைப் பயன்படுத்தி சமன்பாட்டைக் கண்டு, அதனை வரைபடமாக்கி, அதிலிருந்து கிடைக்கக்கூடிய நேர்கோட்டிலிருந்து தனிப் புள்ளிகளின் விலக்கங்களை வர்க்கமாக்கிக் கூட்டினுல், கூடுதல் தொகை சிறுமமாகவே இருக்கும். அதுவே நமக்குத் தேவையான மாறிலிகளாகும். ஒவ்வோர் இணை மதிப்பும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புக்கு ஒரு தோராய மதிப்பைத்தருகிறது என்று கொண்டால், இவற்றில் மிகவும் ஏற்ற தொடர்பு எது என்பதைக் கண்டறிய விரும்புகிறோம்; எந்தக் கோட்டிலிருந்து விலக்கங்களில் வர்க்கக்கூடுதல் குறைவாக இருக்குமோ, அந்த நேர்கோட்டால் இது பெறப்படுகிறது.

தற்போதைய எடுத்துக்காட்டில் X-க்கும் Y-க்கும் ஒன்பது இணை மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இம் மதிப்புகளை $Y = a+bX$ என்ற நேர்கோட்டுச் சமன்பாட்டுக்குத் தந்தால் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன:

$$
\begin{aligned}
3 &= a + 1b \\
4 &= a + 2b \\
6 &= a + 3b \\
5 &= a + 4b \\
10 &= a + 5b \\
9 &= a + 6b \\
10 &= a + 7b \\
12 &= a + 8b \\
11 &= a + 9b
\end{aligned}
$$

இந்தச் சமன்பாடுகளில் எந்த இரண்டையேனும் ஏககாலச் சமன்பாடுகளாகக் கருதித் தீர்வுகண்டால் a, b ஆகியவற்றின் மதிப்பு கிடைக்கும். இந்த மதிப்புகள் பிற சமன்பாடுகளுக்கும் பொருந்தி வரவேண்டியதில்லை. இந்த ஒன்பது கண்டறிந்த சமன்பாடுகளையும் இணைத்து இரண்டே ஒழுங்குச் சமன்பாடுகளை (normal equations) உருவாக்க வேண்டும்; இதனை ஒரேசமயத்தில் தீர்வு காண்கையில் a-க்கும் b-க்கும் மிகவும் ஏற்ற மதிப்புகள் கிடைத்துவிட வேண்டும். இதுவே நமது சிக்கல். இந்தச் சமன்பாடுகளில் முதலாவதைப் பெறுவதற்குக் கண்டறிந்த சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றையும்

a என்ற கெழுவால்—சமன்பாட்டில் மதிப்புத் தெரியாத முதல் எண் —பெருக்கி, இவ்வாறு கிடைக்கின்ற சமன்பாடுகளைக் கூட்டல் வேண்டும். தற்போதைய எடுத்துக்காட்டில் a-ன் கெழு 1 ஆதலால், ஒன்பது கண்டறி சமன்பாடுகளும் பெருக்கலால் வேறுபாடடைவதில்லை. இயல் சமன்பாடுகளில் இரண்டாவதைப் பெறுவதற்குச் சமன்பாட்டில் மதிப்புத் தெரியாத இரண்டாம் எண்ணுன b என்ற கெழுவால் கண்டறிந்த சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றையும் பெருக்கி, கிடைக்கின்ற சமன்பாடுகளைக் கூட்டவும். எனவே, முதல் சமன்பாட்டை 1 ஆலும், இரண்டாவதை 2 ஆலும் மற்றவற்றை இதே போலவும் பெருக்கவும். இந்த இரண்டு ஒழுங்குச் சமன்பாடுகளையும் பெறுகின்ற முறையை 9-2 பட்டியல்மூலம் விளக்குகிறோம்.

பட்டியல் 9-2

கண்டறிந்த சமன்பாடுகள்மூலம் இயல் சமன்பாடுகளைப் பெறுதல்

$3 = a + 1b$	$3 = 1a + 1b$
$4 = a + 2b$	$8 = 2a + 4b$
$6 = a + 3b$	$18 = 3a + 9b$
$5 = a + 4b$	$20 = 4a + 16b$
$10 = a + 5b$	$50 = 5a + 25b$
$9 = a + 6b$	$54 = 6a + 36b$
$10 = a + 7b$	$70 = 7a + 49b$
$12 = a + 8b$	$96 = 8a + 64b$
$11 = a + 9b$	$99 = 9a + 81b$
$70 = 9a + 45b$	$418 = 45a + 285b$

இதில் கிடைக்கின்ற ஒழுங்குச் சமன்பாடுகள் :

$$70 = 9a + 45b$$
$$418 = 45a + 285b$$

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளையும் தீர்வு கண்டு a, b ஆகியவற்றின் மதிப்பு காணலாம். முதல் சமன்பாட்டை 5ஆல் பெருக்கி, அதனை இரண்டாவதிலிருந்து கழித்து, அதாவது a ஐ நீக்கி b-ன் மதிப்பை $\frac{68}{60}$, அல்லது 1.133 எனத் தீர்வு காணலாம். இந்த மதிப்பை இரண்டு சமன்பாடுகளில் ஏதாவது ஒன்றில் தந்து a-ன் மதிப்பாக 2.111ஐ அடையலாம். எனவே, மிகவும் சிறப்பாகப் பொருந்தும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$Y = 2.111 + 1.133X$$

ஆனல், நடைமுறையில் இதுபோன்று சமன்பாடுகளை எழுதிக் கூட்டவேண்டிய அவசியமில்லை. கீழ்வரும் சமன்பாடுகளில் பொருத்தமான மதிப்புகளைப் பதிலிடுவதே போதுமானதாகும்.[2]

$$\Sigma(Y) = Na + b\Sigma(X) \quad (9.1)$$

$$\Sigma(XY) = a\Sigma(X) + b\Sigma(X^2) \quad (9.2)$$

இதில் Σ என்பது கூட்டலாகிய செயல்முறையைக் குறிக்கிறது.

கணிப்பு வழி பின்வரும் 9-3 பட்டியலில் தந்துள்ளதுபோன்ற பட்டியல் அமைப்பால் எளிதாக்கப்படுகிறது. கண்டறி சமன்பாடுகளில் கிடைக்கின்ற முடிவையொட்டியே இந்த முடிவுகளும் அமையும்.

பட்டியல் 9-3

நேர்கோடு பொருத்தத் தேவையான மதிப்புகள்

X	Y	XY	X^2	
1	3	3	1	$N=9$
2	4	8	4	$\Sigma(X)=45$
3	6	18	9	$\Sigma(Y)=70$
4	5	20	16	$\Sigma(X^2)=285$
5	10	50	25	$\Sigma(XY)=418$
6	9	54	36	
7	10	70	49	
8	12	96	64	
9	11	99	81	
45	70	418	285	

மிகவும் பொருத்தமுடைய நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிந்து பிறகு, கொடுக்கப்பட்ட X மதிப்புகளுக்கேற்ப Y மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து, அவற்றைக் கண்டறிந்த மதிப்புகளோடு ஒப்பிடலாம். இம் முடிவுகள் 9–4 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன.

சாதாரண பின்னங்களைப் பத்தியின் இறுதிவரை வைத்திருந்து அவற்றில் முடிவு 0 ஆவது காட்டப்பட்டிருக்கிறது. குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் கோட்டிலிருந்து பெறும் விலக்கங்களின் கூடுதல் சுழி ஆகும். ஒவ்வொரு விலக்கத்தையும் அதற்கு இயைந்த X மதிப்புகளால் பெருக்கிக் கிடைக்கும் கூட்டல் மதிப்பும் சுழி ஆகும். பொருத்துதலில் பயனுகும் கணக்கீடுகளை இவ்வாறு சரி பார்க்கலாம். விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதலான 10.4885 ஒரு

[2] பிற்சேர்க்கையில் ஒழுங்குச் சமன்பாடுகளை உருவாக்கும் முறைகள் தரப்பட்டுள்ளன.

சிறுமம் ஆகும். a அல்லது b-ன் மதிப்பினை மாற்றினால் கிடைக்கும் நேர்கோட்டிலிருந்து விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதல் 10.4885-ம் மிகும்.

பட்டியல் 9-4

மாறும் அளவு ஒன்றின் கண்டறி மதிப்புகளும் கணித்த மதிப்புகளும்.*

X	Y_0 கண்டறிந்தது	Y_c கணித்தது	v $(Y_0 - Y_c)$	v^2	Xv
1	3	$3\ 2\frac{4}{9}$	$-\ .2\frac{4}{9}$	.0597	$-\ .2\frac{4}{9}$
2	4	$4.3\frac{7}{9}$	$-\ .3\frac{7}{9}$	.1427	$-\ .7\frac{5}{9}$
3	6	$5.5\frac{1}{9}$	$+\ .4\frac{8}{9}$	.2390	$+\ 1.4\frac{6}{9}$
4	5	$6.6\frac{4}{9}$	$-1.6\frac{4}{9}$	2.7041	$-\ 6.5\frac{7}{9}$
5	10	$7.7\frac{7}{9}$	$+2\ 2\frac{2}{9}$	4.9381	$+11.1\frac{1}{9}$
6	9	$8.9\frac{1}{9}$	$+\ .0\frac{8}{9}$	.0079	$+\ .5\frac{3}{9}$
7	10	$10.0\frac{4}{9}$	$-\ .0\frac{4}{9}$	.0020	$-\ .3\frac{1}{9}$
8	12	$11.1\frac{7}{9}$	$+\ .8\frac{2}{9}$	.6760	$+\ 6.5\frac{7}{9}$
9	11	$12.3\frac{1}{9}$	$-1.3\frac{1}{9}$	1.7190	-11.8
			0.0	10.4885	0.0

* சில பத்திகளில் சாதாரண பின்னங்களை அப்படியே வைத்திருந்து, விலக்கங்களின் கூடுதல் தொகை சரியாகச் சுழியெனக் காட்டுகிறோம்.

மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பினை வரையறை செய்யப் பயன்படும் என்பதாலேயே வர்க்கக் கூடுதல் முறைபற்றி ஆராய்ந்தோம். இந்தச் சிக்கல் எல்லாத் துறைகளிலும் உண்டு. பருப்பொருள் அறிவியல் துறைகளில் மாறுபடாத தொடர்புகள் சில உண்டு. சூனியத்தில் விழுகின்ற பொருளின் வேகம் அது வீழ்ந்த நேரத்தின் நேரடியான சார்பலன் ஆகும். முற்றிலும் சூனியத்தில் மேற்கூறிய தொடர்பு முற்றிலும் பொருந்தும். (y வேகம், t வீழ்ச்சிக் காலம், g ஈர்ப்பு மாறிலி.) $y = gt$ என்ற சமன்பாடு மாறுவதில்லை. ஆனால், சமுதாய உயிரியல் துறைகளில் மேற்குறிப்பிட்டது போன்ற இயந்திரரீதியான சமன்பாடுகள் இல்லை. பொதுவாக, சராசரியாகப் பொருந்தக்கூடிய தொடர்புகளையே காணலாம். விதிவிலக்கு இல்லாத கணித திட்டங்களுக்கு, வரையறை செய்யப்பட்ட 'சட்ட திட்டங்களுக்கு' இணங்கிய நிலை இல்லை. ஒன்று அல்லது இரண்டு கூறுகளாகத் தனித்துப் பிரிக்கமுடியாத, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சக்திகள் பின்னிப் பிணைந்து நிற்கின்றன. எனவே, உயரமும் நிறையும் தொடர்புடையதாகும். ஆனால், இயந்திரரீதியில் அன்று. பருத்தியின் விலை, அதன் அளிப்போடு தொடர்புடையது;

ஆனால், பிற காரணக் கூறுகளும் விலையினைத் தீர்மானிக்கின்றன. ஊதியம் உழைப்பின் உற்பத்திப் பெருக்கத்தோடு தொடர்புடையது. ஆனால், இதுமட்டும் காரணமாக இருப்பதில்லை.

இதுபோன்ற சந்தர்ப்பங்களில் தொடர்புபற்றிய சமன்பாட்டை முடிவு செய்யவேண்டுமானால், சராசரி முறையைக் கையாண்டு, மாறுபடும் குறிப்புகளின் அடிப்படையிலே, மாதிரிகளுக்கு 'மிகவும் ஏற்ற மதிப்புகள்' எவை என மதிப்பீடு செய்யவேண்டும். குறைந்த வர்க்கமுறையே இச் செயலுக்கேற்ற சாதனம். விலக்கங்களின் பரவல் இயல்நிலையாக இருக்கும்போதுதான், தேவைப்பட்ட மாதிரிகளுக்கு மிகவும் ஏற்ற மதிப்புகளை மதிப்பீடு செய்ய இம்முறை மிகவும் பொருத்தமுடையதாகிறது என்பதையும் கவனிக்கவேண்டும்.

இந்த முறை வேண்டிய முறைகளைத் தோராயமாக அறிய வசதியான முறை; எளிய முறை. எனவே, மேலும் சிக்கலுள்ள முறைகளின்மூலம் (இயல்நிலையல்லாத பரவல்களில் உச்ச நிகழ்வாய்ப்பு முறையைப்போல) இன்னும் திருத்தமான முடிவுகளைக் காண இயலுமாயினும் நடைமுறையில் இதன் வசதி கருதி இதனையே கையாள்கிறோம்.

குறியீடு

பொதுவாக, முந்திய அத்தியாயங்களில் கையாளப்பட்ட குறியீட்டு முறையையே, உடன்தொடர்புபற்றிய இந்த அத்தியாயத்திலும் கையாளுகிறோம். சில புதிய குறியீடுகளையும் அறிமுகப்படுத்துகிறோம்.

$s_{y\cdot x}$: X–லிருந்து மதிப்பிடப்பட்ட Y மதிப்பீட்டின் தரப்பிழை

$s_{x\cdot y}$: Y-லிருந்து மதிப்பிடப்பட்ட X மதிப்பீட்டின் தரப்பிழை

r : உடன்தொடர்புக்கெழு—r_{yx}, என்று ஒட்டுக் குறிகளுடன் எழுதினால் முன்னது சார்ந்த மாறியையும் பின்னது சார்பிலா மாறியையும் குறிக்கும்

ρ (ரோ) : உடன்தொடர்புக்கெழுவின் முழுமைத் தொகுதி மதிப்பு

b_{yx} : தொடர்பு போக்குக்கெழு—ஒட்டுக் குறிகள் சார்ந்த, சார்பிலா மாறிகளைக் குறிக்கும்

β_{yx} : b_{yx}-ன் முழுமைத் தொகுதி மதிப்பு

Y_c or y_c : மாறிகளின் தொடர்பு சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட Y அல்லது y-ன் மதிப்பு

d_{yc} : Y-ன் சராசரியிலிருந்து Y_c மதிப்பின் விலக்கம்

v : Y-லிருந்து Y_c-ன் விலக்கம்; எச்சம்

s_{yc} : Y_c மதிப்புகள் தொடரின் தரவிலக்கம்

p or p_{xy} : சராசரிகளில் மூலங்களை எடுத்துக்கொண்டு இரு மாறிகளின் இணை மதிப்புகளின் சராசரி பெருக்கல் பலன்; இதனை உடன்மாற்றம் என்றும் கூறுவர்

s_{xy} : மாதிரியின் உடன்மாற்றம் p_{xy}

σ_{xy} : முழுமைத் தொகுதியின் உடன்மாற்றம்; முழுமைத் தொகுதியில் p_{xy}-க்குச் சமமானது

p' : மூலங்களைச் சராசரிகளில் அல்லாமல் வேறு இடங்களில் எடுத்துக்கொண்டு இரு மாறிகளின் இணை மதிப்புகளின் சராசரி பெருக்கல் பலன்

d_{yx} : தீர்மானக் கெழு, ஒட்டுக் குறிகள் சார்ந்த மாறிகளையும் சார்பிலா மாறிகளையும் குறிக்கும்; இது r^2_{yx}-க்குச் சமம்

z' : r-ன் லாகிருத உருமாற்றம்

ζ (ஸீடா) : z'-ன் முழுமைத் தொகுதி மதிப்பு

s_r : r-ன் தரப் பிழையின் மதிப்பீடு; σ_r என்று எழுதினால் s_r-ன் முழுமைத் தொகுதி மதிப்பு

s'_z : z'-ன் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட தரப்பிழை

s_b : மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுவின் தரப்பிழையின் மதிப்பீடு; σ_b என்பது s_b-ன் முழுமைத் தொகுதி மதிப்பு

r_r : மாதிரி ஒன்றிலிருந்து கிடைக்கும் ஸ்பியர்மன் மதிப்பிடத் தொடர்பு

ρ_r : ஸ்பியர்மன் கெழுவின் முழுமைத் தொகுதி அளவு

s_{rr} : r_r-ன் தரப்பிழையின் மதிப்பீடு

τ (டோ) : கெண்டாலின் மதிப்பிடத் தொடர்புக் கெழு (τ என்பது மாதிரி அளவையைக் குறிக்கும். பொதுவாக, கிரேக்க எழுத்துகளை முழுமைத் தொகுதி அளவைகளுக்குப் பயன்படுத்துவது என்ற பொது விதிக்கு இங்கே புறம்பாகப் பயனாகி இருக்கிறது)

S : இரண்டு (கெண்டால்) மதிப்பிட அமைப்புகளுள் இசைவை அளவைச் சுட்டிக்காட்டும் மொத்த அளவு

P : S-ன் நேர்ப் பகுதி

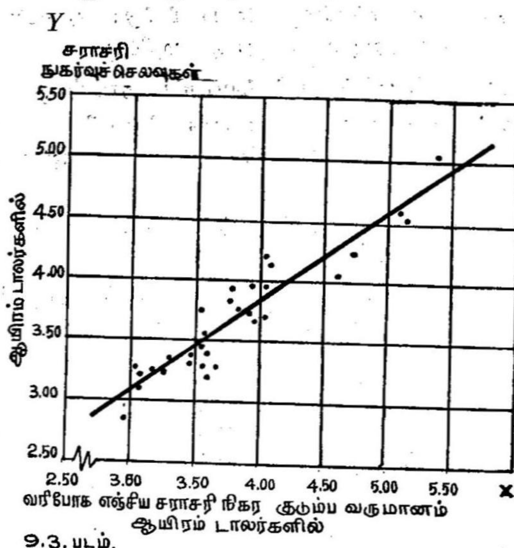
Q : S-ன் எதிர்ப்பகுதி

s_{sc} : S என்ற அளவின் மதிப்பிடப்பட்ட தரப்பிழை.

முந்திய அத்தியாயங்களைப் போலவே, (X, Y) என்ற பெரிய எழுத்துகள், மெய்யான மதிப்புகளின் அளவுத் திட்டத்தில் சுழிப் புள்ளிகளிலிருந்து அளக்கப்பட்ட, மாறிகளின் மூல மதிப்புகளைக் குறிக்கும். (x, y) என்ற சிறிய எழுத்துகள் மாறிகளின் சராசரியிலிருந்து அளக்கப்பட்ட விலக்க மதிப்புகளைக் குறிப்பன. (x', y') மேற்கோடிட்ட சிறிய எழுத்துகள் எதேச்சை மூலங்களிலிருந்து விலக்கங்களைக் குறிப்பன.

வரிகள்போக எஞ்சிய குடும்ப நிகர வருமானத்துக்கும் நடப்பு நுகர்வுக்கான குடும்பச் செலவுகளுக்குமுள்ள தொடர்பு : நகர்வாரியாகச் சராசரிகள்.

நடப்பு நுகர்வுக்கும், வரிகள் போக நடப்பு வருமானத்துக்கும் உள்ள தொடர்பை இனஞ்சுட்டும் எடுத்துக்காட்டாகக் கொண்டு வருணனை அளவைகளைப் பெறும் முறையை விளக்குவோம். அமெரிக்க நாட்டு நகரங்களுக்கு ஒரு பிரதிநிதித்துவ எடுத்துக்காட்டாக, 2,500-லிருந்து 30,500 வரை மக்கள் தொகையுள்ள 33 சிறிய நகர்களிலே 1950ஆம் ஆண்டில் வருமானம், செலவுபற்றிய



௯.௩. படம்.

குடும்ப நுகர்வுச்செலவும், குடும்ப வருமானமும் : 1950ஆம் ஆண்டில் நகர்வாரி சராசரி,* சராசரி நேர்கோட்டு உறவு

* 2,500-லிருந்து 30,500 வரை மக்கள் தொகையுள்ள 33 நகர்கள் மாதிரியாக எடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 9-5

அமெரிக்க நாட்டில் 2,500-லிருந்து 30,500 வரை மக்கள் தொகை உடைய நகர்களில் சராசரிக் குடும்ப வரிபோக எஞ்சிய நிகர வருமானம், சராசரிக் குடும்ப நடப்பு நுகர்வுச் செலவுகள்.*

(இரு மாறிகளும் ஆயிரம் டாலர்களில்)

நகர்	சராசரி நடப்பு குடும்ப வருமானம்	சராசரி நடப்பு நுகர்வுக்குக் குடும்ப செலவு			
	X	Y	XY	X^2	Y^2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
அண்ணு, இல்லி.	3.60	3.40	12.2400	12.9600	11.5600
ஆண்டியோச், காலிஃப்.	5.10	4 52	23.0520	26.0100	20.4304
பேரே, விடி.	3.78	3.90	14.7420	14.2884	15.2100
காம்டென், அர்க்.	3.04	3.09	9.3936	9.2416	9.5481
செய்யென், வியோ.	5.04	4.58	23.0832	25.4016	20.9764
கொலம்பியா, டென்.	3.15	3.22	10.1430	9.9225	10.3684
கூப்பர்ஸ்டவுன், நியூயார்க்	3.55	3.47	12.3185	12.6025	12.0409
டல்ஹார்ட், டெக்.	4.00	3.55	14.2000	16.0000	12.6025
டெமோபோலிஸ், அல.	2.93	2.85	8.3505	8.5849	8.1225
எல்கோ, நெவ.	5.33	5.05	26.9165	28.4089	25.5025
பயேட்டேவிலி, என். ஸி.	3.47	3.40	11.7980	12.0409	11.5600
கேரேட், இண்ட்.	4.03	3.70	14.9110	16.2409	13.6900
கிளெண்டேல், அரிஸா.	3.40	3 69	12.5460	11 5600	13.6161
கிராண்ட்போர்க்ஸ், என். டேக்.	4.02	3.95	15.8790	16.1604	15.6025
கிராண்ட் ஐலண்ட், நெபர்.	3.97	3.96	15.7212	15.7609	15.6816
கிராண்ட் ஜங்ஷன், கோல.	3.58	3.54	12.6732	12.8164	12.5316
கிரென்னல், ஐயோவா.	3.59	3.28	11.7752	12.8881	10.7584
லாஸேனியா, என். எச்.	3.55	3.78	13.4190	12.6025	14.2884
லோடி, காலிபோ.	4.07	4.10	16.6870	16.5649	16 8100
மாடில், ஒகாலா.	3.18	3.19	10.1442	10.1124	10.1761
மிடில்ஸ்பரோ, கெண்.	3.02	3.26	9.8452	9.1204	10.6276
நாண்டி-கிளோ, பா.	3.78	3.78	14.2884	14.2884	14.2884
பீகாஸ். டெக்ஸ்.	3.82	3.73	14.2486	14.5924	13.9129
புலஸ்கி, வா.	3.45	3.33	11.4885	11.9025	11.0889
ரேவனு, ஒஹியோ.	3.88	3.72	14.4336	15.0544	13.8384
ராலின்ஸ், வியோ.	4.71	4.26	20 0646	22.1841	18.1476
ரோஸ்பர்க், ஓர்.	4.58	4.04	18.5032	20.9764	16.3216
சலினு, கன்.	3.60	3.40	12.2400	12.9600	11.5600
சேண்ட்பாயின்ட், இடாஹோ.	3 28	3.32	10.8896	10.7584	11.0224
சாந்தா குருஸ், காலிபோ.	3.69	3.34	12.3246	13.6161	11.1556
சாவானி, ஒகோலே.	3.08	3.19	9.8252	9.4864	10.1761
செனன்டோ, ஐயோவா.	3.97	3.67	14.5699	15.7609	13.4689
வாஷிங்டன், என். ஜே.	4.06	4.15	16.8490	16.4836	17.2225
மொத்தம்	**125.30**	**121.41**	**469.5635**	**487.3518**	**453.9073**

* பீரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டேடிஸ்டிக்ஸ் வெளியிட்ட விளக்கத்தைக் கவனிக்க: 'குடும்ப வருமானம் பொதுவாகக் குறைத்தே கூறப்படுகிறது என்பது அனுபவம். எனவே, வருமானம் எனக் குறிக்கப்பட்டதற்கும், செலவுக்குமுள்ள வேறுபாடு முழுவதையும் சேமிப்பு என்றோ, சேமிப்பன்று என்றோ விளக்கம் தருவது சரியன்று.'

விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.[2] 9-5 பட்டியலில் இச் சராசரிகள், 2ஆம் பத்தி 3ஆம் பத்திகளில் தரப்பட்டுள்ளன. (முடிவுகளைச் செய்யும் போது, கண்டறிந்த அலகு நகரங்களே அன்றித் தனிப்பட்ட குடும்பங்கள் அன்று என்பதை நினைவில் கொள்ளவேண்டும்.)

இந்த விவரங்கள் 9.3 படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன; ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு தனி நகரின் சராசரி குடும்ப நுகர்வுச் செலவையும், சராசரி நடப்பு வருமானத்தையும் வரையறை செய்கிறது. இதனைச் 'சிதறல் விளக்கப்படம்' என்போம். இந்தப் படத்திலிருந்து இரண்டு மாறிகளுக்குமிடையே ஓர் உறவு இருப்பது புலனாகும். பொதுவாக, அதிக சராசரி குடும்ப வருமானமுள்ள நகர்களில் நுகர்வுக்கான குடும்பச் செலவும் அதிகமாகவே இருக்கும். ஆனால், இந்த உறவு முழுவதுமே நிறைவுடையதாக இருக்க, ஏறக்குறைய ஒரேமாதிரியான சராசரி வருமானம் பெற்ற இரு நகர்கள், நுகர்விற்காகும் சராசரிச் செலவில் மிகவும் வேறுபட்டிருக்கலாம். அதாவது, டெக்ஸாஸ் (Texas) மாநில, டல்ஹார்ட் (Dalhart) நகரில் சராசரி குடும்ப வருமானம் 4,000 டாலராகவும் சராசரி நுகர்வுச் செலவு 3,550 டாலராகவும் இருக்கிறது. ஆனால், வாஷிங்டன் (Washington) மாநில நியு ஜெர்ஸியில் (New Jersey) சராசரி குடும்ப வருமானம் 4,060 டாலராகவும், சராசரி நுகர்வுச் செலவு 4,150 டாலராகவும் இருக்கிறது. இந்த இரண்டு மாறிகளுக்கும் இடையேயுள்ள உறவு நிறையுடையதாக இருந்திருந்தால் ஒரே சராசரி குடும்ப வருமானமுள்ள நகர்களுக்கு, சராசரி நுகர்வுச் செலவுகளும் ஒன்றாகவே இருந்திருக்கும்.

சராசரித் தொடர்புகளின் சமன்பாடு

இந்தத் தொடர்புக்கு விளக்கம் தரவேண்டுமானால், ஓரளவு—முற்றிலும் நிறைவில்லாவிடினும்—பொருந்தக்கூடிய சமன்பாட்டைக் காண்பது. இந்தத் தொடர்பு நேர்கோட்டுத் தொடர்பு எனப் புனைந்துகொண்டு, தோராயச் சமன்பாட்டுக்குக் குறைந்த வர்க்க முறைமூலம் a, b என்ற இரு மாறிகளுக்கு மிகச் சிறந்த மதிப்பை அமைக்கலாம்.

இதற்காகப் பின்வரும் ஒழுங்குச் சமன்பாடுகளைத் தீர்வுகாண வேண்டியிருக்கிறது.

$$\Sigma(Y) = Na + b\Sigma(X)$$
$$\Sigma(XY) = a\Sigma(X) + b\Sigma(X^2)$$

[2] யு. எஸ். பீரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டேடிஸ்டிக்ஸ் (U.S. Bureau of Labor Statistics) 1950ஆம் ஆண்டில் நுகர்வுச் செலவுகள்பற்றி நடத்திய ஆய்வுமூலம் கிடைத்த விவரங்கள் இவை. அவர்களால் 1953 ஜூனில் வெளியிடப்பட்ட 'Family Income, Expenditures and Savings in 1950,' Bulletin No. 1097 (Revised) எனும் ஏட்டில் இதுபற்றிய விளக்கமும், மாதிரிச் செயல்பற்றிய குறிப்புகளும், சில அடிப்படை முடிவுகளும் தரப்பட்டுள்ளன.

9-5 பட்டியலில் கண்டவாறு விவரங்களை ஒழுங்குபடுத்திக் கொண்டு சமன்பாடுகளைத் தீர்வுகண்டு மதிப்புகளைக் கணக்கிடலாம். இவைகளைப் பதிலிட்டால்,

$$121{\cdot}4 = 33a + 125{\cdot}30b$$
$$469{\cdot}5635 = 125{\cdot}30a + 487{\cdot}3518b$$

இவற்றைத் தீர்வு கண்டால்,

$$a = 0{\cdot}8707$$
$$b = 0{\cdot}7396$$

ஆகிய மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

$$Y = 0{\cdot}8707 + 0{\cdot}7396\,X$$

என்பது நமக்கு வேண்டிய சமன்பாடு. 9·3 படத்தில் உள்ளது போன்று இந்த நேர்கோட்டைக் குறிக்கலாம்.

சராசரிக் குடும்ப நுகர்வு, வரிபோக எஞ்சிய சராசரிக் குடும்ப வருமானம் ஆகிய இருமாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காண கணிதச் சமன்பாடு ஒன்று கிடைத்துவிடுகிறது. சமன்பாட்டில் முன்னது சார்புடைய Y மாறி, மற்றது சார்பிலாத X மாறி. இரு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள சார்பலன் தொடர்புக்கு இந்தச் சமன்பாடு ஓர் அளவையாக அமைகிறது. இது ஒரு சராசரித் தொடர்பையே வெளிக்காட்டுகிறது. இந்தச் சமன்பாடு எத்தனை சிறப்புடையது? தொடர்பு நிறைவுடையதாக (perfect) இருக்குமானால், இந்தத் தொடர்புக்குரிய நேர்கோட்டின்மீது எல்லாப் புள்ளிகளும் அமையும்; ஒரு மாறியிலிருந்து மற்ற மாறியின் மதிப்பைத் திருத்தமாக அறிவதற்கு இந்தச் சமன்பாட்டை நம்பகமாகப் பயன் படுத்தலாம். ஆனால், ஒரு நேர்கோட்டிலிருந்து வேறுபாட்டுடனும், பரவலுடனுமுடைய புள்ளிகளில் திட்டமான சமன்பாட்டையுடைய ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்தலாம். ஆனால், இந்தச் சமன்பாடு ஒரு திட்டவட்டமான உறவினை வெளிக்காட்டுவதுபோல அமைந்திருந்தாலும் இதன் மாறுபாடு அதிகமாக இருப்பதனால், இதனை நம்பகமாகப் பயன்படுத்தமுடியாது. சராசரியினைப் பயன்படுத்தும்போது தோன்றுகின்ற சிக்கலை ஒத்தது இது. சராசரி எத்தனைச் சிறப்புடையது, அதனைச் சார்ந்த செறிவு எத்தகையது என்பதை அறிந்த பின்னரே அதனைச் செம்மையாகப் பயன்படுத்த முடியும். அதைப் போலவே, நடைமுறையில் எந்த அளவுக்கு ஒத்து வருகிறது என்று தெரிந்தாலொழிய மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள சமன்பாட்டுத் தொடர்புக்குப் பொருள் இல்லை. நாம் பொருத்திய நேர்கோட்டிலிருந்து உள்ள சிதறலை அளக்க ஓர் அளவு அவசியம் வேண்டும்.

அலைவுப் பரவலை வர்ணிக்கையில், தரவிலக்கமே மாறுபாட்டை அளக்கச் சிறந்த அளவையாகக் கூறப்பட்டது. சராசரித் தொடர்புச்

சமன்பாட்டின் நம்பகத்தை ஆய்வதற்கும் அதுவே ஏற்றது. சமன்பாட்டின் சிறப்பினை அறிய உதவுவதோடு சமன்பாட்டின் அடிப்படையில் செய்யப்படும் மதிப்பீடுகள் எந்த அளவுக்குத் திருத்தமுடையன என்பதையும், நேர்கோட்டிலிருந்து காணும் சராசரி விலக்கம் தெரிவிக்கும்.

மதிப்பீட்டின் தரப்பிழைக் கணிப்பு

சராசரித் தொடர்பு, நேர்கோட்டின் தரவிலக்கம், மதிப்பீடுகளின் திருத்தம்பற்றிய அளவையாதலால் அதனை மதிப்பீட்டின் தரப்பிழை (standard error of estimate) எனக் கூறலாம். [தரவிலக்கம் என்ற சொல்லைப் பொதுவாகக் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து பெறும் இருபடி மூல-சராசரி-வர்க்க விலக்கத்துக்குப் (root-mean-square deviation) பயன்படுத்துகிறோம்.] மதிப்பீட்டின் தரப்பிழை $s_{y\cdot x}$ என்ற குறியீட்டால் பொதுவாகக் குறிக்கப்படும்; ஒட்டுக்குறிகள் சார்புடைய மாறியையும் (முதல் ஒட்டுக்குறி), சார்பிலா மாறியையும் சுட்டும்.

$s_{y\cdot x}$ என்பதனைக் கணிக்கும்போது ஒவ்வொரு X மதிப்புக்கும் இசைந்த Y-ன் கணிக்கப்பட்ட மதிப்பை அறியவேண்டும். Y-ன் இயல் மதிப்புகளை

$$Y = 0{\cdot}8707 + 0.7396X$$

என்ற சமன்பாட்டில் கொடுக்கப்பட்ட X மதிப்புகளைப் பதிலிடுவதன் மூலம் கணிக்கலாம்; Y-ன் மெய்யான மதிப்புகளிலிருந்து இவற்றின் விலக்கத்தையும் தீர்மானிக்கலாம். இந்த எச்சங்களின் இருபடி மூல-சராசரி-வர்க்க விலக்கம், v என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும். 9-6 பட்டியலில் இம் மதிப்பினைக் கணிக்கும் முறை விளக்கப்பட்டுள்ளது. இப் பட்டியலிலிருந்து,

$$s_{y\cdot x} = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{N}} = \sqrt{\frac{0{\cdot}8868}{33}}$$

$$= 0{\cdot}164 \text{ (ஆயிரம் டாலர்களில்)}$$

எனக் கிடைக்கிறது. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கண்ட தரவிலக்கத்தைப் போன்றே, $s_{y\cdot x}$ என்ற அளவுக்கும் விளக்கம் தரல்வேண்டும். தொடர்பு நேர்கோட்டைச் சார்ந்து குறிப்புகள் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்தால் $\pm s$ வீச்சுக்குள் 68 சதவீதக் குறிப்புகள் (இங்கே 0·164) அடங்கும்; $\pm 2s$ வீச்சுக்குள் 95 சதவீதக் குறிப்புகள் (இங்கே 0.328) அடங்கும்; $\pm 3s$ வீச்சுக்குள் 99.7 சதவீதக் குறிப்புகள் (இங்கே 0.492) அடங்கும். X, Y இணைந்த மதிப்புகளைக் குறித்த புள்ளிகளுக்குப் பொருத்திய நேர்கோட்டையொட்டிச் சிதறல் இல்லாவிடில் $s_{y\cdot x}$ என்பதன் மதிப்பு 0 ஆகும்; இவ்விதமாக இருந்த X-ன் மதிப்பிலிருந்து Y-ன் மதிப்பைத் திருத்தமாக மதிப்பீடு செய்து

விடலாம். நேர்கோட்டைச் சார்ந்து சிதறல் குறையக் குறைய $s_{y \cdot x}$ என்பதன் மதிப்பு சிறியதாகும். எனவே, $s_{y \cdot x}$ என்ற மதிப்பு இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பினைச் சுட்டும் நேர்கோட்டின் சிறப்புக்கும் பயனுக்கும் சுட்டிக்காட்டியாக அமைகிறது. Y மதிப்புகளின் மூல அலகுகளிலேயே மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையும் அமைகிறது என்பதைக் கவனிக்க.[3]

மதிப்பீடுகளைச் செய்தல்: இப்பொழுது மேற்கண்ட முடிவுகளின் சிறப்புகளை ஆராய்வோம். நடப்பு நுகர்வுக்காகும் சராசரிக் குடும்பச் செலவினம் தெரியாத நிலையில் அதனை மதிப்பீடு செய்வதாக வைத்துக்கொள்ளுவோம். இதற்கு இரண்டு முறைகள் உண்டு. முதலாவதாக Y-மாறியின் அடிப்படையில் மதிப்பீடு செய்யலாம். 33 நகர விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி 9-6 பட்டியலில் கண்டபடி 3.679 (அலகு $ 1,000 என்பது நினைவிலிருக்க வேண்டும்).

எந்தத் தனிப்பட்ட நகரம்பற்றியும் நுகர்வுக்காகும் சராசரி செலவு சம்பந்தமாக விவரங்கள் இல்லாத நிலையில், எல்லா நகர விவரங்களின் சராசரியைத், தேவைப்படும் நகரத்துக்கு நிகழ் மதிப்பாகக் கொள்கிறோம். (ஒரு தொடரின் மிகுந்த நிகழ் அளவை அத் தொடரின் சராசரி ஆகும்.) சராசரியினின்று விலக்கத்தின் அளவையொட்டி, தரவிலக்கத்தால் வரையறை செய்யப்படும் மதிப்பீட்டின் திருத்தம் அமையும். இந்த எடுத்துக்காட்டில் தரவிலக்கத்தின் மதிப்பு 0.468. Y மதிப்புகளின் சராசரியை அடிப்படையாகக்கொண்ட மதிப்பீடுகளின் நம்பகத்துக்கு இது ஓர் அளவையாக அமைகிறது.

ஒரு நகரின் சராசரிக் குடும்ப வருமானம்பற்றிய செய்தி தெரிந்தால், அந் நகருக்குச் சராசரிக் குடும்பங்களின் நடப்பு நுகர்வுச் செலவினை மதிப்பீடு செய்வதற்கு வேறு வழி இருக்கிறது. முன் பக்கங்களில் விளக்கியுள்ளபடி நுகர்வுச் செலவுக்கும் குடும்ப வருமானத்துக்கும் உள்ள சராசரித் தொடர்பு (நகர்வாரியாகச் சராசரி செய்யப்பட்டபடி) பின் காட்டப்பெற்ற சமன்பாட்டால் வரையறை செய்யப்படுகிறது.

$$Y = 0.8707 + 0.7396\ X$$

[3] வருணனைக்கும், 9ஆம் அத்தியாயத்தின் இப் பகுதியிலுள்ள பல்வகை கணிப்புகளில் பொருத்தி வருவதற்கும், $\sqrt{\sum v^2/N}$ என்பதிலிருந்து மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையைப் பெறுகிறோம். ஆனால் $s_{y \cdot x}$ என்பதை $\sigma_{y \cdot x}$ என்ற முழுமைத் தொகுதி மதிப்பின் மதிப்பீடாகக் கொண்டால், அடுக்கு மூலக்குறிகள் அடங்கும் தொகுதி N ஆக இருக்கக்கூடாது; $N—2$ ஆக இருக்கவேண்டும். முழுமைத் தொகுதியின் σ காண்பதற்கு $N—1$ஐ N-க்குப் பதிலாகப் பயன்படுத்துவதை ஒத்தது இது. கண்டறிந்த குறிப்புகளிலிருந்து மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையை மதிப்பீடு செய்கையில் குறிப்புகளைக் கையாண்டு நேர்கோட்டைப் பொருத்தும்போது 2 வரையற்ற பாகைகளைச் செலவழிக்கிறோம். எனவே, நேர்கோட்டிலிருந்து விலக்கமடையும் குறிப்புகளுக்கு $N—2$ வரையற்ற டிகிரிகளே எஞ்சும். இவ்வத்தியாயத்தின் பின்னர் மதிப்பீட்டு சிக்கல்கள்பற்றிய பகுதிகளில் $N—2$ஐ தொகுதியாகப் பயன்படுத்துவது ஏற்றதே.

பட்டியல் 9-6

எச்சக்கணிப்பும் அவற்றின் வர்க்கமும்பற்றிய விளக்கம்

நகர்	நடப்பு நுகர்வுக்கான சராசரிச் செலவுகள் (ஆயிரம் டாலர்களில்)		(2)-(3)	
	உண்மையானது Y_0	கணித்தது Y_c	v	v^2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
அண்ணு, இல்லி.	3.40	3.53	−0.13	0.0169
ஆன்டியோச், காலிஃப்	4.52	4.64	−0 12	0.0144
பேரே, விடி.	3.90	3.67	+0.23	0.0529
காம்டென், ஆர்க்.	3.09	3.12	−0.03	0.0009
செய்யென், வியோ.	4.58	4.60	−0.02	0.0004
கொலம்பியா, டென்.	3.22	3.20	+0.02	0.0004
கூப்பர்ஸ்டவுன், நியூயார்க்	3.47	3.50	−0.03	0.0009
டல்ஹார்ட், டெக்.	3.55	3.83	−0.28	0.0784
டெமோபோலிஸ், அல.	2 85	3.04	−0.19	0.0361
எல்கோ, நெவ.	5.05	4.81	+0.24	0.0576
பயேட்டாவிலி, என். ஸி.	3.40	3 44	−0.04	0.0016
கேரேட், இண்டி.	3.70	3 85	−0.15	0.0225
கிளென்டெல், அரிஸா.	3 69	3.39	+0.30	0.0900
கிராண்ட் ஃபோர்க்ஸ், என். டேக்.	3.95	3.84	+0.11	0.0121
கிராண்ட் ஐலண்ட், நெபா.	3.96	3.81	+0.15	0.0225
கிராண்ட் ஜங்ஷன், கோல.	3.54	3.52	+0 02	0.0004
கிரென்னல், ஐயோவா.	3.28	3.53	−0 25	0.0625
லாஸேனியா, என். எச்.	3.78	3.50	+0.28	0.0784
லோடி, காலிபோ.	4 10	3.88	+0.22	0.0484
மாடில், ஒகாலா.	3.19	3.22	−0.03	0.0009
மிடில்ஸ்பரோ, கென்.	3.26	3.10	+0.16	0.0256
நான்டி-கிளோ, பா.	3.78	3.67	+0.11	0.0121
பீகாஸ், டெக்.	3.73	3.70	+0.03	0 0009
புலஸ்கி, வா.	3.33	3.42	−0.09	0.0081
ரேவனு, ஒஹியா	3.72	3 74	−0.02	0.0004
ராலின்ஸ், வியோ.	4.26	4.35	−0.09	0.0081
ரோஸ்பர்க், ஓர்.	4.04	4.26	−0.22	0.0484
சலினு, கென்.	3.40	3.53	−0.13	0.0169
சேண்ட்பாயின்ட், இடாஹோ.	3.32	3.29	+0.03	0.0009
சாந்தா குருஸ், காலிபோ.	3.34	3.60	−0.26	0.0676
சாவானி, ஒகோலே.	3.19	3.15	+0.04	0.0016
சென்ன்டே, ஐயோவா.	3.67	3.81	−0.14	0.0196
வாஷிங்டன், என். ஜே.	4.15	3.87	+0.28	0.0784
மொத்தம்				0.8868

ஒரு நகரில் வரிபோக எஞ்சிய சராசரி நடப்புக் குடும்ப வருமானம் 4.000 (ஆயிரம் டாலர்களில்). ஆனால், இந்தச் சமன்பாட்டிலிருந்து

நடப்பு நுகர்வானது 3.8291 அல்லது டாலருக்குத் திருத்தமாக 3,829 என்று மதிப்பீடு செய்யலாம். இதுதான் சராசரித் தொடர்பு சமன்பாட்டிலிருந்து தீர்மானிக்கக்கூடிய Y-ன் நெருங்கிய நிகழ் மதிப்பு ஆகும். இது Y-ன் சராசரியை நிகழ் மதிப்பாகக்கொண்ட முந்திய மதிப்பீட்டிலும் சிறந்ததா? X-க்கும் Y-க்குமுள்ள சராசரித் தொடர்பு பற்றிய நமது செய்திகளைக் கொண்டு கொடுக்கப்பட்ட X-ன் மதிப்பிலிருந்து Y-ன் மதிப்பை மதிப்பீடு செய்ய இயலுமா?

இந்தக் கேள்விக்கு விடையை, மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையும் மதிப்பீட்டின் தரப்பிழைக்கும் Y-ன் தரவிலக்கத்துக்குமுள்ள உறவும் கூறும். மதிப்பீட்டின் தரப்பிழை 0.164. Y-ன் தரவிலக்கம் 0.468. எனவே, சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைத்த மதிப்பீடு Y-ன் சராசரி மதிப்பிலிருந்து கிடைத்த மதிப்பீட்டினும் திருத்தம் உடையது. இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு நிலையில்லாதது; நிறைவில்லாதது; எனினும், அவற்றின் தொடர்புபற்றி நாம் அறிந்த செய்திகளைக்கொண்டு மதிப்பீட்டின் பிழையைக் கணிசமான அளவுக்குக் குறைக்க முடிகிறது. (மாதிரிகளிலிருந்து கிடைத்த விவரங்களைக் கையாள்கையில் Y-ன் சராசரி மதிப்பீட்டிலும், தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளான a, b ஆகியவற்றிலும், பிழைகள் நேர இடமுண்டு என்பது படிப்போருக்குத் தெரிந்ததே. ஆனால், Y-ன் தரவிலக்கத்தையும் மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையையும் ஒப்புநோக்குகையில் இப் பிழைகள் பாதிப்பதில்லை.)

உடன்தொடர்புக் கெழு

இரு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பை அளப்பதற்கு இரண்டு அளவைகள் கண்டோம். சராசரி ரீதியில் ஒரு மாறியில் நிகழ்கின்ற மாற்றங்களை மற்றொன்றின் மாற்றங்களோடு பிணைத்து ஓர் அடிப்படைச் சமன்பாட்டை முதலில் கண்டோம். பின்னர் இரண்டாவதாக சராசரித் தொடர்பு நேர்கோட்டையொட்டிய 'சிதறலின்' அளவையாக மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையைக் கண்டோம். தரப்பிழை தரவிலக்கத்தை ஒத்தது; இரண்டும் மூல Y மதிப்புகளை அளந்த அலகுகளிலே தனித்த உறுப்புகளின் விளக்கம் பெற்று அமைந்த அளவைகள். இந்த அளவை, தொடர்புச் சமன்பாட்டையொட்டி அமைந்த மதிப்பீட்டிலிருந்து குறிப்பிட்ட எல்லைக்குள் கண்டறிந்த ஒரு மதிப்பு அமைவதற்கான நிகழ்திறத்தைத் தீர்மானிப்பதற்கு உதவுகிறது.

மாறுபாட்டை அளக்கும் அளவையைக் கணிக்கும்போது, கொடுக்கப்பட்ட மூல அளவைகளிலிருந்து விடுபட்ட தனித்த அளவு தேவைப்படுகிறது என்பதைக் கண்டோம். குறிப்பாக, வேறுபட்ட பரவல்களை ஒப்புநோக்கும்போது அத்தகைய அளவை தேவைப்

பட்டது. எனவே, மாறுபாட்டின் அளவை (degree of variability) அளப்பதற்கு மாறுபாட்டுக் கெழு ஒன்றைப் பயன்படுத்தினோம். அத்தகைய ஓர் அளவையினைத் தற்போதைய ஆய்விலும் காண வேண்டும். இரு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பின் அளவுக்கு (degree of relationship) மூல அலகுகளிலிருந்து விடுபட்ட தனித்த கெழு ஒன்றினை அமைக்கவேண்டும். அதனை உடன்தொடர்பின் கெழு (coefficient of correlation) என்போம்.

முந்திய விளக்கத்தின் அடிப்படையில் இதனை விளக்குவோம். Y மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையோடு (தொடர்பு நேர்கோட்டை யொட்டிய சிதறல் அளவை), Y-ன் தரவிலக்கத்தை ஒப்புநோக்கி, தொடர்புச் சமன்பாட்டின் அடிப்படையில் கிடைக்கும் மதிப்பீடுகளின் பயனை ஆராயலாம் என்பது முன்னர்க் கூறப்பட்டது. மதிப்பீட்டின் தரப்பிழை, தரவிலக்கத்தின் அளவு பெரிதாக இருக்குமானால், தொடர்புச் சமன்பாட்டால், நமக்கு யாதொரு பயனும் இல்லை. ஆனால், தரப்பிழை தரவிலக்கத்தைவிடக் குறைவாக இருக்குமானால் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, மதிப்பீடுகளின் திருத்தங்களைச் செம்மைப்படுத்தலாம். எனவே, சமன்பாட்டின் சிறப்பை மதிப்பீட்டின் தரப்பிழைக்கும், தரவிலக்கத்துக்குமுள்ள உறவால் வெளியிடலாம். இரண்டும் தனித்த உறுப்புகளில் (absolute term) அமைந்தவை; எனவே, ஒன்றையொன்று வகுக்கும்போது தனித்த அளவை கிடைக்கிறது. எனவே,

$$\text{உடன் தொடர்பின் அளவு} = \frac{s_{y \cdot x}}{s_y}$$

என்று அமையும். இந்த விகிதத்தை

$$\text{உடன்தொடர்பின் அளவு} = r = \sqrt{1 - \frac{s^2_{y \cdot x}}{s^2_y}} \qquad (9.3)$$

என்று அமைப்பது மேலும் பயனுள்ளதாகும். நேர்கோட்டுச் சமன்பாட்டில் இந்த அளவையைப் பயன்படுத்தும்போது உடன்தொடர்பின் கெழு என அழைப்போம். இதனை (9.3) வாய்பாட்டில் குறிப்பிட்டதுபோல r என்ற எழுத்தால் சுட்டுவோம்.

இவ் வாய்பாட்டினைச்[4] சிறிது ஆராய்ந்தால் r-ன் சிறப்புத் தெரியவரும். தொடர் நேர்கோட்டையொட்டி சிதறல் இல்லையாயின், $s_{y \cdot x}$ என்பது சுழி ஆக இருக்கும்; இந்தச் சமன்பாடு இரு மாறிகளிடையே நிறைவுடைய உறவைக் காட்டும். வாய்பாட்டி

4 $s^2_{y \cdot x}$, s^2_y ஆகிய சராசரி வர்க்கங்களை (9.3) வாய்பாட்டில் பயன்படுத்தும்போது இருவர்க்கக் கூடுதலுக்கும் விகுதி ஒரே N ஆகும். அதாவது, இழந்த வரையற்ற பாகைகளுக்காக Nஐக் குறைப்பது இல்லை. 329 ஆம் பக்கம் அடிக்குறிப்பை கவனிக்கவும்.

லிருந்து, இதுபோன்ற சமயங்களில், r-ன் மதிப்பு 1 என்பதை அறியலாம்.

$s_{y \cdot x}$ என்பதன் உச்ச மதிப்பு s_y-க்குச் சமம். இத்தகைய சூழ்நிலை களில், தொடர்புச் சமன்பாட்டால் மதிப்பீட்டினைத் திருத்தமாக அறிய முடியாத நிலையில், வாய்பாட்டின்மூலம் r-ன் மதிப்பு சுழி ஆகும். இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே தொடர்பு இல்லை என்பதையே அத்தகைய மதிப்பு உணர்த்துகிறது. அதாவது, மிகவும் பொருந் தியே நேர்கோடு Y-களின் சராசரி வழியே படுக்கை மட்டமாகச் செல்லும். Y-ன் உயர்ந்த மதிப்புகளோடு X-ன் உயர்ந்த மதிப்பு களும், Y-ன் உயர்ந்த மதிப்புகளோடு X-ன் தாழ்ந்த மதிப்புகளும் இணைவதற்கில்லை என்பதையே இது உணர்த்துகிறது. இரண்டு மாறிகளும் தனித்தனியே இயங்குகின்றன. அத்தகைய சமயத்தில் பொருத்தப்பட்ட நேர்கோட்டிலிருந்து ஒவ்வொரு புள்ளியின் விலக்க மும் சராசரியிலிருந்து பெறுகின்ற விலக்கத்திற்குச் சமமாக இருக் கும். இப்படி மூல-சராசரி-வர்க்க விலக்கங்கள் இரண்டும் முன் கூறியதுபோலச் சமமாக இருக்கும்.

எனவே, சுழியும் ஒன்றும் r-ன் மதிப்புக்கு எல்லைகளாகும். நடைமுறையில் கிடைக்கின்ற மதிப்புகள் இவ் வரம்புகளுக்கிடையே அமையும்; இந்தத் தொடர்பு மிகுந்து காணப்படும்போது மதிப்பு 1-க்கு அருகிலிருக்கும். மொத்தக் குறிப்புகளில் அதிகமான சதவீதத்திற்குச் சமன்பாடு பொருத்தமாக அமைவதற்கு r-ன் மதிப்புப் பெரிதாக இருக்கும். முன்னர்க் கூறிய எடுத்துக்காட்டான சராசரிக் குடும்ப நுகர்வுச் செலவுக்கும் வரி போக மிஞ்சிய சராசரிக் குடும்ப வருமானத்திற்குமுள்ள தொடர்பாக

$$r = \sqrt{1 - \frac{(0.164)^2}{(0.468)^2}}$$

$$= 0.937$$

இந்தக் கெழு கொடுக்கப்பட்ட மாதிரியான நகரங்களுக்கு இடையேயுள்ள இரு மாறிகளுக்கிடையேயும் நெருங்கிய உறுதியான தொடர்பைக் காட்டுகிறது.

தொடர்புபற்றிய சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலியான b-ன் குறியையே தொடர்புக் கெழுவுக்கும் சேர்ப்பது அதனை மேலும் பொரு ளுடையதாக்கும். நேர்கோட்டின் சாய்வு நேரானதா, எதிரானதா என்பதைத் தெரிவிக்கும் இக் குறியை r உடன் சேர்க்கும்போது தொடர்பு நேரானதா எதிரிடையானதா என்பதைத் தெரிவிக்கும். தற்போதுள்ள எடுத்துக்காட்டில் ஒரு மாறியின் உயர்ந்த மதிப்புகள் மற்றொரு மாறியின் உயர்ந்த மதிப்புகளோடு இணைகின்றன.

தொடர்பு நேரானது; எனவே, கெழுவை $+0.937$ என்று எழுத வேண்டும். எதிரிடைத் தொடர்புக்கு எடுத்துக்காட்டாகப் பருத்தி உற்பத்தியையும் பருத்தி விலைகளையும் கூறலாம். இங்குத் தொடர்பு எதிரிடையானது ; ஒரு மாறியின் உயர்ந்த மதிப்பு மற்றொன்றின் குறைந்த மதிப்புகளோடு இணையும்.

தீர்மானக் கெழு (The Coefficient of Determination)

முந்திய பக்கங்களில் இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே சராசரி தொடர்பு நேர்கோட்டுச் சார்பலனைக் கண்டு, அதோடு மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையையும் தொடர்புக் கெழுவையும் கண்டு, இரு மாறிகளுக் கிடையேயுள்ள தொடர்பினை அளக்க முற்பட்டோம். தொடர்பு நேர் கோட்டினையொட்டி ஏற்படும் மாறுபாட்டை, மதிப்பீட்டின் தரவிலக் கத்தால் தனித்த உறுப்புகளால் அளக்கலாம். தொடர்பு நேர் கோட்டால் வரையறை செய்யப்படும்போது இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள உறவின் அளவை, தொடர்புக் கெழுவால் புலனாகாத அளவையாக அமைக்கிறோம். இவற்றிற்கு முடிவாக மேலும் ஒரு புதிய முறையில் தொடர்புக்கு ஓர் அளவையைக் கண்டுபிடிப்பது பயனுடையதாகும்.

ஆய்வாளர் மாறுபாட்டைப்பற்றி சில செய்திகளை அறிய விரும்பு வதால்தான் தொடர்புக் கெழுவைக் காண விரும்புகிறார். விவசாய உற்பத்தி ஆண்டுதோறும் மாறுவதை ஆராய விரும்பினால் மழை பெய்வதிலுள்ள வேறுபாட்டை அறிய வேண்டும். முந்திய பக்கங் களில் கூறப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டில், பல நகரங்களிடையே நடப்பு நுகர்விற்காகக் குடும்பங்களில் ஆகும் சராசரிச் செலவு மாறுபாட்டுக்கு விளக்கம் தரவேண்டிய தேவை ஆய்வாளருக்கு ஏற்படுகிறது. எனவே, சார்புடைய மாறியிலுள்ள வேறுபாட்டைக் காணவேண்டிய சிக்கல் எழுகிறது. இந்தச் சிக்கலைச் சார்புடைய மாறி யின் வேறுபாடுமூலமாகவும் தரவிலக்கம்மூலமாகவும் அளந்தறிய லாம்.

சிறிய நகரங்களில் சராசரிக் குடும்பத்தின் நுகர்வுக்கு ஆகும் செலவின் மாறுபாட்டை $s_y^2 = 0.21907$ (தரவிலக்கம் $s_y = 0.468$) என்பதால் அறிகிறோம்; இது பட்டியல் 9-6-ல் (பக்கம் 330) இரண் டாவது பத்தியில் தரப்பட்டுள்ள கண்டறிந்த Y-மதிப்புகளின் சிதறல் அளவையாகும். இதனை 9.3 படத்தில் (பக்கம் 324) குறித்துள் ளோம். கண்டறிந்த Y மதிப்புகளின் இந்தச் சிதறலையே நாம் அறிய முயலுகிறோம். சராசரித் தொடர்புபற்றிய நேர்கோட்டுச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்திக் கணிக்கப்படும் Y மதிப்புகளைக் கொண்டு அத்தகைய அளவையைக் கணிக்கலாம். 9-6 பட்டியலில்

3ஆம் பத்தியில் இந்த Y_c-க்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கணிக்கப்பட்ட இம் மதிப்புகளின் மாறுபாடு—இவற்றை s^2_{yc} என்பதால் குறிப்பிடலாம். இது 0.1922 ஆகும். இறுதி அளவையாகக் (9-6 பட்டியலில் 4, 5 பத்திகளிலிருந்து) கண்டறிந்த மதிப்புக்கும் கணித்த மதிப்புக்குமுள்ள வேறுபாடுகளிலிருந்து $s^2_{y \cdot x} = 0.0269$ எனக் கிடைக்கும். இவை எச்சங்களின் மாறுபாடு ஆகும்; முன்னரே கூறப்பட்டபடி இது ($s_{y \cdot x} = 0.164$) என்ற மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையின் வர்க்கம் ஆகும். இம் மூன்று மாறுபாடுகளும் பின்வரும் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கின்றன.

$$s^2_y = s^2_{y \cdot x} + s^2_{yc} \tag{9.4}$$
$$0.2191 = 0.0269 + 0.1922$$

அதாவது Y-ன் மூல மாறுபாடு, Y-ன் கணிக்கப்பட்ட மதிப்புகளின் மாறுபாடுகளோடு கண்டறிந்த மதிப்புகளுக்கும் கணித்த மதிப்புகளுக்குமுள்ள வேறுபாட்டை அளக்கும் எச்சங்களின் மாறுபாட்டைக் கூட்டியதற்குச் சமம்.[5] மூல வேறுபாடு இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது. $s^2_{y \cdot x}$ என்ற ஒரு பகுதி சராசரிக் குடும்ப வருமானத்தின் மாறுபாடு தவிர, பிற காரணக் கூறுகளால் சராசரிக் குடும்பச் செலவுகளில் ஏற்படும் விளைவுபற்றியதாக வைத்துக் கொள்ளலாம்.

[5] இந்த உறவின் நிறுவனம் பின்வருமாறு :

Y_0, என்ற கண்டறிந்த மதிப்புகளின குறைந்த வர்க்கப் பொருத்தம் பின்வரும் சமன்பாட்டைத் தரும்.

$$Y_c = a + bX \tag{1}$$

Y_0 என்ற தொடரும் Y_c (Y_c கணித்த மதிப்பு) என்ற தொடரும் $\bar{Y}$ என்ற ஒரே சராசரியையுடையன.

ஆகையால்

$$d = Y_0 - \bar{Y}$$
$$d_c = Y_c - \bar{Y}$$
$$v = Y_0 - Y_c$$

குறைந்த வர்க்கமுறைப் பொருத்தத்தால் (பிற்சேர்க்கை பார்க்க)

$$\Sigma v = 0 \tag{2}$$
$$\Sigma vX = 0 \tag{3}$$
$$d_c = Y_c - \bar{Y} \quad \text{ஆதலால்}$$

(1)-லிருந்து

$$d_c = a + bX - \bar{Y}$$
$$= a - \bar{Y} + bX \tag{4}$$

v என்ற ஒவ்வோர் எச்சத்தையும் $a - \bar{Y}$ என்ற மாறிலியால் பெருக்கிக் கூட்டினால் (2)-லிருந்து,

$$\Sigma(a - \bar{Y})v = 0 \tag{5}$$

சராசரித் தொடர்பு நேர்கோட்டையொட்டி ஏற்படும் 'சிதறலுக்குக்' காரணக்கூறுகள். இவை $s^2_{y \cdot x}$ என்பது Y-ன் 'விளக்கம் தரப்படாத மாறுபாட்டை' அமைப்பது என்றும், மற்றொரு பகுதியான $s^2_{y \cdot c}$ என்பது Y-ன் 'விளக்கம் தரப்பட்ட மாறுபாட்டை' அமைப்பது என்றும் கூறலாம். நாம் இங்கே ஆய்வுக்கு எடுத்துக்கொண்டுள்ளது காரணத் தொடர்புடைய மாறிகள் என்பது நாம் மேற்கொண்டுள்ள புனைவு; அதனால், கணிக்கப்பட்ட மதிப்புகள் அவற்றுக்குள் வேறுபடும் எனக் கூறலாம். ஏனெனில், அவை மாறுபடும் சராசரிக் குடும்ப வருமானங்களோடு, அதாவது மாறுபடும் X மதிப்புகளோடு சம்பந்தப்பட்டவை. நுகர்வுச் செலவுகள், வேறு காரணக் கூறுகளை யொட்டியல்லாது, குடும்ப வருமானத்தை யொட்டிய சார்பெண்ணாகவே இருந்தால் Y-ம், Y_c-ம் X-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் சமமாக இருக்கும். $s^2_{y \cdot x}$ என்பது சுழியாக இருக்கும்; s^2_{yc}, s^2_y-க்குச் சமமாக இருக்கும். இந்த எடுத்துக்காட்டில் விளக்கம் தரப்பட்ட மாறுபாட்டையுடைய பகுதி, விளக்கம் தரப்படாத மாறுபாட்டினுடைய பகுதியைவிடப் பெரிதாக இருக்கிறது. இரண்டு மாறிகளும் காரணத்தொடர்புடையன என்று கொண்டால், நகரத்துக்கு நகரம் குடும்பச் சராசரி வருமானம் மாறுபடும் காரணத்தினால் நகரத்துக்கு நகரம் சராசரிக் குடும்ப நுகர்வுச் செலவுகள் மாறுபடுகின்றன என்று கூறலாம்.

---

vX ஒவ்வொன்றையும் b என்ற மாறிலியால் பெருக்கிக் கூட்டினால் (3)-லிருந்து

$$\Sigma(bX)v = 0 \tag{6}$$

என்பது கிடைக்கும்.

(5)ஐயும் (6)ஐயும் கூட்டினால்,

$$\Sigma(a - \bar{Y} + bX)v = 0 \tag{7}$$

(4) என்ற சமன்பாட்டில் அடைப்புக்குள்ளிருக்கும் அளவு d_c ஆகும். எனவே,

$$\Sigma v d_c = 0 \tag{8}$$

d, v, Y_c ஆகியவற்றின் ஆரம்பச் சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$d = v + d_c \tag{9}$$

ஆகையால் $$d^2 = v^2 + 2vd_c + d_c^2 \tag{10}$$

அதோடு $$\Sigma d^2 = \Sigma v^2 + 2\Sigma v d_c + \Sigma d_c^2 \tag{11}$$

ஆனால் (8) லிருந்து $$\Sigma v d_c = 0$$

எனவே $$\Sigma d^2 = \Sigma v^2 + \Sigma d_c^2 \tag{12}$$

ஆதலால் $$\frac{\Sigma d^2}{N} = \frac{\Sigma v^2}{N} + \frac{\Sigma d_c}{N} \tag{13}$$

அதாவது $$s_y^2 = s^2_{y \cdot x} + s^2_{yc} \tag{14}$$

மேற்கூறிய மாறுபாடுகள் கூட்டில் தனிமை உள்ளனவாதலால், Y-ன் மூல மாறுபாடாகிய s_y^2 என்பதன் பின்னமாக 'விளக்கம் தரப்பட்ட' மாறுபாடான $s_{y_c}^2$ஐக் கூறலாம். அதாவது, d_{yx} என்பதை X-ன் மாற்றங்களால் விளைகின்ற அல்லது தீர்மானிக்கப் படுகின்ற Y மாற்றங்களின் விகிதத்தைக் குறித்தால்,

$$d_{yx} = \frac{s_{yc}}{s_y^2} \tag{9.5}$$

$$= \frac{0.1922}{0.2191} = 0.877$$

இதுதான் தீர்மானக் கெழு (coefficient of determination).

தீர்மானக் கெழுவிற்கும், தொடர்புக் கெழுவிற்கும் எளிய உறவு உண்டு. இந்தக் கெழுவின் வர்க்கத்தை

$$r_{yx}^2 = 1 - \frac{s_{y.x}^2}{s_y^2} \tag{9.6}$$

என்று எழுதலாம். இதே சமன்பாட்டை

$$r_{yx}^2 = \frac{s_y^2 - s_{y.x}^2}{s_y^2} \tag{9.7}$$

என்றும் மாற்றி எழுதலாம். ஆனால், 335ஆம் பக்கத்திலுள்ள (9.4) சமன்பாட்டிலிருந்து

$$s_y^2 - s_{y\cdot x}^2 = s_{yc}^2 \tag{9.8}$$

என்று தெரியும். (9.8) சமன்பாட்டில் வலதுபுற உறுப்பு (9.7) சமன் பாட்டின் பகுதி ஆகும். எனவே, (9.8)-ல் இதனைப் பயன்படுத்தி s_{yc}^2 என்று மதிப்பிட்டால்,

$$r_{yx}^2 = \frac{s_{yc}^2}{s_y^2} = d_{yx} \tag{9.9}$$

எனக் கிடைக்கும்.

தீர்மானக் கெழு தொடர்புக் கெழுவின் வர்க்கமாகும். (9.9) என்ற கடைசிச் சமன்பாட்டிலிருந்து தீர்மானக் கெழுவினை வேறு ஒரு புதிய கோணத்தில் நோக்க முடிகிறது. இருபடியாக்கப்பட்ட தீர்மானக் கெழுவானது Y-ன் கணித்த மதிப்பின் மாறுபாடுகளை, ('விளக்கம் தரப்பட்ட' மாறுபாடு) Y-ன் கண்டறிந்த மதிப்புகளின் மாறுபாட்டால் வகுத்ததற்குச் சமமாகும். பின்னர் குறிக்கப்பட் டிருக்கும் நிபந்தனைகளுக்குக் கட்டுப்பட்டு r^2 என்பதனைச் சார்பிலாத

மாறிகளின் காரணத்தால் சார்ந்த மாறிகளில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் வீதத்துக்கு அளவையாகக் கருதலாம்.

தீர்மானக் கெழு மிகவும் பயனுள்ள ஓர் அளவை. மேலும், பல சமயங்களில் தவருன விளக்கம் தரப்படும் அளவையுமாகும். முதலாவதாக, அதன் சொல்லமைப்பே தவருன விளக்கத்திற்கு இடந்தரும்; மாறி, மாறியின் காரணத் தொடர்பு உடையது என்ற பொருளைத் தாங்கி நிற்கிறது. ஆனல், புள்ளிவிவர ஆய்வின்படி அத்தகைய காரணம் நிறுவப்படுவதில்லை. புள்ளிவிவரச் சான்று ஆதாரமெல்லாம் உடன்மாறுபாட்டை (covariation) வரையறை செய்வதுதான்: இந்தச் சொல் நடுநிலையான பொருளில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. காரணம் இருக்கின்றதா இல்லையா அல்லது காரணம் இருந்தால் எவ்வகையில் பாதிக்கிறது என்பதனை அளவின் விவரங்களைத் தவிர பிற சான்றுகளைக் கொண்டுதான் தீர்மானம் செய்யவேண்டும். (காரணமென்று எதனை நாம் கருதுகிறோமோ அதனை வரையறை செய்வது ஆய்வாளரின் சக்திக்கு அப்பாற்பட்டது.) எனவே, ' விளக்கம் தரப்பட்ட ', ' விளக்கம் தரப்படாத ' என்ற சொற்களை முன்கூறிய விவாதத்தில் மேற்கோள் குறிகளில் எழுதினேம்.[6] தற்போதைய எடுத்துக்காட்டில், குடும்ப வருமானத்தின் அடிப்படையில் ஓரளவிற்கு நுகர்வுச் செலவுகள் அமைகின்றன என்ற தற்புனைவிற்கு ஓரளவு ஆதாரமிருப்பதை அறியலாம். எனவே, இந்தச் சொல்லைக் கையாண்டது ஓரளவு பொருத்தமுள்ளதே.

பயன்படுத்தப்படும் மாறுபாட்டு அளவினைக் குறித்தது அடுத்த நிபந்தனை. மொத்த வேறுபாட்டை 'விளக்கப்பட்ட', ' விளக்கப்படாத ' பகுதிகளாகப் பிரிப்பது மாறுபாடுகளுக்கே உரியதாகும். தரவிலக்கங்களுக்கு இந்தக் கூட்டல் தொடர்பைப் பயன்படுத்தக் கூடாது. தீர்மானக் கெழுவை எடுத்துக்கொள்ளும்போது, வேறுபாடு தரவிலக்கத்தின் இருபடி என்பதனை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

முந்திய பக்கங்களில் கூறப்பட்ட உடன்தொடர்பு அளவைகளுக்கெல்லாம் பொருந்தக்கூடிய மூன்ருவது அம்சம் ஒன்றுண்டு. நாம் நேர்கோட்டு எடுத்துக்காட்டுகளையே இதுவரை கண்டோம்; அதாவது, இவை சராசரித் தொடர்பை நேர்கோடாக வரையறை செய்யும் சார்பலன் அமைந்த எடுத்துக்காட்டுகளாகும். பிற சார்பலன்கள் பயனுகும்போதுகூட d_{yx}-க்கு ஒத்த அளவைகளைக் கணக்கிடலாம். ஆனல், அந்த அளவைகள் ஐயத்துக்கிடமின்றி இருக்க

[6] மேற்கோள் குறிகள் செய்தியின் தனித்தன்மை குறித்து எச்சரிக்கை செய்தற்பொருட்டே.

வேண்டுமானால், எந்தச் சமன்பாடுகள் அங்குப் பயன்படுத்தப்படு கின்றனவோ அவற்றினைக் குறிக்கவேண்டும்.

இந்த நிபந்தனைகளையெல்லாம் மனத்தில் கொண்டால், 33 சிறிய நகரங்களுடைய தற்போதைய மாதிரியில், நகருக்கு நகரம் குடும்பச் சராசரி நுகர்வுச் செலவு மாறுபாடுகளில் 87.7 சதவீதம் குடும்பச் சராசரி (வரிபோக) வருமான மாறுபாடுகளால் விளைகிறது. மேற் கண்ட செய்தி பயனுள்ள விளக்கம் தரும் செய்தியாகும்.

கணிப்பின் விவரங்கள்: முந்திய பகுதியில், மாறுபடும் அளவை களின் தொடர்பை அளக்கப் பயனாகும் பல்வேறு அளவைகளை விவரிக்க முயன்றோம்; செயல்முறைகள்பற்றிய விரிவான விளக் கத்தைத் தரவில்லை. இப்போது அவற்றைக் கணிக்கும் முறைகளைப் பற்றிய விவரத்தைத் தருவோம். அதோடு இந்தக் கணிப்பை மிகச் சுருக்கமாகச் செய்யச் சில முறைகளையும் காண்போம். முந்திய பகுதியில் தரப்பட்டுள்ள விளக்கம், தேவையான மூன்று மதிப்பு களையும் முறையாகப் பெறுவதற்கு வழிகாட்டியாக அமைந்துள்ளது. இவற்றைப் பொதுவாகக் கையாளலாமெனினும், அளவை $s_{y \cdot x}$ ஐக் கணிக்கச் சுருக்கு வழியைக் கையாண்டால் சிரமம் குறையும். மேலே தரப்பட்ட விவரங்களை ஒத்த வகைக்கு இந்த முறையைக் கையாள்வதுபற்றி முதலில் வருணிப்போம். இப்போதைக்கு நேர் கோட்டுத் தொடர்பினையுடைய மாறிகளைப்பற்றிமட்டும் விவாதிப் போம்.

முதலாவது சிக்கல், தொடர்பின் சமன்பாட்டைப் பெறுவது பற்றியதாகும்.

$$Y = a+bX$$

என்ற வகையைச் சேர்ந்த நேர்கோட்டைக் குறைந்த வர்க்க முறையால் பொருத்துவோம்.

$s^2_{y.x}$ என்பதனைக் கணிப்பதே—அதாவது, தரப்பிழையின் மதிப் பீட்டின் இருபடியைக் கணிப்பதே அடுத்த வேலையாகும். முந்திய எடுத்துக்காட்டில், ஒவ்வொரு தனிப்பட்ட குறிப்பும் பொருத்தப்பட்ட நேர்கோட்டிலிருந்து விலக்கமடைவதை அளந்தும், இவ் விலக்கங் களின் சராசரி-இருபடிகளைக்கொண்டும் $s^2_{y.x}$ கணிக்கப்பட்டது. பின்வரும் சமன்பாட்டின்மூலம் இந்த மதிப்பினைப் பெறலாம்:[7]

$$s^2_{y.x} = \frac{\Sigma(Y^2)-a\Sigma(Y) - b\Sigma(XY)}{N}$$

[7] தரப்பிழையின் மதிப்பீட்டுக்குப் பொது வாய்பாடு

$$s^2_{y.x} = \Sigma v^2/N \qquad (1)$$

இதில்

$$v = Y_0 - Y_c$$
$$= Y_0 - a - bX \qquad (2)$$

a-ம் b-ம் பொருத்தப்பட்ட நேர்கோட்டில் மாறிலியாக அமைந்த அளவுகள்; பிற மதிப்புகள் மூலக்குறிப்புகளைப்பற்றியன. இச் சமன்பாட்டில் a, b மற்ற அவசியமான மதிப்புகள் ஆகியவற்றைப் பட்டியல் 9.5-லிருந்து பெற்று மதிப்பிட்டால் பின்வரும் சமன்பாடு கிடைக்கும்:[8]

$$s^2_{y.x} = \frac{453.9073-(0.870745\times121.41)-(0.739628\times469.5635)}{33}$$

$$= 0.0269$$

$$s_{y\cdot x} = 0.164$$

இதிலிருந்து முன்னர் வருணித்த முறையைக் கையாளலாம்.

$$r\text{ஐ } r = \sqrt{1-\frac{s^2_{y\cdot x}}{s^2_y}} \quad \text{என்ற}$$

வாய்பாட்டிலிருந்து பெறலாம்.

இவ்வகையில் எத்தனை புள்ளிகள் உள்ளனவோ அத்தனை சமன்பாடுகள் இருக்கும். ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் v ஆல் பெருக்கிக் கூடுதல் காண்போமானால்,

$$\Sigma v^2 = \Sigma vY_0 - a\Sigma v - b\Sigma vX \qquad (3)$$

கிடைக்கும்.

ஆனால், $$\Sigma v = 0$$

$$\Sigma vX = 0$$

எனவே, $$\Sigma v^2 = \Sigma vY_0 \qquad (4)$$

(2) சமன்பாட்டை மீண்டும் எடுத்துக்கொண்டு முழுவதையும் Y_0 ஆல் பெருக்கிக் கூட்டினால்,

$$\Sigma vY_0 = \Sigma Y_0^2 - a\Sigma Y_0 - b\Sigma(XY_0) \qquad (5)$$

கிடைக்கும். ΣvY_0 என்றதற்குச் சமமான மதிப்பை (4) சமன்பாட்டிலிட்டால்,

$$\Sigma v^2 = \Sigma Y_0^2 - a\Sigma Y_0 - b\Sigma(XY_0) \qquad (6)$$

கிடைக்கும். இதிலிருந்து $s^2_{y.x}$-க்குக் கொடுக்கப்பட்ட வாய்பாட்டைக் காணலாம். (Y என்ற மூலவாய்பாட்டில் பயனுகும் குறி Y-ன் கண்டறிந்த மதிப்புகளைக் குறிக்கிறது; இந்த அடிக்குறிப்பில் அதனை Y_0 என்று குறித்துள்ளோம்.)

[8] முதலில் சமன்பாட்டில் தந்துள்ளதைவிட அதிக அளவு ஸ்தானத்துக்குத் திருத்தமாக a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் தரப்பட்டுள்ளன.

r என்ற கெழுவை $s_{y \cdot x}$ என்ற இடைமதிப்பைக் கணிக்காமலேயே கணக்கிட முடியும். r என்பதற்கு மேற்படி வாய்பாட்டைப் பின்வருமாறு அமைக்கலாம்:

$$r^2 = \frac{a\Sigma(Y) + b\Sigma(XY) - Nc_y^2}{\Sigma(Y^2) - Nc_y^2} \qquad (9.10)$$

இதில் c_y என்பது Y சராசரிக்கும், கணிப்புகளுக்குப் பயனாகும் மூலத்துக்கும் [9] இடையேயுள்ள வேறுபாடுகளைக் குறிக்கும். மூல Y அச்சின் மூலம் சுழி ஆனால், c_y என்பது Y-ன் கூட்டுச் சராசரிக்குச் சமமாகும்.

தற்போதைய எடுத்துக்காட்டில் 9-5 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு

$$c_y = \frac{121.41}{33} = 3\ 67909$$

பிற மதிப்புகளால் $s_{y.x}^2$ என்பதில் பயனான அதே மதிப்புகளே

9 $$r^2 = 1 - \frac{s_{y \cdot x}^2}{s_y^2}$$

என்ற வாய்ப்பாட்டை $$r^2 = 1 - \frac{\Sigma(v^2)}{\Sigma(y^2)}$$

என்று எழுதலாம், இதில் y என்பது Y என்பதன் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து பெறும் விலக்கங்களாகும். ஆனால்,

$$\frac{\Sigma(y^2)}{N} = \frac{(\Sigma Y^2)}{N} - c_y^2$$

இதில் Y என்பது (மூல அளவுத் திட்டத்தில் இங்கு 0 என எடுத்துக்கொள்ளப் படுகிறது) எதேச்சை மூலமொன்றிலிருந்து விலக்கம். c_y என்பது மூலத்துக்கும் Y சராசரிக்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாட்டைக் குறிக்கும்.

ஆகையால், $$r^2 = 1 - \frac{\Sigma(v^2)}{\Sigma(Y^2) - Nc_y^2}$$

இந்தச் சமன்பாட்டில் $\Sigma(v^2)$-க்குச் சமமானதை 7ஆவது அடிக்குறிப்பில் கண்டபடி தந்தால்,

$$r^2 = 1 - \frac{\Sigma(Y^2) - a\Sigma(Y) - b\Sigma(XY)}{\Sigma(Y^2) - Nc_y^2}$$

இதனைச் சுருக்கினால்,

$$r^2 = \frac{a\Sigma(Y) + b\Sigma(XY) - Nc_y^2}{\Sigma(Y^2) - Nc_y^2}$$

என்று வரும்.

(9.10) வாய்பாட்டில் பதிலிட,

$$r^2 = \frac{6.341362}{7.2292}$$

$$= 0.8772$$

$$r = +0.937$$

என வரும்.

உண்மையில் குறைந்த வர்க்கமுறைமூலமாக ஒரு நேர்கோட்டினைப் பொருத்துவதற்கு நாம் மேற்கொள்ளும் முயற்சியிலேயே 2 மாறும் தன்மையுடைய அளவைகளை முழுவதும் விவரிப்பதற்கு வேண்டிய s, r ஆகியவற்றிற்கும் தேவையான அளவைகள் கிடைத்துவிடுகின்றன. இதனைத் தவிர வேறு தேவையான குறிப்புகள் $\Sigma(Y^2)$-ம் c_y-ம் ஆகும்.

முந்திய அத்தியாயங்களில் கண்ட செயல்முறைகளில் ஒரு தர்க்கரீதியான வளர்ச்சியைக் காணலாம். முதலாவதாக, சராசரித் தொடர்பின் குறைந்த இருபடிச் சமன்பாடு கண்டோம். அடுத்ததாக, மேற்கூறிய சமன்பாட்டின் அடிப்படையில் செய்யும் மதிப்பீடுகளில் நேரும் பிழைகளுக்கு ஓர் அளவு கண்டோம். மூன்றாவதாக, உடன் தொடர்புக்கு ஒரு புலனுகா அளவு கண்டோம். இந்த முறையைக் 'குறைந்த வர்க்கமுறை' என்று அழைப்பது வசதியானது. பிறிதொரு முறைப்படி, முதலில் உடன்பாட்டுக் கெழுவைக் கண்டு, பின்னர் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிகளையும், தரப்பிழையின் மதிப்பீட்டையும் துணை மதிப்புகளாகக் கண்டோம். பின்னர் கூறப்பட்ட முறையைப் 'பெருக்க மொமென்டு முறை' என்போம். (இரு முறையும் கணித ரீதியில் ஒன்றே; கூறுவதற்கு வசதியாக இரு பெயரிட்டு அழைக்கிறோம்.) குறிப்புகள் அதிகமாக இருக்கும்போதும் இருபடி அலைவுப்பட்டியலாக இருக்கும்போதும் பெருக்கு மொமென்டு முறை மற்றதினும் எளிது.

உடன்தொடர்புக் கெழுவின் பெருக்க மொமென்டு வாய்பாடு: தொகுக்கப்படாத விவரங்கள்

முந்திய எடுத்துக்காட்டுகளில்,

$$r^2 = \frac{a\Sigma(Y) + b\Sigma(XY) - Nc_y^2}{\Sigma(Y^2) - Nc_y^2}$$

என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து உடன்தொடர்புக் கெழு கண்டுபிடிக்கப் பட்டது. இது குறைந்த வர்க்கமுறையால் நேர்கோட்டைப் பொருத்துவதன்மூலம் கிடைக்கும் சமன்பாடுகளின் அடிப்படையில் அமைந்தது. நடைமுறைக்கு இதனை இன்னும் எளிய வடிவில் அமைக்கமுடியும் என்பதைக் காட்டுவோம்.

ஒரு விவரத்துக்கு நேர்கோட்டைப் பொருத்தும்போது சராசரிகளில் மூலம் இருக்குமானல்—இரண்டு ஒழுங்குச் சமன்பாடுகளான,

$$\Sigma(Y) = Na + b\Sigma(X)$$
$$\Sigma(XY) = a\Sigma(X) + b\Sigma(X^2)$$

என்பவை

$$\Sigma(y) = Na + b\Sigma(x)$$
$$\Sigma(xy) = a\Sigma(x) + b\Sigma(x^2)$$

என்ருகும். இதில், x, y என்பன சராசரியிலிருந்து பெற்ற விலக்கமாகும். இதில் முதல் சமன்பாடு மறைகிறது; இரண்டாவது,

$$\Sigma(xy) = b\Sigma(x^2)$$

என எளிமையடைகிறது. ஏனெனில்,

$$\Sigma(x) = 0,\ \Sigma(y) = 0$$

தேவைப்பட்ட ஒரே மாறிலியான சாய்வாகிய b பின்வருமாறு கிடைக்கும்

$$b = \frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(x^2)}$$

அதே சந்தர்ப்பத்தில்,

$$r^2 = \frac{a\Sigma(Y) + b\,\Sigma(XY) - Nc_y^2}{\Sigma(Y^2) - Nc_y^2}$$

என்பது

$$r^2 = \frac{b\Sigma(xy)}{\Sigma(y^2)}$$

என்ருகும்; ஏனெனில், Y-ன் சராசரிகளிலிருந்து விலக்கங்கள் அளக்கப்படும்போது $c_y = 0$. b-ன் தீர்மானிக்கப்பட்ட மதிப்பைப் பதிலிட்டால்,

$$r^2 = \frac{\Sigma(xy) \cdot \Sigma(xy)}{\Sigma(y^2) \cdot \Sigma(x^2)}$$

ஆனல், $\Sigma(y^2) = Ns_y^2$, $\Sigma(x^2) = Ns_x^2$

ஆகையால்,

$$r^2 = \frac{\Sigma(xy) \cdot \Sigma(xy)}{N^2 s_y^2 s_x^2}$$

எனவே,

$$r = \frac{\Sigma(xy)}{Ns_x s_y} \qquad (9.11)$$

இதில், x-ம் y-ம் சராசரியினை மூலமாகக்கொண்டு காணப்பட்ட விலக்கங்கள்.

இதே வாய்பாட்டை,

$$r = \frac{p}{s_x s_y} \tag{9.12}$$

என எழுதலாம்; இதில்,

$$p = \frac{\Sigma(xy)}{N}$$

p என்பது x, y ஆகிய இணைந்த மதிப்புகள் அதனதன் சராசரியிலிருந்து பெற்ற விலக்கங்களின் சராசரிப் பெருக்கம். இந்தச் சராசரிப் பெருக்கம்—இது s_{xy} என்றும் குறிக்கப்படுகிறது—உடன் மாறுபாடு (covariance) என்றும், முதல் பெருக்க மொமென்டு (product-moment) என்றும் கூறலாம். (9.11), (9.12) ஆகிய வாய்பாடுகளில் இது பயனுவதால் இதனை r-ன் பெருக்க மொமென்டு வாய்பாடு என்கிறோம்.

மாதிரிகளிலிருந்து பெற்ற அளவைகளின்மூலம் இந்த வாய்பாடு தரப்படுகிறது. முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளைப் பயன்படுத்தும் போது அவற்றின் அளவைகளுக்கான குறியீடுகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

இதில்,

$$\rho = \frac{\Sigma(xy)}{N\sigma_x\sigma_y} \tag{9.13}$$

அல்லது,

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \tag{9.14}$$

என்பவற்றைப் பயன்படுத்தவேண்டும்.

கடைசி வாய்பாட்டில் σ_{xy} என்பது முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டை, அதாவது, முழுமைத் தொகுதியில் இணைத்த X, Y மதிப்புகளின் சராசரிப் பெருக்கத்தை உணர்த்துகிறது. p என்பதற்கு இசைந்த முழுமைத் தொகுதியின் அளவை அது. (s_{xy}, σ_{xy} என்ற குறியீடுகளை, Y அடிப்படையில் செய்யப்பட்ட X மதிப்பீட்டின் தரப் பிழையான $s_{x \cdot y}$, $\sigma_{x \cdot y}$ ஆகியவற்றோடு குழப்பிக்கொள்ளக்கூடாது.)

முந்திய பகுதியில் கூறப்பட்ட முறைக்குச் சற்றே மாறுபாட்டுடன் தொடர்புக் கெழுவை இந்த வாய்பாட்டினுல் கணிக்கிறோம். முன்னரே விளக்கப்பட்டபடி ஏதாவது ஓர் எதேச்சை மூலத்திலிருந்து

கூட்டுச் சராசரியையும், தரவிலக்கத்தையும் எளிதில் கண்டு, இந்த எதேச்சை மூலத்திலிருந்து கணக்கிடப்படுவதால் நேரும் பிழையைத் திருத்திக்கொள்ளலாம். இதேபோன்றே பெருக்க இயக்கத்தையும் எதேச்சை மூலத்தையுமொட்டிக் கண்டுபிடித்து, பின்னர் திருத்தி, எளிதில் கணிக்கலாம்.

எதேச்சை மூலத்திலிருந்து ஒரு புள்ளியின் விலக்கங்கள் x', y'. அவ் விலக்கங்களின் சராசரிப் பெருக்கம் p' என்றால்

$$p' = \frac{\Sigma(x'y')}{N}$$

p'ஐக் கணிப்பது கடினமன்று. விலக்கங்களை மையப்புள்ளியிலிருந்து அளந்து, வகுப்பு இடைவெளி அலகுகளில் எழுதலாம். p' கிடைத்தால்,

$$p = p' - c_x c_y$$

என்பதிலிருந்து உண்மை சராசரிப் பெருக்கம் கிடைக்கும். இதில் c_x, c_y என்பது, x, y ஆகியவைகளின் உண்மை மூலத்துக்கும் எதேச்சை மூலத்துக்குமுள்ள வேறுபாடுகள் ஆகும்.[10]

[10] மேற்கண்ட தொடர்பின் நிறுவனம்

$x' = x$-களின் எதேச்சையின் மூலத்திலிருந்து ஒரு புள்ளியின் விலக்கம்

$x = x$-களின் உண்மை மூலத்திலிருந்து ஒரு புள்ளியின் விலக்கம்

$c_x = x$-களின் உண்மை மூலத்துக்கும், எதேச்சை மூலத்துக்குமுள்ள வேறுபாடு

$y' = y$-களின் எதேச்சை மூலத்திலிருந்து அதே புள்ளியின் விலக்கம்.

$y = y$-களின் உண்மை மூலத்திலிருந்து அதே புள்ளியின் விலக்கம்.

$c_y = y$-களின் உண்மை மூலத்துக்கும் எதேச்சை மூலத்துக்குமுள்ள வேறுபாடு

$$x' = x + c_x$$
$$y' = y + c_y$$
$$x'y' = (x+c_x)(y+c_y) = xy + c_x y + c_y x + c_x c_y$$

N புள்ளிகளுக்கு அத்தகைய பெருக்கங்களின் கூடுதல்,

$$\Sigma(x'y') = \Sigma(xy) + c_x\Sigma(y) + c_y\Sigma(x) + Nc_x c_y$$

ஆனால், $\Sigma(y) = 0, \quad \Sigma(x) = 0.$

ஆகையால் $\Sigma(x'y') = \Sigma(xy) + Nc_x c_y$

$$\frac{\Sigma(x'y')}{N} = \frac{\Sigma(xy)}{N} + c_x c_y$$

$$\frac{\Sigma(xy)}{N} = \frac{\Sigma(x'y')}{N} - c_x c_y$$

அல்லது $p = p' - c_x c_y$

ஓர் எடுத்துக்காட்டு : இம்முறையை முதலில் தொகுக்கப்படாத விவரங்களைக் கொண்டு விளக்குவோம். 9-5 பட்டியலை எடுத்துக் கொண்டால் குடும்ப வருமானம் (X), நுகர்வுக்கான குடும்பச் செலவு (Y); இவற்றைப்பற்றிய விவரங்களிலிருந்து பின்வரும் மதிப்புகள் கணிப்புக்குத் தேவைப்படுகின்றன.

$$N = 33$$
$$\Sigma(X) = 125.30$$
$$\Sigma(Y) = 121.41$$
$$\Sigma(X^2) = 487.3518$$
$$\Sigma(Y^2) = 453.9073$$
$$\Sigma(XY) = 469.5635$$

$$p = \frac{\Sigma(xy)}{N} = \frac{\Sigma(x'y')}{N} - c_x c_y$$

என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியைக் காணலாம்.

இரண்டு மூல அளவுத் திட்டத்துக்கும் உண்மை மூலத்தையே ஏதேச்சை மூலமாக எடுத்துக் கொண்டால்,

$$p = \frac{\Sigma(XY)}{N} - c_x c_y \qquad (9.15)$$

(ஏதேச்சை மூலம் சுழி ஆக இருக்கும்போது வாய்பாடுகளில் X-ம் Y-ம் முறையே x', y' ஆகியவற்றிற்குச் சமம்.)

இரண்டு தரவிலக்கங்களும்

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma(X^2)}{N} - c_x^2}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y^2)}{N} - c_y^2}$$

என்பதாகும்.

இந்த அளவைகளை, 9-5 பட்டியலிலிருந்து கண்ட மதிப்புகளால் எளிதில் கணிக்கலாம் :

$c_x = 125.30/33 = 3.79697$ $\qquad c_y = 121.41/33 = 3.67909$

$c_x^2 = 14.41698$ $\qquad c_y^2 = 13.53570$

$$p = \frac{469.5635}{33} - (3.79697 \times 3.67909)$$
$$= +\ 0.25981$$

$$s_x = \sqrt{\frac{487.3518}{33} - 14.41698}$$

$$= 0.5927$$

$$s_y = \sqrt{\frac{453.9073}{33} - 13.53570}$$

$$= 0.4680$$

உடன்தொடர்புக் கெழுவுக்குத் தீர்வு கண்டால்,

$$r = \frac{p}{s_x s_y} = \frac{+0.25981}{0.5927 \times 0.4680}$$

$$= +\ 0.93666$$

முன் கூறப்பட்ட கணிப்புகளுக்குத் தேவையான மதிப்புகளி லிருந்தே, X-க்கும், Y-க்கும் சராசரித் தொடர்பை வருணிக்கும் நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பெறலாம். மூலம், சராசரியிலிருக்கும் போது இந்தச் சமன்பாட்டை

$$y = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x \tag{9.16}$$

என்றும், அல்லது மாதிரி அளவைகளைக் கையாண்டு

$$y = r \frac{s_y}{s_x} x \tag{9.17}$$

என்றும் எழுதலாம். பொருத்தமான மதிப்புகளைப் [11] பதிலிட்டால்

$$y = +\ 0.93666 \frac{0.4680}{0.5927} x$$

$$= 0.7396x$$

குறைந்த வர்க்கமுறையினுல் கிடைக்கும் சமன்பாடும் இதுவே. y துண்டத்தைக் குறிக்கும் மாறிலியான உறுப்பு மறைகிறது; ஏனெனில் மூலம், குறைந்த வர்க்கக்கோடு செல்கின்ற சராசரிகளின் புள்ளியில் அமைந்துள்ளது.[12]

11 கணிப்பு சரியாக இருப்பதற்கு 5 தசம ஸ்தானங்கள்வரை எண்கள் எழுதப்பட்டன.

12 $y = \rho \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} x$ என்ற வாய்பாடு குறைந்த வர்க்க முறையில் அடிப் படையில் அமைந்த வாய்பாட்டுக்குச் சமன் என்பதைக் காட்டுவோம். மேற்கண்ட கோடு சராசரிகள் புள்ளி வழியே செல்லும்போது, $Y = a + bX$ என்பது $y = bx$ என்றாகிறது.

பெருக்க மொமென்டு முறையைப் பயன்படுத்தி உடன்தொடர்புக் கெழுவையும் மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடுகளையும் கணிக்கும் போது, முதலில் r-க்குக் கூறிய வாய்பாட்டில் சிறிய மாற்றம் ஒன்றைச் செய்து $s_{y \cdot x}$ என்ற தரப்பிழையைக் காணலாம்.

$$r^2 = 1 - \frac{s^2_{y \cdot x}}{s^2_y}$$

என்பதிலிருந்து

$$s_{y \cdot x} = s_y \sqrt{1 - r^2} \quad (9.18)$$

என்பது கிடைக்கும். தற்போதைய எடுத்துக்காட்டில்

$$s_{y \cdot x} = 0.4680 \sqrt{1 - 0.877332}$$
$$= 0.164$$

தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்குப் பெருக்க மொமென்டு முறை

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டில் 33 குறிப்புகளுள்ளன. தொடர்புகளை ஆராயும்போது தனித்த மதிப்புகளை அப்படியே வைத்துக்கொள்வது சிரமமாக இருக்கிறது. இவற்றை ஏற்றப் பிரிவுகளில் தொகுத்து, கணிப்புகளை இந்தத் தொகுக்கப்

ஆனால், $b = \frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(x^2)}$. எனவே, $y_c = \frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(x^2)} x.$

இது $y_c = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x$ என்பதற்குச் சமம்.

ஏனெனில் பின்னதை

(1) $y_c = \frac{\Sigma(xy)}{N\sigma_y \sigma_x} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x$ (3) $y_c = \frac{\Sigma(xy)}{N\sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{N}} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{N}}} x$

(2) $y_c = \frac{\Sigma(xy)}{N\sigma_x \cdot \sigma_x} x$ (4) $y_c = \frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(\bar{x}^2)} x$

என்று எழுதலாம்.

(மேற்கண்ட சமன்பாடுகளில் y என்பதன் கணித்த மதிப்புகளுக்கு y_c பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. சமன்பாட்டில் வலப்புறமுள்ள y-உடன் மயங்காமலிருக்கவே இதுபோலச் செய்யப்படுகிறது.)

பட்ட விவரங்களின் அடிப்படையில் செய்வதே நல்லது. அதாவது, அலைவுப் பரவல்களாக அமைக்கப்பட்ட விவரங்களை நாம் கையாள வேண்டும். ஆனால், இரு மாறிகளை நாம் கையாள்வதால், நமது ஆய்வுக்கு ஏற்ப அலைவுப் பட்டியலை மாற்றி அமைக்க வேண்டும். மாற்றியமைக்கப்பட்ட இத்தகைய பட்டியல் தொடர்பு பற்றிய அளவைகளைக் கணிக்கப் பயனுவதால், இதனை உடன் தொடர்புப் பட்டியல் (correlation table) அல்லது இரட்டைமாறி அலைவுப் பட்டியல் (bivariate frequency table) என்போம். ஆய்வாளர் அத்தகைய பட்டியலைக் கையாளும்போது பெருக்க மொமென்டு முறை எளிமையும் சுலபமும் உடையதாகிறது.

உடன்தொடர்புப் பட்டியலை அமைத்தல்

உடன்தொடர்புப் பட்டியலை அமைப்பதற்கு எடுத்துக்காட்டாக, கமர்ஷியல் பாங்குகளின் தள்ளுபடி வீதங்களுக்கும் ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்குகளின் தள்ளுபடி வீதங்களுக்குமுள்ள உறவை எடுத்துக் கொள்வோம். கமர்ஷியல் பாங்குகளினுல் கழிவுகோள் செய்து எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட வணிக உண்டியல்களின்மேல், ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு தன் உறுப்பினர்களுக்காக மீண்டும் கழிவுகோள் செய்து ஏற்றுக்கொள்வதால் இரண்டு தள்ளுபடி (கழிவுகோள்) வீதங்களுக்கும் தொடர்பு எதிர்பார்க்கக்கூடியதே. இந்த உறவினை அளப்பதே நமது குறிக்கோள்.

கண்டறிந்த விவரங்களைப் பட்டியலாக அமைப்பது முதல் வேலை. 150 மாதங்களுள்ள கால இடைவெளிக்குப் பன்னிரண்டு ஃபெடரல் ரிசர்வ் நகரங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும், ஒவ்வொரு மாறிக்கும், மாதாந்திர மதிப்புகள் திரட்டப்படுகின்றன.[13] குறிப்புகளைப் பட்டியலாக அமைக்கையில், ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு தள்ளுபடி வீதங்களை அதே நகரின் கமர்ஷியல் பாங்குகள் அதற்கிசைந்து விதிக்கும் தள்ளுபடி வீதங்களோடு இணைக்கவேண்டும். 9.4 படம் பட்டியலமைக்கும் முறையை விளக்குகிறது.

பட்டியலமைத்து முடிந்ததும், பின்னர் வர இருக்கும் கணிப்புகளுக்கு வசதியாக ஓர் உடன்தொடர்புப் பட்டியல் அமைக்கப்படுகிறது. 9-7 பட்டியல் இந்த அமைப்புக்கு ஒரு விளக்கம். இதில்

[13] *1920 ஜூலையிலிருந்து, 1932 டிசம்பர்வரையான காலம் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. இக்கால இடைவெளியின் முதற்பகுதி ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்குகளின் தள்ளுபடி வீதங்கள், வாணிகக் கழிவு குறித்தன; பிற்பகுதி, 'ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்ட வணிக உண்டியல்கள்மீது உறுப்பின பாங்கிகளுக்குத் தரப்படும் தள்ளுபடி வீதம்' குறித்தன. கமர்ஷியல் பாங்குகளின் வீதங்கள், வாடிக்கைக் காரர்களின் வணிக உண்டியல் முதல்நிலைமீது செய்யப்படுவன. 30 நாட்கள் கால இடைவெளியில் பொதுவாக வழக்கிலுள்ள வீதத்தை அக்கால இடைவெளியின் மையத்தில் எடுத்துக் கொள்கிறோம்.*

X ∴ பெடரல் ரிசர்வ் பாங்க் தளஞுபடி வீதம்.

தளஞுபடி வீதம்	1.25 to 1.74%	1.75 to 2.24%	2.25 to 2.74%	2.75 to 3.24%	3.25 to 3.74%	3.75 to 4.24%	4.25 to 4.74%	4.75 to 5.24%	5.25 to 5.74%	5.75 to 6.24%	6.25 to 6.74%	6.75 to 7.24%
7.75 to 8.24%										|	|	||
7.25 to 7.74%										|||| ||	|||| ||||	|
6.75 to 7.24%								||||	||||	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 |||	|||| ||||	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 |
6.25 to 6.74%							||||	卌 卌 卌 卌 ||	卌 卌	卌 卌 卌 卌 ||	|	
5.75 to 6.24%					卌 |||	卌 卌 卌 卌 |	卌 卌	卌 卌	卌 |||	卌 卌 卌 卌 卌 卌 ||		

Y கமாவியல் பாங்க												
5.25 to 5.74%				|	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌	卌 ||||	卌 卌	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌				
4.75 to 5.24%			||||	卌 卌 卌 卌 卌	卌 |	卌 |	卌 |||| |||| |||| |||| |||| ||| |||| |||| ||||	|				
4.25 to 4.74%			卌 卌 卌 |	卌 卌 卌 卌 卌 ||	卌 卌	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌	|||					
3.75 to 4.24%	|	卌 ||||	卌 卌 卌 ||||	卌 卌 卌 ||||	卌 卌 卌 卌 卌 卌							
3.25 to 3.74%	|||	||			卌 ||||							

9.4. படம். உடன் தொடர்புப் பட்டியலில் பாகுபாடு செய்யப்பட்ட குறிப்புகள்

பட்டியல் 9-7

ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு தள்ளுபடி வீதங்களுக்கும், கமர்ஷியல் பாங்குகளின் தள்ளுபடி வீதங்களுக்குமுள்ள தொடர்பைக் காட்டும் உடன்தொடர்புப் பட்டியல்; உடன்தொடர்பு அளவையைக் கணிக்கத் தேவையான அளவுகள் காட்டப்பட்டுள்ளன.

X—*Discount rates of federal reserve banks (percent)*

Y—*Discount rates of commercial banks (percent)*

Class interval						1.25–1.74	1.75–2.24	2.25–2.74	2.75–3.24	3.25–3.74	3.75–4.24	4.25–4.74	4.75–5.24	5.25–5.74	5.75–6.24	6.25–6.74	6.75–7.24	*Total*	Σ(x′y′)
	Mid-point					1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00	6.50	7.00		
						5	11	40	72	370	477	393	223	22	125	20	42	1,800	
			d′			−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5		
				fd′		−30	−55	−160	−216	−740	−477	0	223	44	375	80	210	−746	
					fd′²	180	275	640	648	1,480	477	0	223	88	1,125	320	1,050	6,506	
7.75–8.24	8.00	4	+5	20	100										+15 1 (+15)	+20 1 (+20)	+25 2 (+50)		85
7.25–7.74	7.50	17	+4	68	272										+12 7 (+84)	+16 9 (+144)	+20 1 (+20)		248
6.75–7.24	7.00	117	+3	351	1,053								+3 5 (+15)	+6 4 (+24)	+9 63 (+567)	+12 9 (+108)	+15 36 (+540)		1,254
6.25–6.74	6.50	62	+2	124	248							0 4 (0)	+2 22 (+44)	+4 10 (+40)	+6 22 (+132)	+8 1 (+8)	+10 3 (+30)		254
5.75–6.24	6.00	366	+1	366	366					−2 9 (−18)	−1 21 (−21)	0 146 (0)	+1 150 (+150)	+2 8 (+16)	+3 32 (+96)				223
5.25–5.74	5.50	475	0	0	0				0 1 (0)	0 90 (0)	0 164 (0)	0 175 (0)	0 45 (0)						
4.75–5.24	5.00	402	−1	−402	402			+4 4 (+16)	+3 25 (+75)	+2 111 (+222)	+1 196 (+196)	0 65 (0)	−1 1 (−1)						508
4.25–4.74	4.50	264	−2	−528	1,056			+8 16 (+128)	+6 27 (+162)	+4 122 (+488)	+2 96 (+192)	0 3 (0)							970
3.75–4.24	4.00	77	−3	−231	693	+18 1 (+18)	+15 9 (+135)	+12 19 (+228)	+9 19 (+171)	+6 29 (+174)									726
3.25–3.74	3.50	16	−4	−64	256	+24 4 (+96)	+20 2 (+40)	+16 1 (+16)		+8 9 (+72)									224
Total		1,800		−296	4,446														4,492

ஒவ்வொரு மாறிக்கும் (M') என்ற எதேச்சை மூலம் எடுத்துக் கொள்ளப்படுவதைக் கவனிக்கவும். X-களுக்கு M' 4.50 என்பதையும், Y-களுக்கு M' 5.50 என்பதையும் கவனிக்கவும். இந்த மூலங்களிலிருந்து விலக்கங்கள் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் x', y' எனக் குறிக்கப்படுகின்றன. $\Sigma(x'y')$ஐக் கணிப்பதில் உடன்தொடர்புப் பட்டியலில் ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் மூன்று எண்களுள்ளன. இதில் நடு எண் அந்தக் கட்டத்திலுள்ள குறிப்புகளின் எண்ணிக்கையாகும். இதுபோல, 5.75-க்கும் 6.25-க்கும் (6-ல் மையத்தையும்) இடையே X மதிப்புகளையும், 7.25-க்கும், 7.75-க்கும் (7.5-ல் மையத்தையும்) இடையே Y மதிப்புகளையும் கொண்டு ஏழு இணைகளுள்ளன. இந்த இணைகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் x' (X-களின் புனைந்த சராசரியிலிருந்து விலக்கம்) ஆனது, பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் +3 ஆகும்; y' (Y-களின் புனைந்த சராசரியிலிருந்து விலக்கம் ஆனது)

பட்டியல் 9-8

கமர்ஷியல் பாங்குகளின் தள்ளுபடி வீதத்துக்கும் ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு தள்ளுபடி வீதத்துக்குமுள்ள உடன்தொடர்புக்கெழு *

(பட்டியல் 9-7-ல் கண்ட விவரங்களின் அடிப்படையில் கணிக்கப்பட்டது)

$M'_x = 4.50$	$M'_y = 5.50$	$p = \frac{\Sigma(x'y')}{N} - c_x c_y$
$c_x = \frac{-746}{1{,}800} = -.414$	$c_y = \frac{-296}{1{,}800} = -.164$	$= \frac{+4{,}492}{1{,}800} - [(-.414)(-.164)]$
$c_x^2 = (-.414)^2 = .171$	$c_y^2 = (-.164)^2 = .027$	$= +2.4956 - .0679$
$s_{x'}^2 = \frac{6{,}506}{1{,}800} = 3.614$	$s_{y'}^2 = \frac{4{,}446}{1{,}800} = 2.470$	$= +2.4277$
$s_x^2 = s_{x'}^2 - c_x^2$	$s_y^2 = s_{y'}^2 - c_y^2$	$r = \frac{p}{s_x s_y}$
$= 3.614 - .171$	$= 2.470 - .027$	$= \frac{+2.4277}{(1.855)(1.563)}$
$= 3.443$	$= 2.443$	
$s_x = 1.855$	$s_y = 1.563$	$= \frac{+2.4277}{2.8994}$
$M_x = 4.50 - .5(.414)$	$M_y = 5.50 - .5(.164)$	
$= 4.293$	$= 5.418$	$r = +.837$

கவனிக்க : பட்டியல் முழுவதிலும் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் கணிப்புகள் செய்யப்படுவதைக் கவனிக்கவும்.

* M'_x என்ற எதேச்சை மூலத்திலிருந்து x-களின் சராசரி விலக்கத்தைக் குறிக்க $s_{x'}^2$ என்ற குறியீட்டையும், M_y' என்ற எதேச்சை மூலத்திலிருந்து y-களின் சராசரி விலக்கத்தைக் குறிக்க $s_{y'}^2$ என்ற குறியீட்டையும் பயன்படுத்துகிறோம். இக் குறியீடுகள் 5ஆவது அத்தியாயத்திலுள்ள s_a^2-க்கு இசைந்தவை.

பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் + 4 ஆகும். எனவே, ஒவ்வோர் இணைக்கும் $x'y' = +12$. இந்த விவரம் கட்டத்தின் மேல் கோடியிலுள்ளது. ஆனால், இந்தக் கட்டத்தில் 7 இணைகள் இருக்கின்றன. இத் தொகுதிக்கு $x'y'$ ஆகியவற்றின் கூடுதல் +84. இதனை அதே கட்டத்தில் அடியில் அடைப்புக் குறிகளில் குறித்துள்ளோம். பட்டியல் முழுவதுக்கும் $\Sigma(x'y')$ பெறவேண்டுமானால் எல்லாக் கட்டங்களிலுள்ள மதிப்புகளையும் இயற்கணிதரீதியில் கூட்ட வேண்டும். ஒவ்வொரு வரிசைக்கும் முதலில் கூட்டல் தொகைகளைக் கண்டுபிடிக்கவும். இத் துணைமொத்தத் தொகைகள் (subtotals) பட்டியலின் வலப்புறக் கோடியிலுள்ள பத்தியில் தரப்பட்டுள்ளன. பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் $\Sigma(x'y') = 4{,}492$ ஆகிறது.

r-ல் கணிப்பு, தொடர்புச் சமன்பாட்டைக் காணல்

9-8 பட்டியலில் உடன்தொடர்புக் கெழுவினைக் காணும் கணிப்பு தரப்பட்டுள்ளது. பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் தரவிலக்கங்களும், சராசரிப் பெருக்கமான p-ம், பழக்கமான முறைகளில் பெறப்படுகின்றன. பின்னர் r என்ற கெழு பின்வரும் சமன்பாட்டால் தீர்மானிக்கப்படுகிறது

$$r = \frac{p}{s_x s_y} = \frac{+2.4277}{1.855 \times 1.563}$$
$$= +0.837$$

இங்கே செய்துள்ளதுபோல இத்தகைய கணக்கில் இறுதிவரை எல்லா அளவுகளையும் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் அமைத்துக் கொள்வது நல்லது. r-ன் கணிப்பில் பயனாகும் இரு தரவிலக்கங்களின் மதிப்பீட்டுக்கு ஷெப்பர்டு திருத்தங்களைப் பொருத்தமான சமயத்தில் மேற்கொள்ளலாம். ஃபெடரல் ரிஸர்வ் பாங்கு தள்ளுபடி வீதங்கள் தொடர்மாறியல்லன ஆதலால் இங்கே அவை பயன்படுத்தப்படுவதில்லை.

$$y = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x \qquad (9.19)$$

என்ற பொதுச் சமன்பாட்டிலிருந்து, x-க்கும் y-க்குமுள்ள சராசரித் தொடர்புபற்றிய நேர்கோட்டுச் சமன்பாட்டை அடைவதற்கு σ_y, σ_x ஆகிய முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்புகளுக்குப் பதிலாக, σ_y, σ_x ஆகிய முழுமைத் தொகுதியின் s_y, s_x ஆகிய மாதிரி மதிப்புகளைப் பதிலிடுகிறோம். இவற்றில் s_y, s_x என்பது மூல அளவுத் திட்டத்தின் அலகுகளில் பயன்படுத்தப்படவேண்டும்.[14] இதற்குத் தற்போதைய மதிப்புகளைப் பிரிவு இடைவெளி மதிப்புகளால் பெருக்கவேண்டும்.

[14] இந்த எடுத்துக்காட்டில் இருப்பதுபோல இரு மாறிகளிலும் பிரிவு இடைவெளி ஒன்றாக இருக்கையில், பகுதிக்கும் விகுதிக்குமுள்ள உறவு மாறுபடாது ஆகையால், மூல அலகுகளில் மாற்றம் தேவையில்லை. பொதுவாக, கணிப்பின் இக் கட்டத்தில் இரண்டு தரவிலக்கங்களையும் மூல அலகுகளில் மாற்றவேண்டும்.

s_x (மூல அலகுகளில்) = 1.855 × .50 = .9275

s_y (மூல அலகுகளில்) = 1.563 × .50 = .7815

வாய்பாட்டில் இந்த மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தினால்,

$$y = .837 \ \frac{.7815}{.9275} x$$

$$= .705x$$

என்பது கிடைக்கும்.

தொடர்பு நேர்கோடு

மேற்கூறிய விவாதத்தில் தொடர்புக் கெழு சம்பந்தமாகப் பயன்படுத்தப்படும் குறியீட்டுச் சொற்கள் சிலவற்றை வேண்டுமென்றே பயன்படுத்தவில்லை. இப்பொழுது அவற்றை விளக்குவோம்.

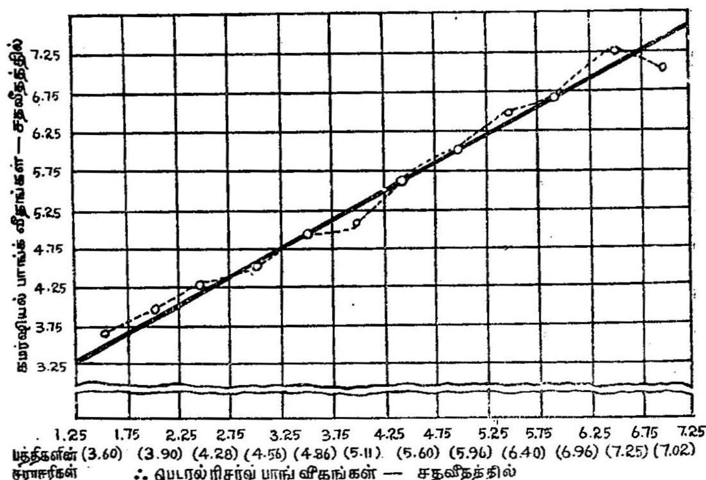
மிகவும் ஏற்புடைய நேர்கோட்டின் சமன்பாடு ஒன்றை முந்திய எடுத்துக்காட்டில்

$$y = .705x$$

எனக் கண்டோம். இதில் மூலம் சராசரிகளின் புள்ளியில் எடுக்கப்பட்டுள்ளது. இந்தச் சமன்பாட்டில் y என்பது x-ன் சார்பலனாகத் தரப்பட்டுள்ளது. அதாவது, x என்பது சார்பிலா மாறியாகவும் y என்பது சார்ந்த மாறியாகவும் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டன. x (ஃபெடரல் ரிஸர்வ் பாங்குகளில் தள்ளுபடி வீதம்) என்பதில் ஓர் அலகு மாற்றத்துக்கு இயைந்த y-ன் (கமர்ஷியல் பாங்கு தள்ளுபடி வீதம்) சராசரி மாறுபாட்டை, சமன்பாடு உணர்த்துகிறது. காலத்தின் ஓர் அலகு மாற்றத்தின் பயனாகக் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தொடரில் விளையும் சராசரி மாற்றத்தைக் குறிக்கும் போக்கு (trend) நேர்கோட்டை ஒத்ததே. இந்தத் தொடர்பு நேர்கோடாகும். இதுபோல இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள சராசரித் தொடர்பைக் குறிக்கும் நேர்கோட்டை மாறிகளின் தொடர்பு நேர்கோடு (line of regression) என்கிறோம். இதன் சமன்பாட்டை மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடு என்கிறோம். இந்தக் கோட்டின் சாய்வைத் தரும் அளவையை $\rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ (மாதிரி அளவைகளில் $r \frac{s_y}{s_x}$) மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு (coefficient of regression) என்கிறோம். ஆதியில் கால்டன் (Galton) என்பவர் தம் ஆய்வில் பயன்படுத்திய சொற்கள் இவை. இவற்றைத் தந்தையர் உயரத்துக்கும் புதல்வர் உயரத்துக்குமுள்ள தொடர்புகுறித்துப் பயன்படுத்தினர். தந்தையரது உயரங்கள் இனத்தின் சராசரியிலிருந்து

வேறுபடுவதைவிடப் புதல்வர்களது உயரம் குறைவாக வேறுபடுவதாக அவர் கண்டார். தந்தையர் உயரங்கள் சராசரியைவிடக் குறைந்திருந்தாலும் சரி, மிகுந்திருந்தாலும் சரி, புதல்வர்கள் சராசரிக்கு நெருங்கிப் பின்னோக்கிச் (regress) செல்வதைக் கண்டார். எனவே, இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள சராசரித் தொடர்பின் வரைபடத்தை, 'ரெக்ரஷன் கோடு' (மாறிகளின் தொடர்புக்கோடு) என அழைத்தார். ஆனால், இப்போதைய வழக்கில், பழைய பொருள் பல சமயங்களில் சிறப்பிழந்து இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட எந்த விவரங்களுக்கும் இரண்டு மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளையும் கணிக்க முடியும். சார்பிலாத X மாறிக்கும், சார்ந்த Y மாறிக்குமுள்ள சராசரித் தொடர்பை ஒரு சமன்பாடும், மற்றொன்று சார்புடைய X மாறிக்கும், சார்பிலா Y மாறிக்கும் உள்ள சராசரித் தொடர்பையும் வெளியிடுகிறது. இவை இரண்டினுடைய சிறப்பையும் வரைபடம்மூலம் காட்டலாம்.



9.5. படம்.

கமர்ஷியல் பாங்கு தள்ளுபடி வீதத்துக்கும் ஃபெடரல் பாங்கு தள்ளுபடி வீதத்துக்குமுள்ள தொடர்பை இது காட்டுகிறது. (பத்திகளின் சராசரிகளை உடைந்த கோடு இணைக்கிறது. ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு வீதத்தில் ஓர் அலகு மாற்றத்துக்கு கமர்ஷியல் பாங்கு வீதத்தில் ஏற்படும் சராசரி மாற்றங்களை நேர்கோடு காட்டுகிறது; அதாவது X மீது Y-ன் மாற்றத்தைக் காட்டுகிறது.)

9.5 படம், 9.4 படத்தில் உள்ள உடன்தொடர்புப் பட்டியலிலிருந்து நேரிடையாகக் கண்டது. ஒவ்வொரு பத்தியிலுமுள்ள வட்டம் அப் பத்தியிலுள்ள குறிப்புகளின் சராசரியைத் தெரிவிக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக, 3ஆம் பத்தியில் 40 குறிப்புகள்,

2.25 சதவீதத்துக்கும், 2.75 சதவீதத்துக்கும் இடையில் அமைந்த X மதிப்புகளை உள்ளடக்கி இருக்கின்றன. ஆனால், பட்டியல் 9-9-ல் கண்டதுபோலப் பரவலாக அமைந்த Y மதிப்புகள் மாறுகின்றன. இதுபோலப் பிற பத்திகளுக்கும் சராசரி மதிப்புகள் குறிக்கப் பட்டுள்ளன. 9.5 படத்தில், X-ன்மீது அமைந்த Y ரெக்ரஷன் கோட்டில் இதனைக் குறித்துள்ளோம்.

9.5 படத்தில் X மாறி (ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு வட்டிவீதம்) சார்பிலாத மாறி. அது 4 சதவீதத்திலிருந்து 4.5, 5·0, 5·5 சத வீதங்களுக்கு அதிகரிக்கும்போது, கமர்ஷியல் பாங்கு வீதங்களும் அதிகரிக்கின்றன. 4.29 சதவீதம் என்ற கமர்ஷியல் பாங்கு சராசரி வீதம் 2.5 சதவீதம் என்ற ஃபெடரல் பாங்கு சராசரி வீதத்தோடு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. 4.56 சதவீதம் என்ற கமர்ஷியல் பாங்கு சராசரி வீதம் 3.0 சதவீதம் என்ற ஃபெடரல் பாங்கு சராசரி வீதத்தோடு தொடர்புபடுத்தப்படுகிறது. (இந்த கமர்ஷியல் பாங்கு வீதங்கள், குறிப்பிடப்பட்ட பத்திகளிலுள்ள குறிப்புகளின் சராசரிகள்.) நேர்கோட்டின்—மாறிகளின் தொடர்பு நேர்கோடு அல்லது சராசரித் தொடர்பின் நேர்கோடு—சாய்வு ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு வீதங்களில் ஓர் அலகு அதிகரிப்புக்கு, கமர்ஷியல் பாங்கு வீதங்களின் சராசரி அதிகரிப்பு எவ்வளவு என்பதனை அளக்கிறது.

பட்டியல் 9-9

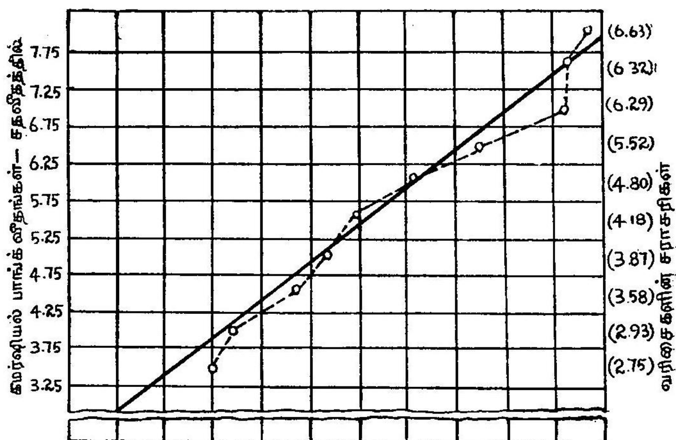
ஒரு வரிசையில் (Array) கூட்டுச் சராசரி கணிப்பு

பிரிவு இடைவெளி	மையப் புள்ளிகள் m	அலைவு f	fm
4.75 — 5.24	5.0	4	20.0
4.25 — 4.74	4.5	16	72.0
3.75 — 4.24	4.0	19	76.0
3.25 — 3.74	3.5	1	3.5
		40	171.5

$$M = \frac{171.5}{40} = 4.2875$$

இந்தத் தொடர்பை வேறு வகையாலும் அளக்கலாம். அதற்குப் பின்வரும் கேள்விகளைக் கேட்போம். கமர்ஷியல் பாங்கு தள்ளுபடி

வீதம் ஒன்று தரப்பட்டால், அதோடு தொடர்புபட்ட சராசரி, ஃபெடரல் ரிஸர்வ் பாங்கு வீதமென்ன ? கமர்ஷியல் பாங்கு தள்ளுபடி வீதங்களின் மாற்றமொன்று தெரிந்தால் அதற்கேற்ப ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு வீதங்களின் சராசரி மாற்றமென்ன ? இப்போது கமர்ஷியல் பாங்கு வீதத்தை சார்பிலா மாறியாகவும், ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு வீதத்தைத் தொடர்புடைய சார்ந்த மாறியாகவும் கருதப்படுகின்றன. இந்தக் கேள்விகளுக்கு 9.6 படம் விடைகூறும்.



9.6. படம்.

ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு தள்ளுபடி வீதங்களுக்கும் கமர்ஷியல் பாங்கு தள்ளுபடி வீதங்களுக்குமுள்ள தொடர்பு. (வரிசைகளின் சராசரிகளை உடைந்த கோடும், கமர்ஷியல் பாங்கு வீதங்களின் ஓர் அலகு மாற்றத்துக்கிசைய ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு வீதங்களில் ஏற்படும் சராசரி மாற்றங்களை நேர்கோடும் காட்டும்; அதாவது Y மீது X மாற்றத்தைக் குறிக்கும்.)

சிறு வட்டங்களால் குறிக்கப்பட்டு உடைந்த கோட்டால் இணைக்கப்படுகின்ற புள்ளிகள் பல வரிசைகளிலும் அமைகின்ற குறிப்புகளில் சராசரியைக் காட்டுகின்றன. அதாவது அடி வரிசையிலுள்ள 16 X-குறிப்புகள் 2.75 சதவீத சராசரி மதிப்பைக் காட்டுகின்றன. இதுதான் கமர்ஷியல் பாங்கு வீதமான 3.5 வீதத்துக்கு இயைந்த சராசரி ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு தள்ளுபடி வீதம். கமர்ஷியல் பாங்கு வீதம் 4 சதவீதமாக இருக்கையில் சராசரி ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு வீதம் 2.93 சதவீதமாக இருக்கும். இதுபோலவே பிறவுமாகும்.

இந்தப் புள்ளிகளுக்குப் பொருத்தப்பட்ட நேர்கோடு இரு மாறிகளுக்கும் இடையேயுள்ள உறவைக் காட்டுகிறது. இக் கோட்டின் சாய்வு (slope) கமர்ஷியல் பாங்கு வீதங்களின் ஓர் அலகு மாற்றத்தோடு சம்பந்தப்பட்ட ஃபெடரல் பாங்கு வீதங்களின் சராசரி அதிகரிப்பை (அல்லது குறைவை) அளக்கிறது.

இது Y மீது X மாறியின் தொடர்பைக் காட்டும் நேர்கோடு. இந்த நேர்கோட்டுச் சமன்பாட்டுக்குரிய வாய்பாடு :

$$x = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} y \tag{9.20}$$

தற்போதைய மதிப்புகளை பதிலிட்டால்,

$$x = .837 \frac{.9275}{.7815} y$$

அல்லது,

$$x = .993y$$

எனக் கிடைக்கும்.

இந்தச் சமன்பாட்டின் உறுப்புகள் x மீது y மாறியின் தொடர்புக் கோட்டுக்கான வாய்பாட்டிலுள்ளன போன்றவைகளே.[15] r என்பது 1-க்குச் சமமானால் இரண்டு கோடுகளும் ஒன்றுகின்றன. அதோடு இரண்டு தரவிலக்கங்களும் சமமானால் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடு அச்சுகளிடையே உள்ள கோணத்தை இரு சமக் கூறுகளாக்கும். இந்தப் புள்ளிகளைத் தரவிலக்க அலகுகளில் ஒரு விளக்கப்படத்தில் குறிப்போமானால் $y = rx$ எனவரும். மாறிகளின் தொடர்பு நேர்கோட்டின் சாய்வு r-ன் மதிப்புக்குச் சமமாக இருக்கும்.

மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு b என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. சாதாரண உடன்தொடர்புக் கணக்கில், மாறிகளின்

15 $x = r\frac{s_x}{s_y} y$ வாய்பாட்டை, $x = \frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(y^2)} y$ என்று மாற்றியமைக்கலாம். மட்டநிலை விலக்கங்களின் (horizontal deviations) வர்க்கங்கள் சிறுமமாக இருக்குமாறு, 9.6 படத்தில் குறிக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடு இது.

இதுபோல குத்துவிலக்கங்களின் வர்க்கங்கள் சிறுமமாக இருக்குமாறு பொருத்தப்பட்ட நேர்கோடு,

$$y = \frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(x^2)} x$$

என்ற சமன்பாட்டைப் பெற்றிருக்கும். இதனை விளங்கிக்கொண்டால்தான் இரு மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளுக்குமுள்ள வேற்றுமை புலனாகும்.

தொடர்புக் கோடுகள் இரண்டினுடைய சாய்வுகளைக் குறிக்கும் இரு கெழுக்கள் இருக்கும். இவை,

$$b_{yx} = r\frac{s_y}{s_x} \qquad (9.21)$$

$$b_{xy} = r\frac{s_x}{s_y} \qquad (9\ 22)$$

என வரும். (இவற்றில் ஒட்டுக்குறிகள் இரு மாறிகளுக்குமுள்ள உறவைச் சுட்டுகின்றன. ஒவ்வொன்றிலும் முதல் ஒட்டுக்குறி சார்ந்த மாறியைக் குறிக்கிறது.)

r என்ற கெழு இரு வாய்பாடுகளிலும் பயனுகிறது. எனவே, *r* என்பதை மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுவால் கணிக்கமுடியும் என்பது தெளிவு. ஏனெனில்,

$$\sqrt{b_{yx}\,.\,b_{xy}} = \sqrt{r\frac{s_y}{s_x}\,.\,r\frac{s_x}{s_y}} = \sqrt{r^2} = r$$

எனவே, இரு மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளின் சாய்வுகளும் தெரிந்தால், *r*-ஐத் தீர்மானிக்க முடியும். தற்போதைய எடுத்துக்காட்டில்,

$$r = \sqrt{.705 \times .993} = .837$$

மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாட்டின் பயன்கள்: மேற்கண்ட மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடுகளான,

$$y = .705x,$$
$$x = .993y$$

ஆகியவை, அவற்றின் சராசரிகளிலிருந்து விலக்கங்களுக்கு இடையேயுள்ள உறவை வருணிக்கின்றன. அதாவது மூலம் சராசரிகளாலான புள்ளியில் இருக்கிறது; எனவே, சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்த X, Y ஆகியவற்றின் மூல மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தலாகாது; அவற்றை அவற்றின் சராசரிகளிலிருந்து விலக்கங்களாக மாற்றியமைக்க வேண்டும். காட்டாக, ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கின் 6 சதவீத வீதத்தோடு, பொதுவாகத் தொடர்புபடுத்தக்கூடிய கமர்ஷியல் பாங்கு வீதத்தைத் தீர்மானிக்க விரும்புகிறோம். X மதிப்புகளின் (ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கின் வீதங்கள்) சராசரி மதிப்பு 4.293 சதவீதமாகும். 6 சதவீத வீதமானது + 1.707 அளவு சராசரியிலிருந்து விலகியது. இம் மதிப்பை மேற்கண்ட சமன்பாடுகளில் முதலதில் பதிலிட்டால்,

$$y = .705\,(+\ 1.707)$$
$$= +\ 1.203$$

என வரும். + 1.707 என்ற x விலக்கத்தோடு இணைக்கக்கூடிய

சராசரி y விலக்கம் இது. 6 சதவீத வீத அளவுடைய ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு வீதமொன்றோடு தொடர்புபட்ட சாதாரண கமர்ஷியல் பாங்கு வீதத்தைக் கண்டுபிடிக்க, சராசரி கமர்ஷியல் பாங்கு வீதமான 5.418 சதவீதத்தோடு, + 1.203 சதவீதத்தைக் கூட்டவேண்டும். எனவே, நமக்குத் தேவைப்படுகிற மதிப்பு 6.621 சதவீதமாகும்.

உறவின் சமன்பாட்டின் அமைப்பால் இந்தக் கணிப்பு, சற்றுச் சுற்றுவழியாகச் செய்யப்பட்டது. இச் சமன்பாட்டைக் கணிப்புகளுக் கேற்ப இன்னும் பொருத்தமாக அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

$\bar{X}$ = X-களின் கூட்டுச் சராசரி,

$\bar{Y}$ = Y-களின் கூட்டுச் சராசரி

ஆகவும் இருக்கட்டும்.

எனவே,

$$y = r\frac{s_y}{s_x}x$$

என்பதை

$$Y - \bar{Y} = r\frac{s_y}{s_x}(X - \bar{X}) \qquad (9.23)$$

என எழுதலாம். கடைசிச் சமன்பாட்டில் X, Y ஆகிய மாறிகளின் மதிப்புகள், மூல அளவுத்திட்ட மதிப்புகளாகவே இருக்கின்றன; அவற்றின் சராசரிகளிலிருந்து பெற்ற விலக்கங்களாக இல்லை. ஆய விளக்கப்படத்தில் இது, சராசரிகளாலான புள்ளியிலிருந்து மூல அளவுத் திட்டங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் சுழி உடைய புள்ளிக்கு மூலத்தை மாற்றுவதற்கு ஒப்பாகும்.

இந்தச் சமன்பாட்டின் இவ்வமைப்பு மிகவும் பயனுடையதாய் இருப்பதை விளக்க,

$$y = .705x$$

என்பதை மேற்கூறியவாறு மாற்றுவோம்.

$$\begin{aligned} Y - 5.418 &= .705(X - 4.293) \\ &= .705X - 3.027 \\ Y &= 2.391 + .705X \end{aligned}$$

இந்தச் சமன்பாட்டில் மூலத்தை ஏற்றபடி மாற்றியமைத்திருப்பதால், மூல மதிப்புகளையே நேரடியாகப் பயன்படுத்தலாம். 6 சதவீத வீதமாகிய ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு வீதத்தோடு தொடர்புபடுத்தப் படுகிற பொதுவான கமர்ஷியல் பாங்கு வீதத்தை அறியவேண்டு

மானுல், இந்த 6 சதவீத மதிப்பைத் தற்போது பெற்ற சமன்பாட்டில் பதிலிடலாம்.

$$Y = 2.391 + (.705 \times 6.0)$$
$$= 6.621$$

முன் அமைப்பில் சமன்பாட்டில் என்ன முடிவுகள் கிடைத்தனவோ, அதே முடிவுகள்தாம் இப்போதும் கிடைக்கின்றன. ஆனுல் பல பணிகளுக்காக, நேரடியாக மதிப்புகளைப் பதிலிடக்கூடிய சமன்பாட்டை வைத்திருப்பது நல்லது.

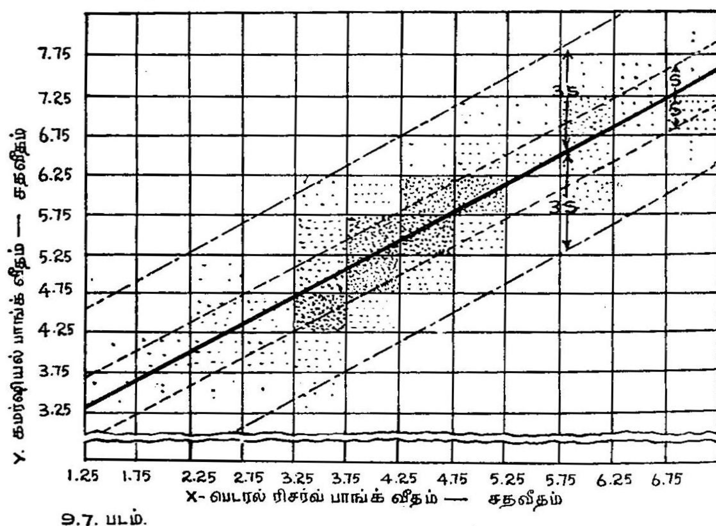
$$x = r\frac{s_x}{s_y}y$$

என்பதை இதேபோல

$$X - \bar{X} = r\frac{s_x}{s_y}(Y - \bar{Y})$$

என மாற்றலாம்.

மதிப்பீட்டின் பரப்புகள்: மாறிகளின் உடன்தொடர்புச் சமன்பாட்டுக்குத் துணையாக, மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையும் சேர்ந்து



9.7. படம்.

ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு வீதங்கள், கமர்ஷியல் பாங்கு வீதங்கள் ஆகியவற்றின் சிதறல் விளக்கப்படம்; சராசரித் தொடர்பு நேர் கோடும், மதிப்பீட்டின் பரப்புகளும்.

அமையும் சிறப்பை 9.7 படத்தின்மூலமாக நன்கு விளக்கலாம். இங்கு X மீது Y அமையும் மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டைக்

குறித்துள்ளோம் (அதாவது $Y = 2.391 + 0.705X$). மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டின் மேலும், கீழும் $s_{y \cdot x}$ அல்லது $s_{y \cdot x}$-ன் மடங்குகளால் வரம்புகட்டி 'மதிப்பீட்டின் பரப்புகளை' (zones of estimate) அமைக்கிறோம்; இவை உடைந்த கோடுகளால் வரையறை செய்யப்படுகின்றன. பொருத்தப்பட்ட நேர்கோட்டை மையமாகக் கொண்டு, $2S$ அகலமுடைய இந்தப் பரப்புக்குள், எல்லாப் புள்ளிகளின் 68 சதவீதம் அமையும்; இது, y விலக்கங்களின் பரவலானது, x மதிப்புகளின் வீச்சு முழுவதற்கும் இயல்நிலையாக இருக்கும் எனவும், இந்த வீச்சுக்குள் y விலக்கங்களின் சிதறல் மாறிலியாக இருக்கும் எனவும் புனைந்துகொள்வதால் கிடைக்கும் முடிவு.[16] அதே புனைவின் அடிப்படையில், பொருத்தப்பட்ட நேர்கோட்டை மையமாகக்கொண்டு, $6S$ அகலமுள்ள பரப்பிலே மொத்தப் புள்ளிகளில் 99.7 சதவீதம் அமையும். S-ன் மதிப்பு குறையக் குறைய, பரப்புகள் குறைவுபடும்; எனவே, சராசரித் தொடர்புச் சமன்பாட்டை அடிப்படையாகக்கொண்ட மதிப்பீடுகள் மேலும் மேலும் திருத்தம் பெறும்.

உடன்தொடர்பு முறை—பொழிப்பு

முந்திய பக்கங்களில் இரண்டு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள உறவினை அளப்பதற்குத் தேவையான மதிப்புகளைப் பெற இரு வேறு முறைகளைக் கண்டோம். அவற்றின் வழிமுறைகளைச் சுருக்கி உரைப்போம். இரண்டுக்கும் அடிப்படை குறைந்த வர்க்க முறையே; அச் சொல்லை முதல் முறைக்குப் பயன்படுத்துவதே மிகப் பொருத்தம். ஏனெனில், நேர்கோட்டைப் பொருத்துவதே அந்த முறையில் முதல் நிலையும், ஆதாரமாய் அமைந்த நிலையுமாகும்.

குறைந்த வர்க்க முறை

1. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்குக் குறைந்த வர்க்க முறையால் ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்துக. விவரங்களைப் பத்திகளில் பொருத்தமாக வரிசைப்படுத்தினால், தேவைப்படுகின்ற $\Sigma(X)$, $\Sigma(Y)$, $\Sigma(X^2)$, $\Sigma(Y^2)$, $\Sigma(XY)$ ஆகியவற்றை எளிதில் கணக்-

[16] இயல்நிலை, சிதறலின் உறுதி ஆகியவைகுறித்த புனைவுகள், மதிப்பீட்டுப் பரப்புகுறித்த கோட்டை நடைமுறையில் பயன்படுவதைக் கட்டுப்படுத்திவிடுகின்றன. இயற்கணித அளவுத் திட்டத்தில் விலக்கங்கள் இயல்நிலையாக அமையாதபோது, சார்ந்த மாறியின் லாகிருத உருமாற்றங்களும், ஹார்மானிக் உருமாற்றங்களும் இயல்நிலைப் பரவலைத் தந்து பயனைக்கூட்டும். (பார்க்கவும்: மில்ஸ், நூ.நா.ப. 102.) மூட் (நூ.நா.ப. 109, பக்கங்கள் 297-9) எனும் ஆசிரியர் முன்கூட்டியேயூக இடைவெளிகளை (நம்பக இடைவெளிகளை ஒத்தன இவை) வரையறை செய்ய இன்னும் திருத்தமான செயல்முறையைத் தந்துள்ளார். ஆனால், இச் செயல்முறைகள் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்த மாறிக்கே பொருந்துவன.

கிட உதவும். இதனின்று கிடைக்கும் சமன்பாடு இரு மாறி களுக்குமுள்ள சராசரித் தொடர்பை வருணிக்கும்.

2. மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையான $s_{y \cdot x}$-ஐ

$$s_{y.x}^2 = \frac{\Sigma(Y^2) - a\Sigma(Y) - b\Sigma(XY)}{N}$$

என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து பெறவும். தொடர்பு நேர்கோட்டின் அடிப்படையில் செய்த மதிப்பீடுகளின் நம்பகத்துக்கு $s_{y \cdot x}$ என்பது ஓர் அளவு; கூட்டுச் சராசரியினைச் சார்ந்த தரவிலக்கத்துக்கு விளக்கம் தருவதுபோலவே $s_{y \cdot x}$-க்கும் விளக்கம் தரவேண்டும்.

3. உடன் தொடர்புக் கெழுவான r-ன் மதிப்பை

$$r^2 = 1 - \frac{s_{y.x}^2}{s_y^2}$$

என்பதிலிருந்தோ,

$$r^2 = \frac{a\Sigma(Y) + b\Sigma(XY) - Nc_y^2}{\Sigma(Y^2) - Nc_y^2}$$

என்பதிலிருந்தோ அறியலாம்.

r என்பதற்கு, மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாட்டிலுள்ள b என்ற மாறிலிக்கு உள்ள அதே குறியினைப் பயன்படுத்தவும். இரு மாறிகளுக்குமுள்ள தொடர்பு எவ்வாறு நேர்கோட்டால் வர்ணிக்கப்படுகிறதோ அதற்கு இயைந்து உறவின் அளவுக்கு, புலனாகா ஓர் அளவையாக அமைந்ததே இந்தக் கெழு.

4. Y மாறிமீது X மாறியின் தொடர்புப் போக்கின் (X சார்ந்த மாறி) சமன்பாடு ஒன்று தேவையானால், இரண்டு இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளான

$$\Sigma(X) = Na + b\Sigma(Y)$$
$$\Sigma(XY) = a\Sigma(Y) + b\Sigma(Y^2)$$

ஆகியவற்றுக்குத் தகுந்த மதிப்புகளைப் பதிலிடவும், கிடைக்கும் சமன்பாடு

$$X = a + bY$$

என்பது போன்ற வகையில் அமையும். $s_{y \cdot x}$-க்கு முன் தந்த வாய்பாட்டை ஏற்றபடி மாற்றி $s_{x \cdot y}$ என்ற மதிப்பீட்டின் தரப் பிழையைக் கணிக்கலாம். Y சார்புடையதாக இருக்கும்போதும் r-ன் மதிப்பு முன் கிடைத்ததற்குச் சமமாகவே இருக்கும்.

பெருக்கு மொமென்டு முறை

A. தனித்த குறிப்புகளாக (தொகுக்கப்படாது) உள்ள விவரங்கள்.

1. இணைந்த பத்திகளில் இணைக் குறிப்புகளை அமைத்து $\Sigma(X)$, $\Sigma(Y)$, $\Sigma(X^2)$, $\Sigma(Y^2)$, $\Sigma(XY)$ ஆகியவற்றைக் கணிக்கவும்.

2. இந்த அளவுகளை யெல்லாம் Nஆல் வகுக்கவும். முதல் இரண்டு ஈவுகளுக்கு c_x, c_y என்ற குறியீடுகளைப் பயன் படுத்தவும். (அதாவது,

$$\frac{\Sigma(X)}{N} = c_x$$

$$\frac{\Sigma(Y)}{N} = c_y).$$

3. சராசரிப் பெருக்கத்தைப் பின்வரும் வாய்பாட்டால் கணிக்கவும்.

$$p = \frac{\Sigma(XY)}{N} - c_x c_y$$

4. பின்வரும் வாய்பாடுகளால் தரவிலக்கங்களைக் கணிக்கவும்.

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma(X^2)}{N} - c_x{}^2}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y^2)}{N} - c_y{}^2}$$

5. $$r = \frac{p}{s_x s_y}$$

என்ற வாய்பாட்டால் உடன்தொடர்புக் கெழுவைக் கணிக்கவும்.

6. பின்வரும் வாய்பாடுகளில் பொருத்தமான மதிப்புகளைப் பதிலிட்டு மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடுகளைத் தீர்மானிக் கவும்.

$$y = r\frac{s_y}{s_x}x$$

$$x = r\frac{s_x}{s_y}y$$

(இந்தச் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் மூலம் சராசரிகளின் புள்ளியில் இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.)

7. தேவைப்பட்டால் சமன்பாடுகளில் கூட்டுச் சராசரியினைப் பதிலிட்டு இரண்டு மூல அளவுத் திட்டங்களிலும் மூலத்தைச் சுழிக்கு மாற்றலாம்.

$$Y - \bar{Y} = r\frac{s_y}{s_x}(X - \bar{X})$$

$$X - \bar{X} = r\frac{s_x}{s_y}(Y - \bar{Y})$$

8. பின்வரும் வாய்பாடுகளிலிருந்து மதிப்பீட்டின் தரப்பிழைகள் இரண்டையும் காணலாம்.

$$s_{y \cdot x} = s_y\sqrt{1 - r^2}$$

$$s_{x \cdot y} = s_x\sqrt{1 - r^2}$$

B. தொகுக்கப்படவேண்டிய விவரங்கள்.

1. உடன்தொடர்புப் பட்டியலை அமைக்கவும்.
2. ஒவ்வொரு மாறிக்கும் ஓர் எதேச்சை சராசரி காணவும். எதேச்சை மூலத்திலிருந்து வெவ்வேறு குறிப்புகளின் விலக்கங்களையும் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் காணவும்.
3. c_x, c_y ஆகியவற்றைப் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் கணிக்கவும்.
4. s_x, s_y ஆகியவற்றைப் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் கணிக்கவும்.
5. உடன்தொடர்புப் பட்டியலில் ஒவ்வொரு கட்டத்துக்கும் $\Sigma(x'y')$ பிரிவு இடைவெளி கணிக்கவும். முழுப் பட்டியலுக்கும் $\Sigma(x'y')$ கூடுதலைக் கணிக்கவும்.
6. பின்வரும் வாய்பாட்டிலிருந்து சராசரிப் பெருக்கத்தின் மதிப்பைப் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில் கணிக்கவும்.

$$p = \frac{\Sigma(x'y')}{N} - c_x c_y$$

7. r-ஐ

$$r = \frac{p}{s_x s_y}$$

என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து கணிக்கவும்.

8. s_x, s_y ஆகியவற்றை மூல அலகுகளில் மாற்றவும்.
9. $$y = r\frac{s_y}{s_x}x,$$

$$x = r \frac{s_x}{s_y} y$$

ஆகிய வாய்பாடுகள் பொருத்தமான மதிப்புகளைப் பதிலிடுவதன் மூலம் மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடுகளைத் தீர்மானிக்கவும்.

10. தேவைப்பட்டால்

$$Y - \bar{Y} = r \frac{s_y}{s_x} (X - \bar{X})$$

$$X - \bar{X} = r \frac{s_x}{s_y} (Y - \bar{Y})$$

ஆகிய வாய்பாடுகளிலிருந்து, இரண்டு மூல அளவுத் திட்டங்களிலும் மூலத்தைச் சுழிக்கு மாற்றலாம்.

11. பின்வரும் வாய்பாடுகளிலிருந்து மதிப்பீட்டின் தரப்பிழைகளைக் கணிக்கவும்.

$$s_{y \cdot x} = s_y \sqrt{1 - r^2}$$

$$s_{x \cdot y} = s_x \sqrt{1 - r^2}$$

எல்லாச் சமயங்களிலும், சிதறல் விளக்கப்படத்தை அமைத்து மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளை அதில் குறிப்பதே நல்லது.

கணித விவரங்களைமட்டும் ஆராய்ந்து பெறுகின்ற அறிவைவிடப் பொதுவாக இத்தகைய படங்களிலிருந்து தொடர்புபற்றிய உண்மை நிலையையும், கையாளப்படுகின்ற முறைகள் ஏற்றவையா என்பதையும் நன்கு அறியலாம்.

ஒரு வரம்பு : முன்வரும் பக்கங்களில் வருணிக்கப்பட்ட தொடர்புகளின் அளவைகள் எத்துணை பொதுமையானவை என்ற கேள்வி எழுகிறது. சில பரவல்களுக்குமட்டும் இது பொருந்துமா, அன்றி இந்த அளவைகள் எல்லாம் முற்றிலும் பொதுமையாய் எல்லாவற்றுக்கும் பொருந்திவருவனவா என்பது கேள்வி.

முன் பார்த்ததுபோல், இயல்நிலை வழியைப் பின்பற்றிய பரவல்களுக்குத் தரவிலக்கம் தெளிவான திட்டவட்டமான பொருளுடையதாக இருக்கும். சராசரிக்கும் தரவிலக்கத்துக்கும் மதிப்புகள் தெரிந்தால் கொடுக்கப்பட்ட எல்லைகளுக்குள் முழுமைத் தொகுதி எத்தனை சதவீதம் அடங்கும் என்பது தெரிகிறது. இயல்நிலை வகையல்லாத வேறுவகைப் பரவல்களுக்குக்கூட தரவிலக்கம் பயனுள்ள அளவைதான். ஆனால், முன்போன்று செம்மையான

விளக்கம் தரமுடியாது. இதனை மனத்தில் கொண்டே,

$$r^2 = 1 - \frac{s^2_{y \cdot x}}{s^2_y}$$

என்ற வாய்பாட்டை நோக்கவேண்டும்.

கொடுக்கப்பட்ட சார்ந்த மாறியின் மூலமதிப்புகளின் பரவல் அதன் சராசரியினைச் சார்ந்து, இயல்நிலையாக இருந்து, அதன் குறைந்த வர்க்க நேர்கோட்டிற்கொட்டிய பரவலும் இயல் நிலையாக இருந்தால் $s_{y \cdot x}$, s_y இரண்டும் தெளிவான, உறுதியான பொருளுடையனவாக இருக்கின்றன. அதனின்று ஒன்றின் சார்பில் மற்றொன்றின் தொடர்பைக் காண r-ஐக் கணிப்பது பொருத்தமே. இந்த இருவகை இயல்நிலையிலிருந்து ஒன்றிலே வேறுபடும்போது கூட, இந்த ஒப்புமைக்கு அதிகச் சிறப்பு இல்லை. ஆனால், இயல் நிலை அல்லாத பரவல்களிலும் தரவிலக்கம் பயனுள்ள அளவையாக இருப்பதுபோலவே, தரவிலக்கமும் உடன்மாறுபாட்டுக் கெழுவும் எப்போதுமே பயனுடையவைதான். ஆனால், இத்தகைய சமயங்களில் அவற்றிற்குத் தரும் விலக்கங்களில் எச்சரிக்கை தேவை. இரண்டு மாறிகளின் பரவல்களும், மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளிலிருந்து விலக்கங்களின் பரவல்களும் இயல்நிலையாகவோ அல்லது தோராய மாக இயல்நிலையாகவோ இருக்கும்போதுதான் மேற்கூறிய அளவைகள் முழுச்சிறப்புடையனவாக இருக்கும் என்பதை நாம் உணரவேண்டும்.

இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து பெரிதும் விலகிய பரவல்களில், உடன்தொடர்புக் கெழுவின் மதிப்பு எப்படி பாதிக்கப்படும் என் பதற்கு ஓர் எளிய எடுத்துக்காட்டுக் கொடுப்போம். இந்த எடுத்துக் காட்டு 1953ஆம் ஆண்டில் பின்வரும் பத்து நகரங்களில் ஒவ் வொன்றின் மக்கள் தொகை என்ன என்பதையும் அவற்றில் எத்தனை தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகள் உள்ளன என்பதைப்பற்றிய விவரங்களையும் தருகிறது (9-10 பட்டியலில் காண்க). நியூயார்க் நகரைத் தவிர்த்து, எஞ்சியுள்ள முதல் ஒன்பது நகரங்களைக்கொண்டு தொகுப்புக்குப் பின்வரும் மதிப்புகள் கிடைத்தன.

$$s_y = 10.68$$
$$s_{y \cdot x} = 9.78$$
$$r = +0.4027$$

இந்த ஒன்பது புள்ளிகளும், மாறிகளின் தொடர்புக்கோடும் 9.8 படத்தில் A பகுதியில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 9-10

1953-ல் பத்து அமெரிக்க நகர்களில் மக்கள் தொகையும், தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கையும்.*

(இரு மாறிகளும் பத்தாயிரக்கணக்கில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.)

நகர்	மக்கள் தொகை X	நிறுவப்பட்டுள்ள தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை Y
டெனிவர்	45	12
ஸான் அன்டோனியோ ...	46	12
கன்சாஸ் சிடி	47	29
சீடில்	48	25
சின்சின்னடி	51	38
ப∴போலோ	58	35
நியூ ஆர்லியன்ஸ்	59	16
மில்வாக்கி	65	43
ஹௌஸ்டன்	67	22
நியூயார்க் சிடி	802	345

* இங்குப் பட்டியலமைக்கப்பட்டுள்ள விவரத்துக்கு ஆதாரம், பீரோ ஆஃப் சென்சஸ் (Bureau of Census) மதிப்பீடுகள், 'Sales Management' எனும் பத்திரிகை, நேஷனல் பிராட் காஸ்டிங் கம்பெனி (National Broadcasting Company); இவ் விவரங்கள் நேஷனல் இண்டஸ்டிரியல் கான்ஃபெரன்ஸ் போர்டு (National Industrial Conference Board) வெளியிட்ட 'The Economic Almanac' 1953-4 இதழில் தரப்பட்டவை; தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் இம் மதிப்பீடுகள் 1953, ஏப்ரல் 1ஆந் தேதிக்கு.

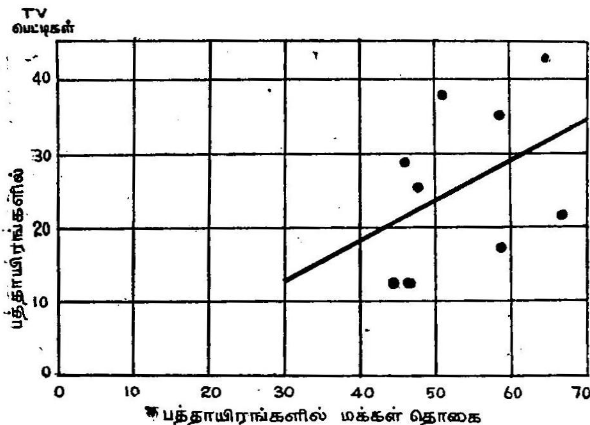
நியூயார்க் நகரத்தையும் கணக்கில் எடுத்துக்கொண்டால், பத்து நகரங்களின் மாதிரிகளும்

$$s_y = 96.30$$
$$s_{y \cdot x} = 9.23$$
$$r = +0.9954$$

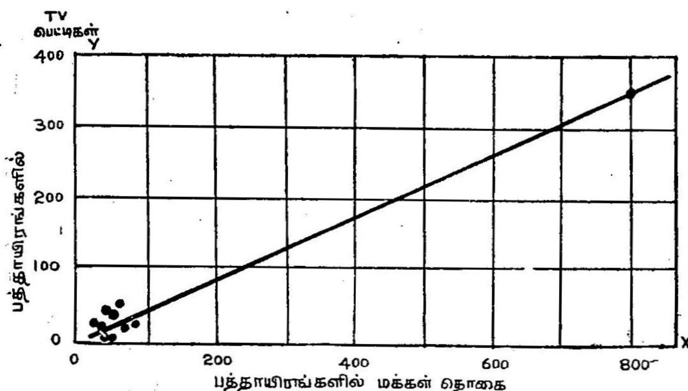
ஆகும். இந்தப் பத்துப் புள்ளிகளும் மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளும் 9.8 படத்தில் B பகுதியில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

இத்தனை வேறுபட்ட முடிவுகளுக்குக் காரணம் மிகவும் வெளிப்படையானது. இந்த ஒரு பெரிய நகரை ஒன்பது சிறிய நகர்களோடு சேர்க்கையில் இரு மாறிகளின் தரவிலக்கங்களும் பெரிதும் அதிகரிக்கின்றன. Y-மாறி (தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை) 10.68-லிருந்து 96.30-க்கு உயர்கிறது. ஆனால், பொருந்திய நேர் கோட்டையொட்டிய சிதறலின் அளவையான $s_{y \cdot x}$ என்பதன் மதிப்பில் அதிக வேறுபாடு இல்லை. ஒன்பது நகர்களுக்கும் அது 9.78 ; பத்து நகரங்களுக்கு அது 9.23 ஆகும். புறக்கோடியான இந்த ஒரு மதிப்புக்கும் அதிக சிறப்பு தந்து குறைந்த வர்க்கமுறையில் பொருந்திய நேர்கோடு, இந்த மதிப்புக்கான புள்ளி வழியே அல்லது இதற்கு

அண்மையில் செல்லவேண்டும் என்று எடுத்துக்கொள்வதே இங்குக் கூறிய வேறுபாட்டுக்குக் காரணம்.



பகுதி A : 1953-ல் ஒன்பது அமெரிக்க நகர்களிலுள்ள பெட்டிகளின் எண்ணிக்கைக்கும் மக்கள் தொகைக்கும் உள்ள தொடர்பு.



9.8 படம்.

பகுதி B : 1953-ல் பத்து அமெரிக்க நகர்களிலுள்ள தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கைக்கும், மக்கள் தொகைக்கும் உள்ள தொடர்பு.

s_y-ஐவிட, $s_{y \cdot x}$ என்பது ஒரு தனித்த புறக்கோடி மதிப்பில் குறைவாகப் பாதிக்கப்படுவது. எனவே, r-ன் மதிப்பு,

$$r = \sqrt{1 - \frac{s_{y.x}^2}{s_y^2}}$$

என்ற தொடர்பினல் தீர்மானிக்கப்படுவதால், அத்தகைய ஒரு

குறிப்பு உடன்தொடர்புக் கெழுவின் மதிப்பை அதிகரிக்கிறது. முன் கூறிய எடுத்துக்காட்டில் ஒரு புறம்பான மதிப்பு சிறிதும் சிறப்பில்லாத உடன்தொடர்புக் கெழுவை ஏறக்குறைய ஒன்று என்ற மதிப்பினை உடையதாக்கிவிடுகிறது. எனவே, முடிவு பொருளற்ற தாகிவிடுகிறது.

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டு ஒரு புறக்கோடியான (extreme) எடுத்துக்காட்டு; இயல்நிலையிலிருந்து விலக்கம் இருக்கும்போதெல் லாம் அதே சீர்குலைவு சிறிய அளவிலோ பெரிய அளவிலோ இருந்துதான் தீரும். ஆனால், நடைமுறையில் நாம் விவாதித்த பலவகைத் தொடர்பு அளவைகளும் முற்றிலும் இயல்நிலையான பரவல் களுக்குமட்டுமே பயன்படுபவை அல்ல; ஆனால், இயல்நிலையல்லாத பரவல்களில் இந்த அளவைகள் யாவும் சற்று மாற்றுக் குறைந்தே பயனுகின்றன.

இதுவரையில் விவாதிக்கப்பட்ட உடன்தொடர்பு அளவைகளும் மாறிகளின் தொடர்பு அளவைகளும் வருணனை அடிப்படையிலேயே ஆராயப்பட்டன.

ஆனால், குறிக்கப்பட்ட மாதிரிகளில் உறவை வருணிக்கும் இத்தகைய அளவைகளை, முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளை மதிப்பீடு செய்யும் அடிப்படையாகவும், சிறப்புகாண் சோதனைகளைச் செய்வதற்குப் பயன்படுத்துவதுபற்றியுமே அக்கறை காட்டுகிறோம். உய்த்துணர்வுச் சிக்கல்கள்பற்றி இப்போது காண்போம்.

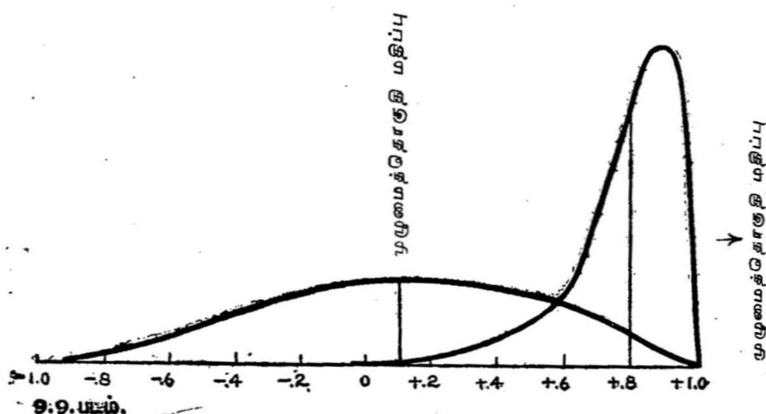
உடன்தொடர்பு அளவைகள், மாறிகளின் தொடர்பு அளவைகள் ஆகியவற்றிலிருந்து உய்த்துணர்வு செய்வதுபற்றிய சிக்கல்கள்

உடன்தொடர்புக் கெழுவின் மாதிரியில் பரவல்

r-ன் மாதிரிப் பரவல் முழுமைத் தொகுதியின் உடன்தொடர்புக் கெழுவான ρ-ஐயும் மாதிரியில் அடங்கும் குறிப்புகளில் எண்ணிக்கை N-ஐயும் பொறுத்தது. இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து எடுக் கப்பட்ட மாதிரிகளின் r மதிப்புகள், N அதிகமாக அதிகமாக இயல்நிலை வகைக்கு அணுகுகின்றன. சுழிக்கு நெருங்கியுள்ள ρ மதிப்புகளில், சுழிக்கு விலகியுள்ள ρ மதிப்புகளைவிட இந்தத் தன்மை நன்கு தெரியும். -1-க்கும் $+1$-க்கும் ρ நெருங்கியிருக்கும்போது, N-ன் மதிப்பு மிகவும் அதிகமாக இருந்தால்தான் r-ன் பரவல் சமச்சீருடைய தாகவும் தோராயமாக இயல்நிலையாகவும் இருக்கும்.

இதற்குக் காரணம் வெளிப்படை. ρ என்ற முழுமைத் தொகுதி மதிப்பு 1-க்கு நெருங்கியதானல் $+0.98$ என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

மாதிரி r-மதிப்புகள் ஒரு திக்கில் 0.02 எனவும் மறுதிக்கில் 1.98 எனவும் வீச்சினைப் பெற்றிருக்கலாம். ஆனால், ρ என்பது $+0.04$ என்பதற்குச் சமம் என எடுத்துக்கொண்டால் ஒரு திக்கில் விலக்கத்தின் வீச்சு மறுதிக்கிலுள்ள விலக்கத்துக்குச் சாத்தியமான வீச்சுக்குக் கிட்டத்தட்ட இருக்கும். இத்தகைய சூழ்நிலையில், r-ன் பரவல் சமச்சீரை அணுகும் என எதிர்பார்க்கலாம். இந்த வேறு பாட்டை 9.9 படத்தில் வரைவடிவமாகக் காட்டியுள்ளோம். இதில் $\rho = 0.10$, $N = 8$ என்ற மதிப்புகளுக்கு r-ன் மாதிரிப் பரவலையும், $\rho = 0.80$, $N = 8$ என்ற மதிப்புகளுக்கு r-ன் மாதிரிப் பரவலையும், குறித்துள்ளோம்.



9.9. படம்.

$\rho = +0.10$, $\rho = +0.80$ உள்ள முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து $N = 8$ இருக்குமாறு பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளுக்கு உடன்தொடர்புக் கெழுவில் மாதிரிப் பரவல்களுக்கு அலைவு வளைகோடுகள்.

r என்பதன் தரப்பிழையை σ என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்திக் குறித்தால் இயல்நிலைத் தன்மையுடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளுக்குப் பொருந்தும்படியாக

$$\sigma_r = \frac{1 - \rho^2}{\sqrt{N-1}} \qquad (9.24)$$

என்ற பொது வாய்பாட்டைக் கூறலாம்.[17] (9.24) வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்துகையில் இரு முக்கியமான கட்டுப்பாடுகள் உள்ளன.

[17] இத்தகைய மாதிரிகளில் இரு மாறிகள் சம்பந்தப்பட்டிருப்பதால், இத்தகைய முழுமைத் தொகுதிகள் இரட்டை இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதி (bivariate normal parent) என்று குறிக்கப்படுவது உண்டு.

முதலில் முழுமையின் r மதிப்பான ρ தெரியவேண்டும்; இது சாதாரணமாகத் தெரியாது. எனவே, ஆய்வாளர்கள் r என்ற மாதிரி மதிப்பையே ρ-க்குத் தோராயமாகப் பயன்படுத்திவிடுகிருர்கள்—இது நல்ல தோராயமன்று; அதிலும் N சிறிதாக இருக்கும்பொழுது இது நல்ல தோராயமாகாது. கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாதிரி, ρ-க்குச் சுழி மதிப்புள்ள முழுமையிலிருந்து வந்தது என்றஎடுகோளை ஆராய்வது, குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டில் (9.24) என்ற வாய்பாடு.

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \qquad (9.25)$$

என்று ஆகிறது. அத்தகைய சோதனையில், ρ-ன் ஐயப்பாடு போக்கப்படுகிறது.

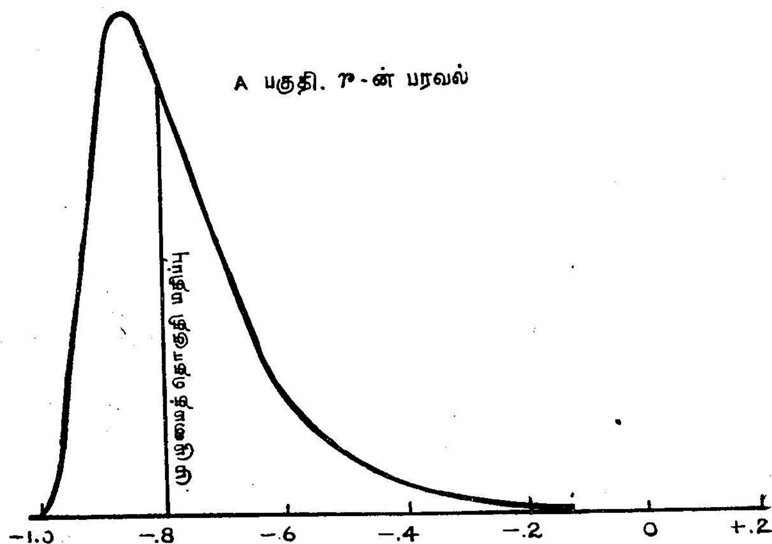
இரண்டாவது கட்டுப்பாடு, மாதிரி r-களின் இயல்நிலைப் பரவலின் தரவிலக்கமாக σ_r-ஐக் கொள்வதனுல் எழுவதாகும்.

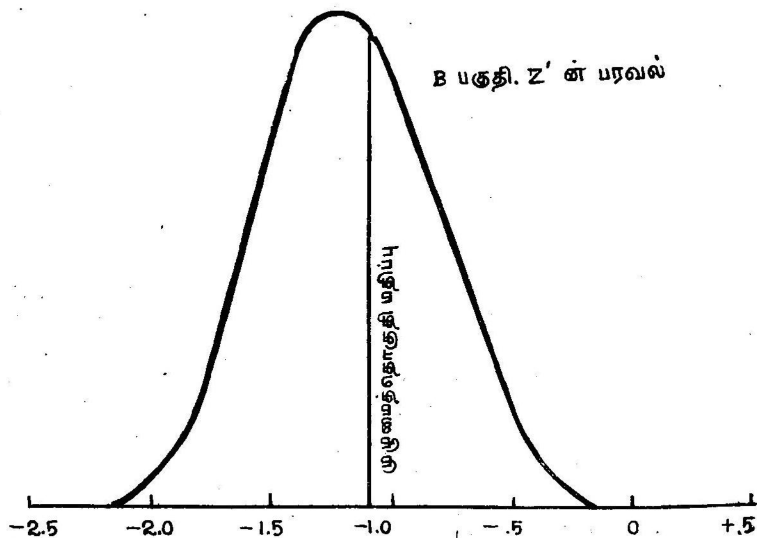
சிறிய அளவான மாதிரிகளிலிருந்து பெற்ற r மதிப்புகளின் பரவல், இயல்நிலை வகையிலிருந்து விரிவாக விலக்கமடையும்; அதில் முழுமைத் தொகுதி அளவையான ρ-ன் உயர் மதிப்புகளுக்கு அதிக விலக்கமடையும். எல்லா ρ-க்களும் ஒன்று X-க்கு நெருங்கியிருந்தால், (9.24) வாய்பாட்டைப் புள்ளிவிவர உய்த்துணர்வுகளுக்கு நம்பகமாகப் பயன்படுத்துவதற்கு, N-ன் மதிப்பு மிகப் பெரிதாக இருக்கவேண்டும்.

ρ-ம், N-ம் மாறுபடும்போது, r-ன் பரவலில் ஏற்படும் மாறுபாடுகளினுல் விளையும் இடர்கள் அநேகமாக சமாளிக்கப்பட்டுவிட்டன. 1915-ல் ஆர். ஏ. ஃபிஷர் என்பார், r-ன் பரவலை வரையறை செய்தார் (து.நூ.ப. 49). N—3-லிருந்து 25 வரையிருக்கும்போதும், N 50, 100, 200, 400 ஆகியவைகளாக இருக்கும்போதும், ρ-ன் (0, .1, .2, .3, .4, .5, .6, .7, .8, .9) மாறுபடும் மதிப்புகளுக்கு r பரவல்களின் அளவைகளை விளக்கமாகத் தரும் பட்டியல்களை எஃப். என். டேவிட் (து.நூ.ப. 26) அமைத்துள்ளார். உய்த்துணர்வுகள் செய்ய (9.24), (9.25) ஆகிய வாய்பாடுகளைவிட, குறிப்பிட்ட N, ρ மதிப்புகளுக்கு, இவை தோராயமான அடிப்படையாக விளங்குகின்றன.

r-ன் உருமாற்றம் (Transformation of r)

பல சூழ்நிலைகளில் A இயல்நிலை அல்லாத சமயங்களில் r-ன் பரவல்களுக்கு ஏற்படும் வரையறைகளைக் கடந்து செல்ல ஆர். ஏ. ஃபிஷர் ஓர் அருமையான உருமாற்றத்தைக் கண்டார் (து.நூ.ப. 50). சாதாரண அளவுடைய மாதிரிகளுக்கு (z' என்ற குறியீடு உடைய), r-ன் லாகிருதச் சார்பலன் இயல்நிலைக்கு நெருக்கமாக ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடிய அளவில் அமைந்துள்ளது எனக் காட்டினுர்.





9.10. படம்.

r, *z*' ஆகியவற்றின் மாதிரிப் பரவல்களைக் காட்டும் அலைவு வளைகோடுகள். $\rho = -0.80$ என்ற முழுமையிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட, $N = 12$ உள்ள மாதிரிகள்.

N அதிகரிக்க அதிகரிக்க சார்பலன் இயல்நிலைத் தன்மையை விரைந்து பெறுகிறது என்று காட்டினார். முழுமைத் தொகுதியில் உடன்தொடர்புக்கெழு எந்த மதிப்புப் பெற்றிருந்தாலும் இது பொருந்தும். இந்த மாற்றத்தை,

$$z' = \frac{1}{2}\left\{\log_e(1+r) - \log_e(1-r)\right\} \qquad (9.26)$$

என்று குறிப்போம். r, z' ஆகியவற்றிற்குச் சாத்தியமான மதிப்புகளின் அளவுத் திட்டங்கள் வெவ்வேறானவையே. $r = 0$-க்கு, $z' = 0$; $r = 1$-க்கு, $z' = \infty$. r-ன் எதிர்மதிப்புகள் (negative values) z'-ன் எதிர்மதிப்புகளைத் தரும்.

r, z' ஆகியவற்றின் பரவல்களுக்குள்ள வேறுபாடுகளில் சிலவற்றை, 9.10 படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள பரவல்களின் ஒப்புமையால் அறியலாம். $\rho = -0.80$ உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்த 12 குறிப்புகள் கொண்ட மாதிரிகளுக்குக் கிடைத்த r-களின் பரவலின் கூறிய கோட்டமானது இதற்கிசைந்த z'-களின் ஏறக்குறைய இயல்நிலையான பரவலுக்கு மிகவும் வேறுபட்டுக் காண்கிறது.

முழுமை மதிப்பான ζ (ஸீடா) என்பதற்கு மதிப்பீடுகளாக மாதிரி மதிப்பான z' என்பதனைக் கருதலாம். z'-ன் பரவலுடைய சராசரிக்கும் தரவிலக்கத்துக்கும் தோராய மதிப்புகளை,

$$\bar{z}' = \zeta + \frac{\rho}{2(N-1)} \qquad (9.27)$$

$$s_{z'} = \frac{1}{\sqrt{N-3}} \qquad (9.28)$$

என்பவற்றால் பெறுவோம். (9.27) வாய்பாட்டால் z' என்பதன் சற்றே மேல்நோக்கிய பிறழ்ச்சி தெரியவரும். அதாவது, z' என்பதன் பல மாதிரி மதிப்புகளின் சராசரியான முழுமையின் மதிப்பான ζ-வைவிடச் சற்றே எண் மதிப்பில் (numerically) கூடுதலாக இருக்கும். இந்தப் பிறழ்ச்சியை $\rho/2(N-1)$ என்பதனால் r என்பதனை ρ-ன் மதிப்பீடாகப் பயன்படுத்தி, இந்தப் பிறழ்ச்சிக்குத் திருத்தம் செய்யலாம். z' தரவிலக்கத்தைத் தரும் (9.28) வாய்பாடு இன்னும் முக்கியமானது. இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்த மாறியின் தரவிலக்கமாக இதனை எடுத்துக்கொள்ளலாம். இதன் மதிப்பு N அளவைப்பொறுத்து இருக்கின்றதேயன்றி, முழுமைத் தொகுதியின் ρ-ஐப் பொருத்தது அன்று. அதாவது z'-ன் பரவல், உடன்தொடர்பின் அளவைச் சாராது தனித்து இருக்கிறது. முழுமையின் ρ மதிப்பு

களின் மாற்றங்களுக்கு இயைந்து r-ன் பரவல் மாறுபடுவதைப்போல அது மாறுபடுவதில்லை. எனவே z'-ல் நேரக்கூடிய மாதிரிப் பிழைகளை மிகத் திருத்தமாக நன்கு வெளியிடுகிறது. r அளவுத் திட்டத்தில் கொடுக்கப்பட்ட எண்ணிக்கையுடைய புள்ளிகளில் ஏற்படும் வேறுபாடானது r-ன் தாழ்ந்த மதிப்புகளைவிட உயர்ந்த மதிப்புகளுக்கே சிறப்பாக இருக்கிறது.

முன்கூட்டியே தயார் செய்யப்பட்ட பட்டியல்களின் துணையால், r-லிருந்து z'-க்கும், z'-லிருந்து r-க்கும் எளிதில் மாற்றங்களைச் செய்யலாம். (பிற்சேர்க்கைப் பட்டியல் V காண்க.) அத்தகைய பட்டியல் மதிப்புகளைப் பயன்படுத்துவதுபற்றிய எடுத்துக்காட்டு விரைவில் தரப்படும்.

கண்டறிந்த உடன்தொடர்புகளின் உண்மைச் சிறப்பை, r-ஐவிட r-க்குப் பதிலாக உருவாக்கப்படும் சார்பலனிலிருந்து கிடைக்கும் மதிப்புகளின் பரவல் பொருத்தமாக வெளியிடுகிறது என்பது, z' உருமாற்றத்தின் பயன்களில் ஒன்று. .88-விருந்து .98 வரை r-ன் மதிப்பு மாறினால், r அளவுத் திட்டத்தில் .20-லிருந்து .30-க்கு மாற்றம் நிகழ்கிறது. ஆனால், இந்த மாற்றங்களினால் z' அளவுத் திட்டத்தில் முதல் மாற்றத்துக்கு இசைய 1.38-லிருந்து 2.30 வரை (.92 வீச்சு) மாற்றமும், இரண்டாவது மாற்றத்துக்கு இசைய .20-ல் இருந்து .31 வரை (.11 வீச்சு) மாற்றமும் நிகழ்கின்றன. z' அளவுத் திட்டத்தில் முதலில் ஏற்படும் மாற்றம் இரண்டாவதில் ஏற்படும் மாற்றத்தைப்போல எட்டுமடங்கு அதிகமானது. இவ்விதமாக z' அளவுத் திட்டம், r அளவுத் திட்டத்தைவிட, அளந்தறிந்த உடன்தொடர்புகளின் உண்மையான சிறப்பினைக் கொடுக்கும்.

இயல்நிலை அல்லாத முழுமைத் தொகுதிகளில் உடன்தொடர்பு அளவைகளைக் கையாளும்போது, இயல்நிலை மாதிரிகளில் கிடைத்த அத்தகைய அளவைகளைக் கையாள்வதுபோல் ஆய்வாளர் அத்தனை நம்பகமாகச் செய்யமுடியாது. ஏனெனில், இயல்நிலையில்லாப் பரவல்களில் இத்தகைய மதிப்புகளின் பரவல்கள் திருத்தமாக வரையறை செய்யப்படுவதில்லை. ஆனால், நடைமுறையில், மாதிரிகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிபற்றி நுணுக்கமாக ஆராயாது, மேலே விவாதிக்கப்பட்ட தரப்பிழை அளவைகளைப் பயன்படுத்துவது வழக்கம். r-ன் மாதிரிப் பரவல்கள் மாதிரியாக எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதிகளில் இயல்நிலையிலிருந்து விலகுவதால், அதிகமாகப் பாதிக்கப்படுவதில்லை என்று காட்டும் இ. எஸ். பியர்ஸனின் (E. S. Pearson) முடிவுகளை இந்த நடைமுறை வழக்கத்துக்கு அமைதியாகக் கொள்ளலாம். என்றாலும், முழுமையின் இயல்நிலையிலிருந்து விலகிய நிலையில் நாம் உடன்தொடர்புக் கெழுவினைக் குறித்துச் செய்யும் உய்த்துணர்வுகள் பாதிக்கப்படும்.

நேர்கோட்டு உடன்தொடர்புகள்பற்றிய உய்த்துணர்வுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள்

முன்கண்ட கமர்ஷியல் பாங்கு தள்ளுபடி வீதத்துக்கும், அதற்கியைந்த ஃபெடரல் ரிஸர்வ் பாங்கு தள்ளுபடி வீதத்துக்குமுள்ள தொடர்புபற்றிக் கூறிய வாய்பாடுகளை எடுத்துக்காட்டில் பயன்படுத்தி r என்ற கொடுக்கப்பட்ட அளவையின் தரப்பிழையை மதிப்பீடு செய்வதுபற்றி விளக்குவோம். N-ன் மதிப்பு 1,800ஆக இருக்கும்போது r என்பதன் மதிப்பு 0.837. மாதிரி பெரிதாக இருக்கும்போது,

$$s_r = \frac{1 - \rho^2}{\sqrt{N - 1}}$$

என்ற வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம். ρ என்பதற்கு r என்ற தோராயத்தைப் பயன்படுத்தி, N என்பதற்குக் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பையும் பதிலிட்டால்,

$$s_r = \frac{1 - 0.837^2}{\sqrt{1800 - 1}} = \frac{0.299431}{42.41} = 0\ 007$$

0.99 நிகழ்திறமுடைய நம்பகத்துடன் உடன்தொடர்புக் கெழுவின் முழுமை மதிப்பு 0.819-லிருந்து 0.855 வரை அமைகிறது என்று கூறலாம். இந்த எல்லைகளில் கீழ் எல்லை 0.837 — (2.58 × 0.007)ம், மேல் எல்லை 0.837 + (2.58 × 0.007)ம் ஆகும்.

உடன்தொடர்புபற்றிய ஆய்வு முடிந்ததும், r-ன் மதிப்பு சிறப்புடையதுதானா என முதலில் கவனிக்கவேண்டும். இன்னும் *சரியாகச் சொல்லப்போனால்*, எந்த முழுமையிலிருந்து மாதிரி எடுக்கப் பட்டதோ, அதில் இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையேயும் தொடர்பு இல்லை என்ற எடுகோளுக்கு ஒத்து வருகிறதா எனக் காணவேண்டும். இது சூன்ய எடுகோளின் ஒரு வகையே. தற்போது கொடுக்கப் பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு இந்தச் சூன்ய எடுகோளை மறுக்க இயலுமா என்று அறிய விரும்புகிறோம்.

பண்டங்களின் விலைவாசிகளின் இயக்கங்களைப்பற்றிய ஆராய்ச்சி ஒன்றுக்காக, பொதுவான வாணிகப் புத்துயிர் (revival) கால கட்டங்களில், தனித்த பண்டங்களின் விலைகளின் முன்னேற்றம்பற்றிய காலத்தைக் குறித்து 1,202 அளவுகள் எடுக்கப்பட்டன.

இந்த அளவுகள் ஒவ்வொன்றோடும் தொடர்புபடுத்தப்பட்டு, தொடர்ந்த பொது வாணிகப் பின்னடைவுக் காலத்தில் குறிப்பிட்ட பண்டத்திற்கு விலைக் குறைவு ஏற்பட்டபோது ஓர் அளவு எடுக்கப் பட்டது.[18] பொருள் விலை உயர்வதற்கும் குறைவதற்குமிடையே ஏதேனும் தொடர்பு இருக்கிறதா என அறிய விரும்புகிறோம்.

[18] பார்க்கவும் : மில்ஸ் (Mills) து.நா.ப. 100, பக்கம் 131.

வாணிகச் சுழற்சிகளுக்கேற்ப விலைகளின் இயக்கத்துக்குத் திட்டமான வடிவ அமைப்பு இருக்கிறதா? இவ்விதம் நீடித்த வடிவ அமைப்பிற்குச் சான்று கிடைத்தால், பொருளாதார வாழ்க்கையிலுள்ள மெய்யான ஒழுங்கமைப்புகளையே இந்தச் சுழற்சிகள் வெளியிடுகின்றன என்ற கருத்துக்கு இவை ஆதாரமாகும். இந்த 1,202 இணைக் குறிப்புகளும் 0.27 என்ற உடன்தொடர்புக் கெழுவைத் தருகின்றன. இது தொடர்பு மிகுந்திருப்பதைக் காட்டவில்லை. ஆனால், r-ன் அளவை அறிவது நமது குறிக்கோள் அன்று. உண்மையான உடன் தொடர்பு, சுழியாகும் என்ற எடுகோளை ஆராய்வதே நமது விருப்பம். r-ன் தரப்பிழையை,

$$s_r = \frac{1}{\sqrt{1,202 - 1}} = 0.029$$

என்பதால் அறிகிறோம். எடுகோளின்படி r-ன் முழுமைத் தொகுதி மதிப்புச் சுழியாகும். எனவே, பின்னத்தின் பகுதி ஒன்று.

r-ன் உண்மை மதிப்புச் சுழி என்றும், r-ன் தரப்பிழை 0.029 என்றும் கொண்டால், கொடுக்கப்பட்ட மாதிரியிலிருந்து 0.27 என்ற கெழுவையும் அடையும் வாய்ப்புக்கு நிகழ்திறம் என்ன? இந்த மதிப்பு எடுகோள் மதிப்பான 0-விருந்து 9 தரவிலக்க் தூரம் விலகுவதால், இந்த வேறுபாடு, சந்தர்ப்பத்தினுல் ஏற்பட்டது என்ற நிகழ்திறம் மிகமிகக் குறைவு. எனவே, நாம் காணும் முடிவுகள் எடுகோளோடு விலை புத்துயிர்க் காலத்தில் உயரும் ஒழுங்கும் பின்னடைவுக் காலத்தில் தாழும் ஒழுங்கும் தொடர்புடையன அல்ல என்ற எடுகோளோடு பொருந்தவில்லை என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம். எனவே, சூன்ய எடுகோள் தள்ளுபடி செய்யப்படுகிறது.

T-ன் மதிப்பு $\left(\text{இங்கே } T = \frac{r - 0}{s_r}\right)$ 2.58-க்குக் குறைவாக இருக்குமானுல் முடிவு வேறு மாதிரியாக இருந்திருக்கும். அத்தகைய சமயத்தில் மாதிரியின் r மதிப்புக்கும், எடுகோள் மதிப்பான 0-க்குமுள்ள வேறுபாட்டை மாதிரி ஏற்ற இறக்கங்களின் விளைவு என்று அமைதி கூறலாம். முடிவு சூன்ய எடுகோளோடு முரண் அடையாது.

r-ன் உண்மை மதிப்பான சுழி என்ற எடுகோளோடு முடிவுகள் பொருந்தவில்லை என்று நிறுவிவிட்டால், r-ன் தரப்பிழையைக் கணித்து, முழுமையின் மதிப்புக்கு நம்பக எல்லைகளை மதிப்பீடு செய்யலாம் ρ-க்குத் தோராயமாக மாதிரி r-ஐக் கொண்டு,

$$s_r = \frac{1 - 0.27^2}{\sqrt{1,202 - 1}} = 0.027$$

என்பதைப் பெறலாம். மாதிரியில் இருந்து பெறும் எல்லைகள் $r \mp$ 2.58 மடங்கு s_r; அதாவது, 0.20-க்கும் 0.34-க்கும் சமம். ρ-க்கு இவை 0.99 நம்பக எல்லையை அமைக்கின்றன.

முன்னர்க் கூறிய சிறப்புகாண் சோதனையில் N பெரிதாக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது; இத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் இயல் நிலையைப் புனைந்துகொள்ளும் (9.25) வாய்பாட்டைப் பயன் படுத்துவது நன்று. சிறிய மாதிரிகளுக்கு வேறு செயல்முறைகளைக் கையாளவேண்டும். N சிறிதாக இருக்கையில் எடுகோளைச் சோதனை செய்யவேண்டுமானால், t-பரவலையொட்டிய ஓர் அளவையை,

$$t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}} \tag{9.29}$$

என்பதிலிருந்து பெறுதல்வேண்டும் என ஆர். ஏ. ஃபிஷர் காட்டியுள்ளார்.

இது r—0 (அதாவது கொடுக்கப்பட்ட r எடுகோள் மதிப்பான 0-லிருந்து பெறும் விலக்கம்) என்ற அளவையை $\sqrt{1-r^2}/\sqrt{N-2}$ என்பதால் வகுப்பதற்குச் சமம். t பட்டியலில் இங்ஙனம் கிடைக்கும் மதிப்புகளைக் காணும்போது, வரையற்ற பாகைகளான n ஐ, N—2-க்குச் சமமாக எடுத்துக்கொண்டிருக்கிறோம். (இங்குப் பயனாகும் r-ன் மதிப்பை, ஷெப்பர்டு திருத்தங்களைப் பயன்படுத்தாமலேயே பெறவேண்டும்.)

35 விவரங்களைக் கொண்ட ஓர் எடுத்துக்காட்டில், அமெரிக்காவில் பருத்தி உற்பத்தி, விலை ஆகியவற்றின் தொடர்புபற்றிய ஆராய்ச்சியின் முடிவு கிடைத்தது. இந்த முடிவுகளைச் சோதனை செய்து பார்ப்போம். r-ன் மதிப்பு —0.65. எனவே,

$$t = \frac{-0.65\sqrt{35-2}}{\sqrt{1-(-0.65)^2}} = -4.91$$

என்று கிடைக்கிறது. t பட்டியலைப் பார்க்கும்போது $n = 33$ என்ற மதிப்புக்கு, 1 சதவீதம் என்ற நிகழ்திறத்தோடு t-ன் தோராய மதிப்பு 2.73 என்று கிடைக்கிறது. t-ன் உண்மை மதிப்பு 0 ஆக இருந்திருந்தால், 2.73 அளவு அல்லது அதனினும் அதிக அளவுடைய மதிப்பு மாதிரி முறையின் ஏற்ற இறக்கங்களின் பயனாக 100 தடவைக்கு 1 தடவையே கிடைக்கும். t-ன் தற்போதைய மதிப்பு 2.73-லும் பெரியது. r-ன் உண்மை மதிப்புச் சுழி என்ற முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இது பெறப்பட்டதற்கான வாய்ப்புகள் மிகக் குறைவு. பருத்தி உற்பத்திக்கும், பருத்தி விலைக்கும் எதிர் உடன் தொடர்பு, சிறப்பாகக் காணப்படுகிறது.

பட்டியல் 9-11

வெவ்வேறு சிறப்பு வரம்புகளில் உடன்தொடர்புக் கெழுவின் மதிப்புகள்*

n	$P = .05$	$P = .02$	$P = .01$
1	.996917	.9995066	.9998766
2	.95000	.98000	.990000
3	.8783	.93433	.95873
4	.8114	.8822	.91720
5	.7545	.8329	.8745
6	.7067	.7887	.8343
7	.6664	.7498	.7977
8	.6319	.7155	.7646
9	.6021	.6851	.7348
10	.5760	.6581	.7079
11	.5529	.6339	.6835
12	.5324	.6120	.6614
13	.5139	.5923	.6411
14	.4973	.5742	.6226
15	.4821	.5577	.6055
16	.4683	.5425	.5897
17	.4555	.5285	.5751
18	.4438	.5155	.5614
19	.4329	.5034	.5487
20	.4227	.4921	.5368
25	.3809	.4451	.4869
30	.3494	.4093	.4487
35	.3246	.3810	.4182
40	.3044	.3578	.3932
45	.2875	.3384	.3721
50	.2732	.3218	.3541
60	.2500	.2948	.3248
70	.2319	.2737	.3017
80	.2172	.2565	.2830
90	.2050	.2422	.2673
100	.1946	.2301	.2540

* இந்தப் பட்டியல் R. A. ஃபிஷர், அவரது பதிப்பகத்தார் ஆலிவர் அண்ட் பாயிட், எடின்பரோ (Oliver and Boyd, of Edinburgh) இசைவு பெற்று வெளியிடப்படுகிறது. இதன் மூலம் 'Statistical Methods for Research Workers' என்ற நூலில் பட்டியல் V.A ஆகத் தரப்பட்டுள்ளது.

கூறப்பட்ட சிறப்பு வரம்புகளில் (levels of significance) உடன்தொடர்புக் கெழு என்ன என்பதைக் காட்டும் R. A. ஃபிஷரின்

பட்டியல்கள்மூலம் r-ன் சூன்ய எடுகோள்களை எளிதில் சோதனை செய்யலாம். இதிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை 9-11 பட்டியலிலும் பிற்சேர்க்கைப் பட்டியல் IV-லும் தந்துள்ளோம். எளிய உடன்தொடர்புக் கணக்குகளில் n-க்கு $N-2$ என்று பதிலிட்டுக் காணவும்.

இந்தப் பட்டியலைப் பயன்படுத்தும் முறைக்குச் சிறிது விளக்கம் தேவைப்படுகிறது. $n = 10$ உடைய 12 இணைக் குறிப்புகள் கொண்ட மாதிரி தரப்பட்டிருக்கிறது; $P = .01$ என்ற சிறப்பு வரம்பைக் கொண்டு, குறைந்தது 0.7079 அளவாவது பெரிய கெழு இருந்தால்தான் அதனைச் சிறப்புடையதென ஏற்போம். 100-க்கு 1 தடவை தான் தொடர்பிலா முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 12 குறிப்புகள் கொண்ட மாதிரியில் r மதிப்பு 0.7079 எனக் கிடைக்கும். $P = .05$ என்பது சிறப்பு வரம்பானால், 12 குறிப்புகள் அடங்கிய மாதிரிக்கு r-ன் 0.5760 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மதிப்பையே உண்மை தொடர்பைக் குறிக்கிறது என்று ஏற்போம்.

நிகழ்திறக் கெழு சம்பந்தப்பட்ட உய்த்துணர்வின் வலிமையை அதிகரிப்பதில் ஃபிஷரின் z' உருமாற்றத்தின் பெரும்பயனைக் கண்டோம். இந்த உருமாற்றம் குறிப்பாகச் சராசரிக் குடும்ப வருமானம், குடும்ப நுகர்வுச் செலவுபற்றிய விவரங்களை அறிய மாதிரியாக எடுத்துக் கொண்ட நகர மக்கள்தொகைக்கு ρ-ஐ மதிப்பீடு செய்யப் பொருத்தமுடையது. முன் பக்கங்களில் குறிப்பிடப்பட்ட கணிப்புகளின்படி கிடைக்கும் r-க்கு $+0.937$ என்ற மதிப்பு,, 2,500-லிருந்து 30,500 வரை மக்கள் தொகை கொண்ட 33 நகரங்கள் கொண்ட மாதிரிகளின் இருமாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள உறவைக் குறிக்கிறது. இங்கே ρ-ன் மதிப்பு கிட்டத்தட்ட ஒன்றாக உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட ஒப்பீட்டு அடிப்படையில் சிறிதான மாதிரியைப் பயன்படுத்துகிறோம். இத்தகைய சமயங்களில் r-ன் பரவல் இயல்நிலைத் தன்மையிலிருந்து பெரிய அளவில் விலகுகிறது. எனவே, முழுமைத் தொகுதி அளவையான ρ-க்கு மதிப்பீடு செய்ய நம்பக எல்லைகளை அமைக்கையில் r-லிருந்து z'-க்கு உருமாற்றம் செய்கிறோம்.

பிற்சேர்க்கைப் பட்டியல் V-லிருந்து $+0.937$ என்ற r மதிப்புக்கு இசைந்து z'-ன் மதிப்பு $+1.71$ எனத் தீர்மானிக்கிறோம். மாதிரியின் அளவு (size) 33 ஆகும். எனவே,

$$s_{z'} = \frac{1}{\sqrt{N-3}} = \frac{1}{\sqrt{33-3}} = \frac{1}{5.477} = 0.1826$$

இதனை z' மதிப்புகளின் இயல்நிலைப் பரவலின் தரவிலக்கமாகக் கருதலாம். 0.99 என்ற நிகழ்திறத்துக்கு ஏற்ப z'-க்கு முழுமைத்

தொகுதி எல்லைகள் அமைக்க முனைகிறோம். கீழ் எல்லை + 1.71—(2.58 × 0.1826): அதாவது 1.24. மேல் எல்லை 1.71 + (2.58 × 0.1826); அதாவது 2.18. எனவே. 0.99 என்ற நம்பகத்துடன் முழுமைத் தொகுதி 1.24-லிருந்து 2.18-க்குள் விழுகிறது என்று கூறலாம். மீண்டும் எல்லைகளை r அளவுத் திட்டத்துக்கு மாற்றுவோமானால் 0.99 என்ற நம்பகத்தோடு, முழுமைத் தொகுதியின் ρஐ + 0.8455 லிருந்து 0.9748-க்குள் அமைக்கலாம்.

மாதிரிகளில் r-ன் சூன்ய எடுகோளை z' உருமாற்றத்தால் சோதனை செய்யலாம். இதற்கு (9 11 பட்டியல் போன்ற) பட்டியல்கள் பயனுகா.

z'-ன் உருமாற்றம், இரு கண்டறிந்த உடன்தொடர்புக்குள்ள வேறுபாட்டின் சிறப்பையும் திருத்தமாகக் கண்டறிய உதவுகிறது. இரண்டு z மதிப்புகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் தரப்பிழை

$$s_{Dz'} = \sqrt{\frac{1}{N_1 - 3} + \frac{1}{N_2 - 3}} \qquad (9.30)$$

என்பதனுல் பெறப்படும். N_1 என்பது முதல் மாதிரியின் இணை மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை; N_2 என்பது இரண்டாம் மாதிரியின் இணைமதிப்புகளின் எண்ணிக்கை.

வாணிகச் சுழற்சிகளில் ஏற்படும் விலைமாற்றங்களின் காலம் பற்றிய கண்டறிந்த குறிப்புகளுக்கு இச் சோதனையைப் பயன்படுத்தி விளக்குவோம். 1890—1899 காலகட்டத்தின் பிற்பகுதி, இருபதாம் நூற்றுண்டின் முற்பகுதி ஆகிய இரு அடுத்தடுத்த வாணிகப் பின்னடைவு காலங்களில் விலை குறைவுக்காலம்பற்றிய குறிப்புகளை 111 பண்டங்களுக்குத் தொகுத்து வைத்திருக்கிறோம். இந்தப் பின்னடைவு காலங்களில் பொருள் விலை மாற்றங்களின் காலத் தொடருக்கு உறவு 0.22 என்ற உடன்தொடர்புக் கெழுவால் குறிக்கப்படுகிறது. இதேபோல் 1920-ல் அடுத்தடுத்த காலங்களில் 121 பொருள்களின் விலைக்கான உடன்தொடர்பு அளவையின் மதிப்பு 0.36. எனவே, முந்திய காலங்களைவிடப் பிந்திய காலங்களில் பொதுவான வடிவ அமைப்புக்கு நெருக்கத்தைக் காணலாம். இந்த இரு முறைகளுக்குமுள்ள வேறுபாட்டின் சிறப்பை அறிய வேண்டுமானுல், இரு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியினின்று பிறந்தன எனக் கொண்டு, அதனுல் அவற்றின் உண்மைக் கெழுக்களுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு 0 என எடுகோளை மேற்கொள்கிறோம். இரு மாதிரிகளுக்கும்

$$r_1 = +\ 0.22;\ z_1' = +\ 0.223:\ \frac{1}{N_1 - 3} = \frac{1}{108} = 0.0093$$

$$r_2 = +0.36;\ z_2' = +0.377;\ \frac{1}{N_2 - 3} = \frac{1}{118} = 0.0085$$

இந்த இரு வேறுபாடுகளுக்குமுள்ள சோதனைக்குள்ளாகும் வேறுபாடு

$$D_{z'} = 0.377 - 0.223 = 0.154.$$

இந்த வேறுபாட்டின தரப்பிழை,

$$s_{D_{z'}} = \sqrt{0.0093 + 0.0085} = 0.133$$

$D_{z'}$ என்பது சுழியிலிருந்து சிறப்பாக வேறுபடுகிறதா என அறிய விரும்புகிறோம்.

ஆகையால்,

$$T = \frac{D_{z'} - 0}{s_{D_{z'}}} = \frac{0.154 - 0}{0.133} = 1.16$$

என கணிக்கிறோம். 1.16 என்பதை இயல்நிலை விலக்கமாகக் கொண்டு, வேறுபாடு சிறப்பானதன்று என்று முடிவு கட்டுகிறோம். $D_{z'}$ எடுகோள் மதிப்பான சுழியிலிருந்து ஒரு தரவிலக்க தூரத்திற்கும் சற்றே அதிக தொலைவில் இருக்கிறது. இந்த முடிவுகள், எடுகோளான இரு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியினின்று பிறந்தன என்பதோடு முரணடையவில்லை. 1920-ஐ யொட்டிய காலத்தில், அதற்கு முந்திய காலகட்டத்தைவிட, அடுத்தடுத்த சுழற்சிகளில் விலை இயக்கங்களின் உறவின் அளவு நெருக்கமாக இருந்தது என்பதற்குத் திட்டமான சான்று இல்லை.[19]

இதே சோதனை பயனுகக்கூடிய மற்றொரு வகை ஒப்புமையில் பொருளாதாரச் சிறப்பு உள்ளது. கமர்ஷியல் பாங்குகள் ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்குகள் ஆகியவற்றின் தள்ளுபடிவீதத் தொடர்புபற்றிய குறிப்புகளை முன்னர்க் கண்டோம். விளக்கத்திற்கெடுத்துக் கொண்ட மாதிரி, 1920–32 காலகட்டத்தில் 1,800 குறிப்புகள் அடங்கிய தொன்றாகும். இந்த மாதிரிக்கு $r = +0.837$. மற்றுமொரு மாதிரியில் 1922--1949 ஆண்டுகளுக்குள் எடுக்கப்பட்ட 735 விவரங்கள் இருந்தன. இதற்கு $r = 0.936$. ஓரளவுக்கு ஒன்றோடொன்று மயங்கினாலும் இரண்டாவது மாதிரியின் பெரும்பாகம் பிற்காலத்தியது. முடிவுகளின் ஒப்புமையின்மூலம் கமர்ஷியல் பாங்கு வீதங்கள், முற்காலத்தைவிடப் பிற்காலத்தில் ஃபெடரல் ரிசர்வ் பாங்கு வீதங்களை யொட்டியே அமைகின்றன. எனினும், மேலே கண்ட செயல்முறைக்கு,

[19] வெவ்வேறு கால கட்டங்களிலிருந்து பெறப்படும் மாதிரிகளில், புள்ளியியல் தொகுப்பு முறை ஆய்வு செய்கையில் காலம் என்ற காரணக் கூறினால் இருள்படிகிறது. குறிப்பிடப்பட்ட கால கட்டங்களில் ஆய்வுக்குரிய அடிப்படைச் சூழ்நிலைகளில் மாற்றம் நிகழ்ந்துவிடவில்லை என்று குறித்துக்காட்டும் சான்றுகளின் ஆதாரங்களின்பேரிலேயே தொகுப்பு முறை ஆய்வு செய்யப்படவேண்டும். ஆனால், இந்த எச்சரிக்கை மேற்கூறிய செயல்முறைக்கு வேண்டியதில்லை.

இந்த எச்சரிக்கை அவசியம் இல்லை என்று தெரியவரும். [ஒப்புமை நிறைவுடையது (Perfect) அன்று: ஏனெனில், இவை ஒன்றோடொன்று மயங்குகின்றன. இதனால், இரண்டு மாதிரிகளின் முடிவுகளும் பொருந்தி வரலாம். மேலும், இந்த விவரங்களில் சில நுட்ப வேறுபாடுகளும் (technical differences) உள்ளன. எனினும், இதற்காக ஒப்புமையை நாம் கைவிடவேண்டியதில்லை; எச்சரிக்கையோடு இருந்தால் போதும்.]

r மதிப்புகளை z' மதிப்புகளாக உருமாற்றி வேறுபாட்டை அளந்தால் $D_{z'} = 0.49$ எனக் கிடைக்கும். $D_{z'}$ என்பதன் தரப்பிழை (9.30) வாய்பாட்டிலிருந்து 0.044 எனத் தெரிகிறது. எனவே, தரவிலக்க அலகுகளால் வரையறை செய்யப்பட்ட வேறுபாடாகிய இயல்நிலை விலக்கமானது.

$$T = \frac{0.49 - 0}{0.044} = 11.1$$

எனக் கிடைக்கும்.

ஒன்றோடொன்று மயங்கினாலுங்கூட வேறுபாடு சிறப்பாகத் தெரிகிறது. பிற்காலத்தில் முற்காலத்தைவிட தள்ளுபடி வீதங்களிரண்டிலுமுள்ள வேறுபாடுகள் அதிகத் தொடர்புடையன என்பது தெரியவருகிறது. எனினும், விவரங்களிலுள்ள வேறுபாடுகளைக் கருதி இந்த முடிவை எச்சரிக்கையோடு ஏற்கிறோம். என்றாலும், இம் முடிவுகள் சுட்டும் அடிப்படைக் கருத்துகள் மெய்யாகவே இருக்கவேண்டும்.

இறுதியாக, உருமாற்றங்களைப் பயன்படுத்தும்போது, இரண்டு வேறுபட்ட மாதிரிகளின் உடன்தொடர்பு அளவைகளை ஒன்றாகச் சேர்க்கலாம். ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளின் இரு r மதிப்புகள் இருந்தால், இரண்டின் நிறையிட்ட சராசரி மதிப்பு அவற்றின் தனி r மதிப்புகளைவிட உண்மையான உடன்தொடர்புக்கு ஏற்ற மதிப்பீடாக அமையும். சராசரிப்படுத்துவதற்காக rஐ z'ஆக உருமாற்றி, ஒவ்வொரு z'ஐயும் அதற்குத் தொடர்புள்ள $N—3$ ஆல் நிறையிட்டு, சராசரிப்படுத்தவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, வாணிகச் சுழற்சியில் இரு காலகட்டங்களில் ஏற்படும் விலை மாற்றங்களுக்குக் கண்ட இரண்டு கெழுக்களையும் இணைக்கலாம். ஏனெனில், இவை இரண்டும் சிறப்பாக வேறுபடவில்லை எனச் சோதனைமூலம் தெரிந்தது. இங்கே

$$\text{சராசரி } \bar{z}' = \frac{z'_1(N_1 - 3) + z'_2(N_2 - 3)}{(N_1 - 3) + (N_2 - 3)} \quad (9.31)$$

$$= \frac{(+0.223 \times 108) + (+0.377 \times 118)}{226}$$

$$= +0.303$$

z'ன் நிறையிட்ட சராசரியின் தரப்பிழை

$$s_{z'} = \frac{1}{\sqrt{(N_1 - 3) + (N_2 - 3)}} \tag{9.32}$$

என்பதைக் கவனிக்கவும். இந்த நிறையிட்ட z'-ஐ மீண்டும் அதற்கு இயைந்த r-க்கு மாற்ற விரும்பலாம். பிற்சேர்க்கைப் பட்டியல் V-லிருந்து $r = 0.29$ என்ற மதிப்பு கிடைக்கிறது. இதனை வாணிகப் பின்னடைவுக் காலத்தில் அடுத்தடுத்த கால கட்டங்களில் விலைக் குறைவுகளின் உடன்தொடர்புக்கு ஏற்ற மதிப்பீடாகக் கொள்ள லாம்.

மாறிகளின் தொடர்புக்கெழுவின் மாதிரிப் பிழைகள்

சில சந்தர்ப்பங்களில் உடன்தொடர்புக்கெழுவைவிட மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு அதிகப் பொருளுடையதாக இருக்கிறது. இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரி களுக்கு, மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுவான b_{yx} என்பதன் தரப் பிழையை

$$s_{b_{yx}} = \frac{s_{y \cdot x}}{s_x \sqrt{N-1}} \tag{9.33}$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து மதிப்பீடு செய்யலாம். இதில் $s_{y \cdot x}$ என் பது y மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையாகும்.[20] பெரிய மாதிரிகளிலிருந்து அளவைகள் எடுக்கப்பட்டிருந்தால், இந்த அளவையே மதிப்பீட்டுக் கணக்குகளிலும் சிறப்புகாண் சோதனைகளிலும், வழக்கமான முறை யில் பயன்படுத்தலாம். சிறிய மாதிரிகளுக்கு 'ஸ்டூடன்ட்' பரவலைப் பயன்படுத்தி எடுகோள் மதிப்பான β-விலிருந்து, மாதிரி யின் மதிப்பான b-ன் விலக்கத்தின் சிறப்பைச் சோதனை செய்ய லாம் என்பதை ஃபிஷர் நிறுவியுள்ளார். கண்டறிந்த மதிப்பு, எடுகோள் மதிப்பு ஆகியவற்றின் வேறுபாடு b-ன் மதிப்பிட்ட தரப் பிழைக்குள்ள விகிதமான $\frac{b - \beta}{s_b}$ என்பது, t-பரவலாக அமைந்

[20] $$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\Sigma(y - y_c)^2}{N-2}}$$

இதில் y என்பது சார்ந்த மாறியின் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பையும், y_c என்பது மாறி களின் தொடர்புச் சமன்பாட்டில் அதற்கிசைந்து பெற்ற மதிப்பையும் குறிக் கின்றன. இதற்காக $s_{y \cdot x}$-ஐக் கணிக்கையில் N-ன் மதிப்பை மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையால் குறைக்கவேண்டும். y_cஐக் கணிக்கையில் வரையற்ற பாகைகள் இரண்டு பயன்பட்டுவிடுகின்றன.

துள்ளது. இந்த வடிவத்தினை வசதிக்காகப் பின்வருமாறு மாற்றிக் கொள்ளலாம்.

$$t = \frac{b_{yx} - \beta_{yx}}{s_{b_{yx}}} = \frac{b_{yx} - \beta_{yx}}{s_{y \cdot x} / (s_x \sqrt{N-1})} = \frac{(b_{yx} - \beta_{yx})(s_x \sqrt{N-1})}{s_{y \cdot x}}$$

$$t = \frac{(b_{yx} - \beta_{yx})\sqrt{\Sigma x^2}}{s_{y \cdot x}} \qquad (9.34)$$

(எடுகோளில் சோதனை செய்வதற்காகத் தரப்பட்டவையே தவிர) முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகள் ஏதும் t-ன் கணிப்பில் பயனுவதில்லை. மாதிரி மதிப்புகள்மட்டுமே பயன்படுகின்றன.[21]

b-ன் சிறப்பினைச் சோதனை செய்வதற்கு, பெரிய மாதிரிகளில் கையாளப்படும் செயல்முறைக்கு எடுத்துக்காட்டாக 10ஆவது அதிகாரத்தில் தரப்பட்டதும், 10.3 படத்தில் குறிக்கப்பட்டதுமான நியூயார்க் நகர வெப்பநிலைப் போக்கின் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்ளுவோம். உண்மையில் அத்தகைய போக்கு நேர்கோடு மாறிகளிடையேயுள்ள தொடர்பின் கோவையே. இது வெப்பநிலை சார்ந்த மாறியாகவும் காலம் சார்பிலா மாறியாகவும் இருக்கிறது. 1871-லிருந்து 1949 வரையயான காலத்தில் மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடு $Y = 52.482 + 0.0346X$; இதில் X என்பது 1910-ஐ மூலமாகக் கொண்டு அளக்கப்பட்ட ஆண்டுகள்; Y என்பது பாரன்ஹீட் டிகிரிகளில் அளக்கப்பட்டது. ஆண்டின் சராசரி வெப்பநிலை அதிகரிப்பாக, 0.0346 டிகிரிகள் மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுவாகத் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இந்தக் கெழு, சந்தர்ப்பத்தினால் கிடைத்ததா அன்றி நியூயார்க் நகரத்தில் வெப்பநிலை அதிகரிப்பை நெடுங்காலப் போக்காக உணர்த்துவதா? (9.33) வாய்பாட்டிலிருந்து $s_b = 0.006$ எனப் பெறுகிறோம். $\beta = 0$ என்ற சூன்ய எடுகோளைச் சோதனை செய்யவேண்டியிருக்கிறது. வழக்கம்போல இயல்நிலை விலக்கமான T-ஐ

$$T = \frac{b - \beta}{s_b} = \frac{0.0346 - 0}{0.006} = 5.77$$

எனப் பெறுகிறோம். எனவே, சூன்ய எடுகோளைப் புறக்கணிக்க வேண்டும். 78 ஆண்டுகளான இந்தக் காலத்தில், நியூயார்க் நகரத்தில் சராசரி ஆண்டு வெப்பநிலையில் சிறப்பான அதிகரிப்பு ஏற்பட்

[21] (9.34) சமன்பாட்டில் படிமூலக் குறிக்குளுள்ள கோவையில், x என்பது x'-களின் சராசரியிலிருந்து விலக்கத்தைக் குறிப்பது. முந்திய சமன்பாட்டிலிருந்து மாறும்போது, $s_x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N-1}}$; எனவே, $s_x\sqrt{N-1}$ என்பது $\sqrt{\Sigma x^2}$-க்குச் சமமாக இருப்பதைக் கவனிக்கவும். மேற்கண்ட சமன்பாடுகளில் $s_{y \cdot x}$ என்ற அளவை முந்திய எடுத்துக்காட்டில் குறிப்பிட்டபடி பெறப்பட்டது.

டிருக்கிறது என்பதைச் சான்று சுட்டுகிறது. (காலத்தினுல் நிரல் செய்யப்பட்ட கண்டறிந்த குறிப்புகளின் தொடருக்கு இத்தகைய ஆய்வினைக் கையாள்வது கேள்விக்கு இடம் வரைகிறது. ஏனெனில், அடுத்தடுத்த கண்டறிந்த குறிப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று விடுபட்டு நிற்பதில்லை. ஆனுல், பருவநிலைபற்றிய புள்ளிவிவரங்களில் நெடுங்காலப் போக்கினைத் தவிர வேறு தொடர்பு கிடையாது என்று புனைந்துகொள்வதில் தவறில்லை.)

மதிப்பிடத் தொடர்பின் கெழு

மாதிரிகள் பிரித்தெடுக்கப்படுகின்ற முழுமைத் தொகுதிகள் இயல்நிலையாக இல்லாததனுல் விளைகின்ற குறைபாடுகளைச் சில கணக்குகளில் முழுமைத் தொகுதி அளவை பயன்படா முறைகளைப் (nonparametric methods) பயன்படுத்தித் தீர்க்கலாம். மாதிரிகள் பிரித்தெடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளைப்பற்றி எந்தவிதப் புனைவும் செய்துகொள்ளாததே இம் முறைகளின் அடிப் படை. சில சமயங்களில் அத்தகைய புனைவிலிருந்து விடுபடும்போது —பெரும்பாலான புள்ளிவிவர வேலைகளின் சிறப்புக் குறிக்கோளான —உய்த்துணர்வைத் திருத்தமாகச் செய்யமுடியும். உடன்தொடர்பு ஆராய்ச்சிகளில் முழுமைத் தொகுதி அளவைகளைப்பற்றிப் புனைவுகள் மேற்கொள்வதைத் தவிர்ப்பதற்கு, கண்டறிந்த குறிப்புகளை நிரல் படுத்தி, மதிப்பிடங்களின் (ranks) அடிப்படையில் கணிப்புகளைச் செய்யலாம். மேலும், திட்டவட்டமாக அளக்கமுடியாத பண்புகளைக் கூட மதிப்பிடம்தந்து வரிசைப்படுத்த முடியாததால், இந்த வகை யான வரிசைப்படுத்திய ஏற்பாட்டால், மனிதர்களையும் தன்மைகளை யும் அளவின விவரங்களால் கண்டறிய முடியும். மதிப்பிடத்தொடர்புக் கெழுக்கள் இரண்டுபற்றி இங்கே சுருக்கமாக விவாதிப்போம்.

ஸ்பியர்மென் கெழு (Spearman's Coefficient)

மதிப்பிடத் தொடர்பு முறைகளைக் கையாள்வதற்கு எடுத்துக் காட்டாக 9-12 பட்டியலில் விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. 1,000,000 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மக்கள் தொகையுடைய 10 அமெரிக்க நகரங்களில் 1950-ல் வரிபோக எஞ்சிய குடும்பச் சராசரி வருமான மும், குடும்ப நுகர்வுக்கான சராசரிச் செலவும் தரப்பட்டுள்ளன. இந்த நகரங்கள் சராசரி குடும்ப வருமானத்திற்கேற்ப, அதிக வரு மானத்திலிருந்து குறைந்த வருமானம்வரை மதிப்பிடம் தந்து வரிசை யாக அமைக்கப்படுகின்றன. 9-12 பட்டியலில் 4, 5 பத்திகளில் வரு மானமும் நுகர்வுச் செலவும்பற்றிய பணமதிப்புகளை மதிப்பிட அளவைகளால் மாற்றி அமைத்துள்ளோம்.

இந்த இரண்டு வரிசைகளிலுமுள்ள ஒற்றுமையின் அளவே மதிப்பிடங்களின் தொடர்புக்கு அளவாகும். உடன்தொடர்புக்கு

பட்டியல் 9-12

ஸ்பியர்மென் மதிப்பிட உடன்தொடர்புக் கெழுவினைக் கணிப்பதற்கு எடுத்துக்காட்டு

1950-ல், வரிபோக எஞ்சிய குடும்ப வருமானமும் நடப்பு நுகர்வுக்கான குடும்பச் செலவுகளும். 1,000,000-ம் அதற்கு மேற்பட்டும் மக்கள்தொகையுடைய பத்து நகர்களுக்குச் சராசரிகள்.*

நகர்	வரிபோக சராசரிப் பண வருமானம்	நுகர்வுக்கான சராசரிச் செலவு	மதிப்பிட வரிசை: சராசரிக் குடும்ப வருமானத்துக்கு	மதிப்பிட வரிசை: சராசரி நுகர்வுச் செலவுக்கு	(4)—(5) வேறுபாடு d	d^2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
சிகாகோ, இல்லி	$5,080	$4,905	1	2	—1	1
கிளிவ்லேண்ட், ஒஹியோ.	4,876	4,671	2	3	—1	1
நியூயார்க், N. Y.	4,852	4,932	3	1	+2	4
லாஸ் ஏன்ஜல்ஸ், காலிபோ.	4,745	4,661	4	4	0	[illegible]
சான் பிரான்சிஸ்கோ-ஓக்லேண்ட், காலிபோ.	4,584	4,477	5	6	—1	1
பிட்ஸ்பர்க்.	4,583	4,506	6	5	+1	1
செயின்ட் லூயிஸ், மோ	4,546	4,251	7	9	—2	4
பிலடெல்பியா-கேம்டன்.	4,506	4,384	8	7	+1	1
போஸ்டன், மெஸ்.	4,200	4,300	9	8	+1	1
பால்டிமோர், மெட்.	3,983	3,919	10	10	0	[illegible]
கூடுதல்						14

* ஆதாரம்: Bulletin 1097 (revised), U. S. Bureau of Labor Statistics, ஜூன் 1953.

ஒரு திருத்தமான அளவையாக

$$r_r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{N^3 - N} \qquad (9.35)$$

என்ற ஸ்பியர்மென் கெழு அமையும். இதில் N என்பது எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட நகரங்களின் எண்ணிக்கையாகவும், d என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட நகரத்துக்கு (4), (5) பத்திகளில் காணப்படுகின்ற மதிப்பிடங்களின் வேறுபாடாகவும் இருக்கின்றன.[22]

[22] x, y என்பதை, அளவைகளுக்குப் பதிலாக மதிப்பிடங்களைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தி, பெருக்க மொமென்டு வாய்பாட்டிலிருந்தே இவ் வாய்பாட்டையும் பெற முடியும். இந்தக் கணிப்பில் முதல் N இயற்கை எண்களின் சராசரியிலிருந்து, அவற்றின் விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதல், $\frac{N^3 - N}{12}$ என்ற உண்மை பயன்படுத்தப்படும்.

Σd^2 என்ற அடிப்படை அளவை, 9-12 பட்டியலிலிருந்து பெறப்படுகிறது. இந்த அளவையும், நகர்களின் எண்ணிக்கையான N-ம் தரப்பட்டால்,

$$r_r = 1 - \frac{84}{10^3 - 10}$$
$$= +\ 0.9152$$

எனக் கிடைக்கும். (9.35) எனும் வாய்பாட்டிலிருந்து 2 மாறிகளின் அடிப்படையில் செய்யப்படுகின்ற நகர வரிசைகள் முற்றிலும் ஒன்றியதாக இருந்தால் r_r என்பதின் மதிப்பு $+1$ ஆக இருக்கும் என்பது தெளிவு; ஏனெனில், d-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பும் 0 ஆக இருக்கும். அதனால் Σd^2 மதிப்பும் 0 ஆக இருக்கும். வரிசைகள் முழுவதும் எதிர்மறையாக இருக்குமானல் r_r என்பது -1 ஆக இருக்கும். எனவே, r_r என்பதின் மதிப்பு $+1$-க்கும் -1-க்கும் இடையில் விழும். இரண்டு வரிசைகளுக்கும் ஒருவிதத் தொடர்பும் இல்லாதபோது r_r 0-ஆக இருக்கும்.

கெண்டால் கெழு (Kendall's Coefficient)

r_r என்பதன் அடிப்படையில் உய்த்துணர்வுகள் செய்வதற்கும் சிறப்புகாண் சோதனைகள் நடத்துவதற்கும் சில இடையூறுகள் ஏற்படுகின்றன; ஏனெனில், N-ன் சில மதிப்புகளுக்கு அதன் மாதிரிப் பரவல் தெரிவதில்லை. இந்தக் காரணத்தினுல் மாற்று அளவையாக எம். ஜி. கெண்டால் (M. G. Kendall) என்பவர் நிறுவிய மதிப்பிடக் கெழுபற்றியும் காண்போம். இந்த அளவையான τ (tau)வின் மாதிரிப் பரவல் நமக்குத் தெரிந்திருப்பதால், r_r-ஐ விட உய்த்துணர்வுடன் செய்வதில் மிகுந்த பயனுடையதாக இருக்கிறது.

டோ என்ற இந்த அளவையைக் கணிப்பதும், பயன்படுத்துவதும்பற்றிய எடுத்துக்காட்டாக மதிப்பிடப்பட்ட குடும்ப வருமானங்களும், உற்பத்தித் தொழில்களில் சராசரி ஊதியங்களும்பற்றி, 12 அமெரிக்க நகரங்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரிக்கு பீரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ் (Bureau of Labor Statistics) வெளியிட்ட விவரங்களைப் பயன்படுத்திக்கொள்ளுவோம். இவை 9-13 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. இந்தப் பட்டியலில் (4), (5) பத்திகளில் தரப்பட்டுள்ள மதிப்பிடங்களையொட்டி கணிப்புகள் செய்யப்படுகின்றன. வசதிக்காக இந்த மதிப்பிடங்களைக் கீழே கண்டதுபோல் வரிசைப் படுத்தி எடுத்துக்கொள்ளுவோம். முதல் வரிசையில் (4)ஆம் பத்தியின் மதிப்பிடங்களும் 2ஆம் வரிசையில் (5)ஆம் பத்தியின் மதிப்பிடங்களும் தரப்பட்டுள்ளன.

குடும்ப வரவு செலவுத்திட்டம்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
வார ஊதியங்கள்	3	4	1	5	2	11	9	6	7	8	10	12

பட்டியல் 9-13

நான்கு பேர்களுக்கு மதிப்பிடப்பட்ட குடும்ப வரவு செலவுத் திட்டங்களும், 1951-ல் பன்னிரண்டு நகர்களில் ஒவ்வொன்றிலும் உற்பத்தித் தொழிற்சாலைத் தொழிலாளர்களின் சராசரி வார ஊதியங்களும்.

நகர் (1)	மதிப்பிடப் பட்ட குடும்ப வரவு செலவுத் திட்டம்* (2)	உற்பத்தித் தொழிலாளர் சராசரி வார ஊதியங் கள்† (3)	மதிப்பிட வரிசை: குடும்ப வரவு செலவுத் திட்டத்துக்கு (4)	மதிப்பிட வரிசை: உற்பத்தித் தொழிலாளர் சராசரி வார ஊதியங்களுக்கு (5)
நியூ ஆர்லியன்ஸ், லா.	$3,812	$53.20	1	3
மொபைல், அல.	3,969	54.95	2	4
ஸ்காரன்டன், பா.	4,002	48.27	3	1
சாவன்னு, கா.	4,067	55.59	4	5
மான்செஸ்டர், என். எச்.	4,090	51.84	5	2
பஃபோலோ, என். ஒய்.	4,127	73.76	6	11
போர்ட்லண்ட், ஓர்.	4,153	70.89	7	9
மெம்பிஸ், டென்.	4,190	58.22	8	6
டென்வர், கோல.	4,199	63.08	9	7
பால்டிமோர், மெட்.	4,217	64.35	10	8
சிடில், வாஷ்.	4,280	72.60	11	10
மில்வாகி, விஸ்.	4,387	74.79	12	12

* பீரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டேடிஸ்டிக்ஸ் (Bureau of Labor Statistics) தயாரித்த இந்தக் குடும்ப வரவு செலவுத் திட்டம், சாதாரண வாழ்க்கை நடத்த 4 பேர் கொண்ட (கணவன், மனைவி, இரு குழந்தைகள்) குடும்பத்துக்கு அக்டோபர் 1951-ல் மதிப்பீடு செய்யப்பட்டது. ஒரு குடும்பம் உண்மையிலேயே எவ்வளவு செலவழிக்கிறது என்பதை இது காட்டாது.

† ஆதாரம்: 'Employment and Earnings', U. S. Bureau of Labor Statistics, May, 1954.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்பிட வரிசைகளுக்கு இடையேயுள்ள பொருத்தத்தின் அளவையாக, கெண்டால், S என்ற அளவையைப் (S என்பது score—எண்ணிக்கை அளவு என்பதனைச் சுட்டும்) பயன் படுத்துகிருர். S என்பதில் இரண்டு பகுதிகள் உண்டு. முதல் பகுதியான P ஒரு நேர் அளவாகும்; இது இரண்டாவது மதிப்பிட வரிசையில் (அதாவது, மேலேயுள்ள இரண்டாவது வரிசை) முதல் வரிசைக்கு இசைந்து 'நேராக' வரிசைப்படுத்தப்பட்டனவற்ருல் கிடைப்பது; மதிப்பிடத்தில் இணக்கமோ அல்லது பொருத்தமோ இருப்பதனுல் மதிப்பிடங்கள் ஒரேவகையின என்று பொருளாகா. மேலே

கொடுக்கப்பட்ட முதல் மதிப்பிட வரிசை, குடும்பச் செலவுக்கேற்ப வரிசைப்படுத்தப்பட்டது. முதல் வகையில் இடப்புறமிருந்து வலப் புறம் நோக்கித் தரப்பட்டுள்ள வரிசைகளூடே நகர்ந்தால் சராசரிக் குடும்பச் செலவுகள் அதிகமாகும். எனவே, இரண்டாவது வரிசையில் கிடைக்கின்ற இரு நகரங்களின் வரிசையில், முதல் வரிசைக்கு இணங்கி வருவதாளுல் இடப்புறமுள்ள நகரத்தின் சராசரி வார வருமானத்தைவிட வலப்புறமுள்ள நகரத்தின் வருமானம் அதிகமாக இருக்கும் என்பது பொருள். (மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரண்டாவது வரிசையில் 'வலப்புறம்' 'இடப்புறம்' என்று குறிப்பது குறிப்புகளின் ஒப்பீட்டு இடத்தைக் குறித்ததே.) முதல் குறிப்பான இரண்டாவது வரிசையிலுள்ள '3' நியூ ஆர்லியன்ஸ் நகரத்தைக் குறிக்கிறது. இரண்டாவது வரிசையில் குறிக்கப்பட்டவைகளில் நியூ ஆர்லியன்ஸுக்கு வலப்புறமுள்ள நகரங்களில் ஒன்பது, நியூ ஆர்லியன்ஸ் நகர சராசரி வார ஊதியத்திலும் அதிகமானவை. அதன்மூலம் P-ன் மதிப்புக்கு ஒன்பது என்ற பகுதி கிடைக்கிறது. இதுபோன்றே '4' எனும் குறிப்புக்கு மொபைல் என்ற நகரத்திற்கு வலப்புறம் மொபைலின் சராசரி வார ஊதியத்தினும் அதிகமாக 8 நகரங்கள் உள்ளன. '1' என்ற குறிப்பான ஸ்காரன்டன் என்னும் நகருக்கு அதனினும் மிஞ்சிய 9 நகரங்கள் வலப்புறம் உள்ளன. '5' என்ற குறிப்பான சாவன்ஞ என்ற நகருக்கு வலப்புறமாக அதனினும் மேம்பட்டு 7 நகரங்கள் உள்ளன. இதுபோன்றே பிறவும். (குறிப்பிடப்பட்ட நகருக்கு இந்த எண்களைக் கணிப்பதற்கு ஆய்வாளர் வார ஊதியம்பற்றிய விவரங்களை மீண்டும் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ளவேண்டியதில்லை. இரண்டாவது வரிசையில் கொடுக்கப்பட்ட நகரின் மதிப்பிட வரிசைக்கு மிஞ்சிய குறிப்புகளின் எண்ணிக்கையைமட்டுமே கணக்கிடுகிருர்.) இதுபோலவே மேலுள்ள இரண்டாம் வரிசையிலிருந்து (9.13 பட்டியலில் ஐந்தாவது பத்தியிலிருந்து) கிடைக்கின்ற இத்தகைய நேர் அளவைகளின் கூடுதலே P ஆகும். விளக்கமாகக் கூறவேண்டுமாளுல்,

$$P = +9+8+9+7+7+1+2+4+3+2+1+0 = +53$$

என்று கிடைக்கிறது. $+53$ என்ற இந்தக் கூட்டல் தொகை இரண்டு மதிப்பிட வரிசைகளுக்கும் இடையேயுள்ள இணக்கம் அல்லது பொருத்தம் குறித்த அளவையாகக் கருதப்படலாம்.

S என்பதன் இரண்டாவது பகுதி Q என்ற எதிர் அளவாகும். இஃது இரண்டாவது மதிப்பிட வரிசையிலுள்ள குறிப்புகளில் முதல் வரிசையிலுள்ள இயற்கை எண்களுக்கு எதிர்மாருன (inverse) குறிப்புகளின் எண்ணிக்கையிலிருந்து தரப்பட்டது. நியூ ஆர்லியன்ஸ்

என்பதன் குறிப்பான '3'-லிருந்து துவங்கி அதன் வலப்புறத்தில் '1', '2' (இவை ஸ்காரன்டன், மான்செஸ்டர் ஆகியவற்றைக் குறிப்பன) ஆகிய இரண்டு குறைந்த மதிப்பிடங்களைக் காண்கிறோம். இந்தக் குறைந்த பொருள் யாதெனில், நியூ ஆர்லியன்ஸைவிட ஸ்காரன்டன், மான்செஸ்டர் ஆகியவற்றில் மதிப்பிடப்பட்ட குடும்பச் செலவுகள் அதிகமாக இருப்பினும் சராசரி வார ஊதியங்கள் குறைவானது என்பதே. அதாவது, இது செலவுக்கும் வார ஊதிய வரிசைக்குமுள்ள எதிர்மறையான தொடர்பாகும். மொத்த அளவுக்கு, இதன் பயனுகை —2 என்ற அளவு கிடைக்கிறது. இது போலவே மொபைல் என்ற குறிப்பான '4'-க்கு வலப்புறத்தே குறைந்த மதிப்பிடங்களையுடைய 2 நகரங்கள் உள்ளன; ஸ்காரன்டன் என்ற குறிப்பான '1'-க்கு வலப்புறத்தே ஏதுமில்லை; சாவன்னு என்ற குறிப்பான '5'-க்கு வலப்புறத்தே 1-உள்ளது. இது போன்றே Q உருவாகிறது.

$$Q = -2 -2 -0 -1 -0 -5 -3 -0 -0 -0 -0 -0 = -13$$

தேவைப்படுகின்ற மொத்தக் கூடுதலானது P என்ற மதிப்பிடப் பொருத்தத்தின் நேர் இணக்கத்தையும், Q என்ற மதிப்பிடப் பொருத்தத்தின் முரண்பாட்டையும் இணைத்தது. தற்போதைய எடுத்துக்காட்டில்,

$$S = P + Q = +53 + (-13) = +40$$

இரண்டு வரிசைகளுக்கும் இடையேயுள்ள உறவுகளின் உருவிலா (abstract) அளவை,

$$\tau = \frac{S}{\frac{1}{2}N(N-1)} \tag{9.36}$$

$$\tau = \frac{+40}{\frac{1}{2}12(12-1)} = \frac{+40}{66} = 0.606$$

இரு வரிசைகளும் முற்றிலும் ஒத்திருக்கும்போது கெண்டால் கெழு $+1$ ஆகவும், முற்றிலும் முரண்பட்டிருக்கும்போது -1 ஆகவும் இருக்கும்.[23] இரு மதிப்பிட வரிசைகளுக்கும் உறவில்லாத போது, கெழு சுழியாக இருக்கும்.

[23] S-ன் தனித்த (absolute) உச்ச மதிப்பு — மதிப்பிடங்கள் முற்றிலும் ஒன்றும்போதோ, முரண்படும்போதோ இது கிடைக்கும்—$\frac{1}{2}N(N-1)$; இது டோவின் வாய்பாட்டின் விகுதி. P, Q ஆகியவற்றின் தனித்த—குறிகளைக் கருதாத —கூடுதல் தொகை எப்போதுமே $\frac{1}{2}N(N-1)$-க்குச் சமமாக இருக்கும் என்ற உண்மை கணிப்பைச் சரிபார்க்க உதவும்.

மதிப்பிடக் கெழுவின் சிறப்புகாண் சோதனைகள்

மதிப்பிடத் தொடர்புக் கெழுவினைப் பயன்படுத்தி உய்த்துணர்வு செய்வதனால் எழுகின்ற சிக்கல்கள்பற்றி முன்னர் சுருங்கக் கூறினோம். முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எந்தப் பண்புகளுக்கு இணை வரிசைகள் அமைக்கின்றோமோ, அவற்றுக்கு இடையேயுள்ள உடன் தொடர்பின் அளவினைச் சிறப்பாகச் சான்று காட்டும் வகையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கெழு அமைந்துள்ளதா என ஆராயும்போதே அத்தகைய சிக்கல்கள் எழுகின்றன.

ஸ்பியர்மென் கெழுவின் மாதிரிப் பிழைகள்

ρ_r என்பது சுழியாகவுள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித் தெடுக்கப்பட்ட பெரிய மாதிரிகளில் மதிப்பிடத் தொடர்புக் கெழுக்க ளான r_r மதிப்பு இயல்நிலையாகவோ,ஏறக்குறைய இயல்நிலையாகவோ பரவியிருக்கும்; அத்தகைய r_r பரவலின் தரவிலக்கம்,

$$s_{r_r} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \tag{9.37}$$

என்பதனால் பெறப்படுகிறது. N என்பது பெரிதாக, அதாவது 25 அல்லது அதற்கு மேற்பட்டு இருக்கும்போதும், இரண்டு மாறிகளுக்குமுள்ள மதிப்பிடங்களில் ஒத்தன (ties) இல்லாதபோதும், சூன்ய எடுகோளை ஆராய்வதற்கு இந்த வாய்பாட்டைப் பயன் படுத்தலாம்.

சிறிய மாதிரிகளுக்கு r_r-ன் பரவல் இயல்நிலையாக இருப்பதில்லை. கெண்டால் (து.நூ.ப. 78, I, 396-7; து.நூ.ப. 80, 142) N, 9-க்குக் குறைவாக இருக்கும்போது, ஸ்பியர்மென் கெழுவின் சிறப்பினைத் தீர்மானிப்பதற்குப் பட்டியல்கள் அமைத்துள்ளார். உடன்தொடர் பில்லாத முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்து எடுக்கப்படும் மாதிரி களின் எண்ணிக்கை, 9–லிருந்து 25-க்குள் இருக்கையில், r_r-ன் பரவல் தெரியவில்லை. அதனுடன், உடன்தொடர்புடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து (அதாவது $\rho_r \neq 0$) பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரி களின் r_r-ன் பரவல்களும் நமக்குத் தெரியாது. எனவே, ஸ்பியர்மென் கெழுவினைப் பயன்படுத்திச் செய்யப்படும் உய்த்துணர்வுகளில், தெளிவடையாத முக்கியப் பகுதிகளுமுள்ளன என்பதை அறியவும்.

கெண்டால் கெழுவின் மாதிரிப் பிழைகள்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வசதிகருதி τ-ன் சிறப்புகாண் சோதனைகள் அதற்கிசைந்த S-மதிப்பின் அடிப்படையிலே நிகழ்த்தப்படுகிறது. N, 10ஐவிடப் பெரிதாக இருக்கையில், இணை மதிப்பிட வரிசைகள்

தொடர்பில்லாத முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளுக்கு, S-ன் பரவலை இயல்நிலையாகக் கருதலாம். இத்தகைய பரவலின் மாறி, (இது, S-என்பதன் தரப்பிழையின் வர்க்கம்) N-ன் சார்பலனாக இருக்கும். இது,

$$s_{sc}^2 = \frac{1}{18}N(N-1)(2N+5) \tag{9.38}$$

என்பதால் கிடைக்கும்.[24] இந்த அளவையினைப் பயன்படுத்தி S-ன் சிறப்புகாண் சோதனை நடத்தும்போது தொடர்ச்சி வழுவாமல் இருக்க ஒரு திருத்தத்தை மேற்கொள்ள வேண்டும். இந்தத் திருத்தத்திற்கு, S என்பதின் மெய்யான பரவலுக்குத் தோராயமாக இயல்நிலைப் பரவலைப் பயன்படுத்தும்போது, உண்மையில் தொடர்ச்சியற்ற ஒரு பரவலுக்குப் (S தொடர்ச்சியிலா மாறி) பதிலாக, தொடர்ந்த இயல்நிலைப் பரவலை மாற்றாகப் பயன்படுத்துவது இன்றியமையாததாகும். இந்தத் தோராயத்தினால் விளைகின்ற பிழையினை, S-ன் மதிப்பு நேராக இருக்கும்போது அதன் கண்டறிந்த மதிப்பில் 1-ஐக் குறைத்தும், S எதிராக இருக்கும்போது S-ன் கண்டறிந்த மதிப்பில் 1 ஐக் கூட்டியும், குறைத்துக்கொள்ளலாம். (சிறப்புகாண் சோதனையில்மட்டுமே இந்தத் திருத்தத்தைக் கையாளவேண்டும். τ-ஐப் (tau) பெறப் பயன்படுத்தும் S பிழை திருத்தவேண்டாதது.)

9-13 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ள 12 நகரங்களின் மாதிரியின் τ என்பது $+0.606$-க்குச் சமமாக இருக்கிறது; $S + 40$-க்குச் சமம். (திருத்தப்பட்ட) S, $40 - 1$; அதாவது, 39-க்குச் சமம். N என்பது 12. (9.38) என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து S-ன் மாறுபாட்டை,

$$s_{sc}^2 = \frac{1}{18}(12 \times 11 \times 29) = 212.67$$

அல்லது,

$$s_{sc} = 14.60$$

என்பதிலிருந்து பெறுகிறோம். சூன்ய எடுகோளை ஆயும்போது தொடர்ச்சிக்காகப் பிழை திருத்தப்பட்ட S-ஐப் பயன்படுத்த வேண்டும். அப்போது, N-ன் மதிப்பு 10-லும் மேம்பட்ட மாதிரிகளுக்குப் பொதுவான சோதனை,

$$T = \frac{S\,(\text{திருத்தப்பட்டது}) - 0}{s_{sc}} = \frac{39 - 0}{14.60} = 2.67$$

[24] கெண்டால் (து.நா.ப.80), 5ஆம் அத்தியாயம் காண்க. (9.38) வாய்பாடு இரு மதிப்பீட வரிசைகளில் ஒத்த மதிப்புகள் இல்லாதபோதே பொருந்தும். ஒத்த மதிப்புகள் இருக்கும்போது வாய்பாட்டை எப்படி மாற்றி அமைப்பது என்பதுபற்றி கெண்டால் து.நா.ப. 80, அத்தியாயங்கள் 4, 5 பார்க்கவும்.

என்ற வடிவத்தில் இருக்கும். இங்கே S-ன் (திருத்தப்பட்டது) கண்டறிந்த மதிப்புகளை 0 என்ற சூன்ய மதிப்பின் விலக்கமாகக் கொண்டு, அதனை S-ன் தரப்பிழையால் வகுத்து Tஐக் கண்டு பிடிக்கிறோம். இயல்நிலை விலக்கமாக அமைகின்ற T, 2.67-க்குச் சம மாக இருக்கிறது. இத்தகைய பெரிய விலக்கம் அல்லது இதனினும் பெரியது முற்றிலும் வாய்ப்பினுல் நிகழ்வது, 100-ல் 1 தடவைக்கும் குறைவாகத் தோன்றுவதால் சூன்ய எடுகோள் தள்ளுபடி செய்யப் படுகிறது. 9-13 பட்டியல் சுட்டிக்காட்டுகின்ற சான்றின்படி நான்கு பேர் கொண்ட குடும்பத்தினை நடத்துவதற்கான செலவுகுறித்து மதிப்பிடப்பட்ட நகரங்களுக்கும், தயாரிப்பு வேலையில் கிடைக்கும் வார சராசரி ஊதியங்களைக் கொண்டு மதிப்பிடப்பட்ட நகரங்களின் வரிசைகளுக்கும், சிறப்பான உடன் தொடர்பு இருப்பது தெரிகிறது.

N என்பது 10 ஆகவும் அல்லது அதற்குக் குறைந்துமுள்ள மாதிரிகளிலிருந்து பெறப்படுகின்ற S-ன் பரவல் இயல்நிலையாக இருப்பதில்லை. அத்தகைய சமயங்களில் மேற்கூறிய முறையைப் பயன்படுத்தலாகாது. ஆனுல், N-ன் மதிப்பு 4-விலிருந்து 10 க்குள் இருக்கும்போது S-ன் பரவல்களை நிறுவியுள்ளார். அத்தகைய சிறிய மாதிரி முடிவுகளுக்குச் சிறப்புகாண் சோதனைகளைப் பயன் படுத்துவதற்கு உதவியாக ஒரு பட்டியலைத் தொகுத்துத் தயாரித் துள்ளார். (கெண்டால், பக்கம் 80, பிற்சேர்க்கைப் பட்டியல் 1-பார்க்க.) எனவே, S (அல்லது τ) அடிப்படையாகச் செய்யப்படுகின்ற சிறப்பு காண் சோதனைகளுக்கு N மதிப்புகளின் முழு வீச்சையும் பயன் படுத்தலாம். எனவே, உய்த்துணர்வுச் சிக்கல்கள் சம்பந்தப்பட்ட வரையில் ஸ்பியர்மென் மதிப்பிடத் தொடர்பு அளவையைவிட கெண் டால் அளவை மிகுந்த சிறப்புடையது.

முழுமைத் தொகுதி அல்லாத பிற அளவைகளோடு சேர்ந்து மதிப்பிடத் தொடர்புக் கெழுக்களும், பலவகையாகப் பயனுகின்றன. பொருளாதார, சமூகப் புள்ளி விவரங்களைக் கையாளும் சமயங்களில் முழுமைத் தொகுதி பரவல்களைப்பற்றிப் புனைவுகள் ஏதும் மேற் கொள்ளப்படாத காரணத்தால் இவை மிகுந்த சிறப்புற்று விளங்கு கின்றன. அத்தகைய முறைகளை நன்கு கையாள்வதற்கு ஏற்ற வாய்ப்புள்ள இடங்களில் ஒன்று—பொருளாதார ஆய்வுகளில் சிறப் பாகப் பயன்படுத்தப்படும் காலத் தொடர் வரிசையாம். பின்னுல், இப் பயன்கள் சிலவற்றைக் காண்போம்.

துணை நூல்கள்

Clark, C. E., 'An Introduction to Statistics,' Chap. 9.

Croxton, F. E. and Cowden, D. J., 'Applied General Statistics,' Chap. 22.

Deming, W. E., ' Statistical Adjustment of Data,' Chap. 4.

Dixon, W. J. and Massey, F. J. Jr., ' Introduction to Statistical Analysis, Chap. 11.

Ezekiel, M., ' Methods of Correlation Analysis, ' 2nd ed., Chaps. 3, 5, 7, 18.

Fisher, Sir Ronald (R. A.), ' Statistical Methods for Research Workers, ' 11th ed., Chap. 6.

Freeman, H. A., ' Industrial Statistics,' Chap. 3.

Freund, J. E., ' Modern Elementary Statistics, ' Chaps. 13, 14.

Goulden, C. H., ' Methods of Statistical Analysis, ' 2nd ed., Chaps. 6, 7.

Hoel, P. G., 'Introduction to Mathematical Statistics, ' 2nd ed., Chap. 7.

Hotelling, H., ''New Light on the Correlation Coefficient and Its Transforms,' ' Journal of the Royal Statistical Society ', Series B, Vol. 15, No. 2, 1953.

Kendall, M. G., ' The Advanced Theory of Statistics, ' 3rd ed., Vol. I, Chaps. 14, 16.

Kendall, M. G., ' Rank Correlation Methods. '

Lewis, E. E., ' Methods of Statistical Analysis in Economics and Business, ' Chap. 12.

Mather, K., ' Statistical Analysis in Biology, ' 2nd ed., Chap. 8.

Rider, P. R., ' An Introduction to Modern Statistical Methods,' Chap. 4.

Riggleman, J. R. and Frisbee, I. N., ' Business Statistics,' 3rd ed., Chap. 12.

Snedecor, G. W., ' Statistical Methods, ' 4th ed., Chaps. 6, 7.

Spurr, W. A., Kellogg, L. S. and Smith, J. H., 'Business and Economic Statistics, ' Chap. 17.

Tippett, L. H. C., 'The Methods of Statistics,' 4th ed., Chaps. 8, 9.

Treloar, A. E., 'Elements of Statistical Reasoning,' Chaps. 7, 8, 9.

Walker, H. M. and Lev., 'Statistical Inference', pp. 230-258, 278-287.

Waugh, A. E., 'Elements of Statistical Method,' 3rd ed., Chaps. 11, 15.

Yule, G. U. and Kendall, M. G., 'An Introduction to the Theory of Statistics' 14th ed., Chaps. 9, 10, 11, 15.

இந்த அத்தியாய முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணை நூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரும், பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டும், நூலின் (இரண்டாம் பாக) இறுதியிலுள்ள துணை நூல் பட்டியலில் காணலாம்.

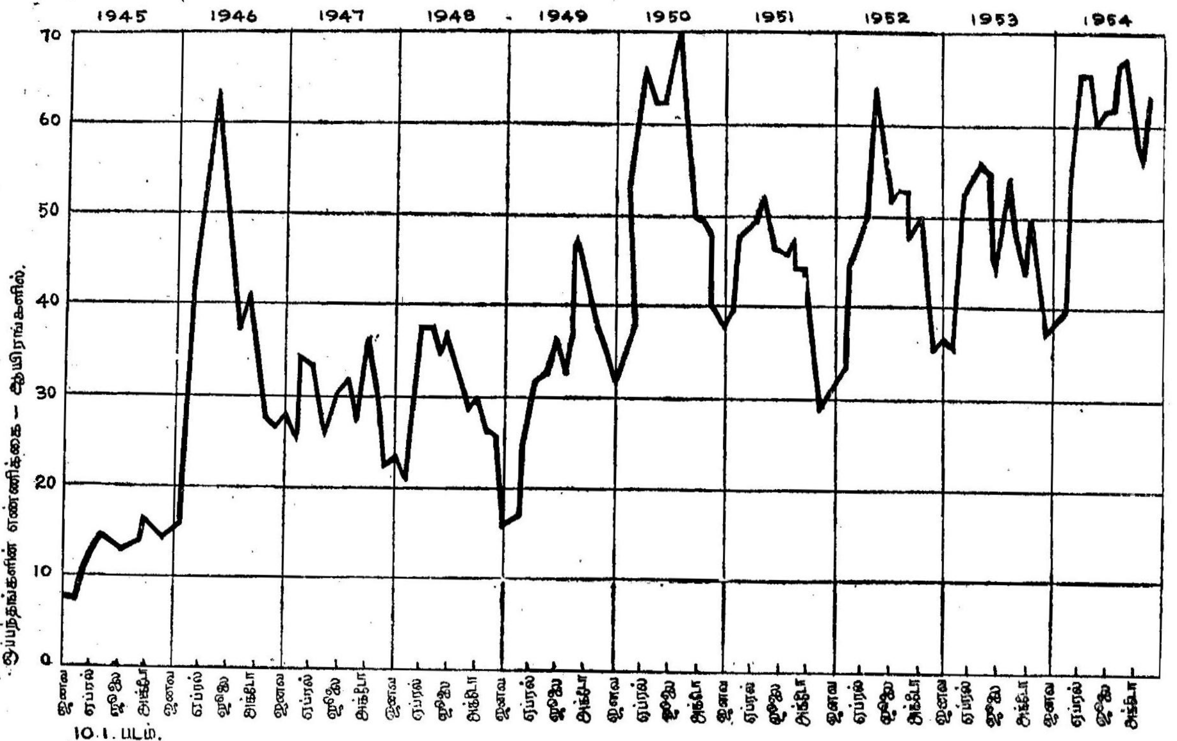
10. காலத் தொடர்வரிசை ஆய்வு: பன்னெடுங்காலப் போக்குகள்

முந்திய பகுதிகளில் குறிப்புகளை அளவுக்கேற்ப வகைப்படுத்தி, பரவல்களாக ஆராய்ந்தோம். வேறுபாட்டின் வடிவங்களையும், முடிவுகளைத் தொகுப்புமுறை வாதத்தால் பொதுமையாக ஆக்குவதற்கான முறைகளையும், வேறுபாடு இயைபிலாக் காரணக் கூறுகளால் ஏற்படும் போது எடுகோள்களைச் சோதனை செய்யும் முறைகளையும்பற்றி முன்னர்க் கண்டோம். அத்தகைய அளவுப் பரவல்களாக விவரங்களை வகைப்படுத்தும்போது அக் குறிப்புகள் எந்தச் சமயங்களில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன என்ற ஆராய்ச்சி அவசியமில்லாததால் செய்யப்படவில்லை. எனவே, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிப் பார்க்கும் போது இரண்டாவது தடவை சுண்டியதற்கும் பத்தாவது தடவை சுண்டியதற்கும் வேறுபாடு கற்பிப்பதில்லை. இப்போது காலத்தினுல் ஏற்படும் மாற்றங்களை ஆராய்வதே நமது குறிக்கோளாக இருப்பதால், குறிப்புகளைக் கால வரிசைப்படுத்தி ஆராயும் செயல்முறைகளைக் காண்போம். உயிரியல் வளர்ச்சிபற்றி ஆராயும் போதும், பருப்பொருள் ஆராய்ச்சியாளர் காலத்தோடு தொடர்புபடுத்தி ரேடியோ கதிர்வீச்சினை ஆராயும்போதும், காலம் முதன்மை பெறுகின்றது. இதுபோன்றே சமூகப் பொருளாதார இயல்களிலும், தொழில்துறை நிர்வாகத்திலும் ஏற்படும் முக்கியமான பல சிக்கல்களில் காலம் இடம் பெறுகிறது. பிறப்பு விகிதங்களிலும் இறப்பு விகிதங்களிலும் ஏற்படும் மாற்றங்கள், தேசீய வருமானத்தில் ஏற்படும் மாற்றங்கள், விலைகளில் ஏற்படும் மாற்றங்கள், உற்பத்திப் பெருக்கத்தில் நிகழும் மாற்றங்கள், விற்பனையிலும், ஆதாயத்திலும் ஏற்படும் மாறுபாடுகள், இவை யாவற்றிலும் காலத் தொடர்வரிசையே முக்கியமாகக் கருதப்படுகிறது.

காலத்தால் மாறிகளின் இயக்கங்கள்

காலத் தொடர்வரிசைகள் அல்லது ஸ்கும்பீட்டர் (Schumpeter) அழைத்ததுபோல, வரலாற்று மாறிகள் பல்வகைக் காரணக் கூறுகளால் மாற்றம்பெறுகின்றன. அலைவுத் தொடர்வரிசைகளைப் போலவே இயைபிலாக் காரணக் கூறுகள் இருப்பதோடு, இயைபுடைய காரணக் கூறுகள் பல, குறிப்புகளின் போக்கைப் பெரும் அளவுக்குப் பாதிக்கின்றன. இயைபுடைய காரணக் கூறுகளின் தோற்றம் காலத் தொடர்வரிசை ஆய்விலே தனிப்பட்ட சிக்கல்களை எழுப்புகின்றன. இயைபிலா மாறுபாட்டினை ஆராய்கின்ற முறைகள் குறிப்பிட்ட இயைபுடைய காரணக் கூறுகளினால் விளையும் மாற்றங்களின் வடிவத்தை ஆராய ஏற்றன அல்ல.

சரித்திர மாறிகளின் குறிப்புகளை வரைபடமாக அமைத்தால், மாதத்திற்கு மாதம் அல்லது வருடத்திற்கு வருடம் ஏற்படும் தொடர்ச்சியற்ற மாற்றங்களின் கோவையைப்பொதுவாகக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, கட்டுமான ஒப்பந்தங்களின் (construction contracts) எண்ணிக்கையை மாதந்தோறும் எடுத்துக்கொண்டு ஆராய்வோமானால், 10.1 படத்தில் காட்டியதுபோன்று குறிக்கலாம். எந்த ஒரு மாதத்தில் காட்டப்படுகின்ற குறிப்பும் பலவகையான காரணக் கூறுகளின் ஒருமித்த மாற்றத்தினை வெளியிடுவதாக இருக்கும்—அதாவது, பல தனிப்பட்ட கட்டட அமைப்பாளர்களின் திட்டங்கள், வேலைவாய்ப்பு நிலை, பலவகையான அரசினர் துறைகளின் கட்டுமானத் திட்டங்கள், அந்த ஆண்டில் குறிப்பிட்ட காலம், அப்போதைய பருவ நிலை, பொருள்களின் அளிப்பு (supply) அவற்றின் விலைகள், வியாபார நிலை, ஏற்பட்டுள்ள அல்லது ஏற்படக் கூடிய வேலை நிறுத்தங்கள், போர் அல்லது அமைதிக்காலம் முதலிய பல காரணக் கூறுகளையொட்டியே அமைந்திருக்கும். இத்தகைய காலத் தொடர்வரிசையினை ஆராயும்போது, பல வேறுபட்ட காரணக் கூறுகளையும் வரையறை செய்து நமக்குத் தேவையான முறையில் பாகுபாடு செய்துகொண்டு மேற்கொண்டு ஆராய்ச்சியில் ஈடுபடுவது நலம். ஓரளவுக்காவது அத்தகைய பாகுபாடுகள் எதேச்சையாக இருக்கும். ஆய்வாளர் முன்கூட்டியே மனத்தில் கொண்டுள்ள எண்ணங்கள், அவர் மேற்கொண்டுள்ள ஆராய்ச்சியில் உடனடியானதாகக் கருதும் குறிக்கோள்கள், அவர் அமைத்துக்கொண்டுள்ள கருத்துக் கட்டுக்கோப்பு இவை யாவும் பாகுபாடு செய்கின்ற முறையைப் பாதிக்கும். எனவே, முன் கூட்டியே கொண்டுள்ள கருத்துகளுக்கும் கட்டுக்கோப்புக்கும் இந்தக் கண்டறிந்த குறிப்புகளோடு தொடர்புடைய செயல் முறைகள் இயைந்து இருந்தால்தான் கையாளப்படவிருக்கும்



1945-1954-ல் ராக்கி மலைகளுக்குக் (Rocky Mountains) கிழக்கே உள்ள 37 மாநிலங்களில் கட்டுமான ஒப்பந்தங்கள்.*

* ஆதாரம் : எஃப். டபிள்யு. டாட்ஜ் கார்ப்பொரேஷன் (F. W. Dodge Corporation).

பாகுபாடு பயனுள்ளதாக இருக்கும். ஆய்வாளர் இத்தகையதொரு பாகுபாட்டை அமைத்துக்கொண்டு, அவர் வரையறை செய்துகொண்ட பிரிவுகளில் கண்டறிந்த குறிப்புகளை வகைப்படுத்தி அமைக்கிறார். இம் மாதிரி 'பகுப்பு' (decomposition) செய்கின்ற முறையினையே இந்த அத்தியாயத்திலும் அடுத்த இரு அத்தியாயங்களிலும் ஆராய்ந்திருக்கிறோம்.

காலத் தொடர்வரிசையினைப் பாதிக்கும் சக்திகள், திரும்பத் திரும்ப ஏற்படுவன (recurring), திரும்பத்திரும்ப ஏற்படாதன என்றும், படிமுறை மாற்றமுடையன, பருவகால போக்குள்ளன, இயைபிலாப் போக்குள்ளன என்றும் பாகுபாடு செய்யப் பட்டுள்ளன. ஓர் அமைப்பின் உறுப்புகளுக்கு இடையேயுள்ள உறவுகளில் திடீரென அல்லது சீராக ஏற்படும் மாற்றம்—கட்டுக் கோப்பு மாற்றம்பற்றியும் சில கருத்துகளை அறிமுகப்படுத்துவோம். இவையெல்லாவற்றையும்விடப் பொதுவாக அதிக வழக்கிலுள்ளதும், பொதுவாக மிகுந்த பயனுடையதுமான பாகுபாட்டில், பன்னெடுங் காலப் போக்கு (secular), பருவகாலப் போக்கு (seasonal), சுழற்சிப் போக்கு (cyclical), இயைபிலாப் போக்கு (random) எனப் பகுதிகள் வேறுபடுத்திக் காட்டப்படுகின்றன.

ஒரு வரலாற்று மாறியின் பன்னெடுங்காலப் போக்கு என்ற பகுதிகுறித்துப் பேசுகையில், பன்னெடுங்காலம் என்ற சொற்றொடரை, யுகம், நீண்டகால கட்டங்கள் என்னும் பொருள்படவே வழங்குகிறோம். நிலைத்த வளர்ச்சி, நிலைத்த சரிவு, அடுத்தடுத்த வளர்ச்சியும் சரிவும் காணப்படினும் படிமுறையில் தளராத முன்னேற்றம் ஆகிய நெடுங்கால இயக்கங்களைத் தோற்றுவிக்கும் காரணக் கூறுகளையே பன்னெடுங்காலச் சக்திகளாகக் கருதுகிறோம். நீண்டகால மாற்றங்களில் அடிப்படை அமைப்பு யாவுமே இடைவிடாத ஒரே சீரான மாற்றமுடையன. தனிப்பட்ட அளவுகளில் அல்லது வளர்ச்சி வீதங்களில் அல்லது தேய்வு வீதங்களில் அடிக்கடி திடீர் மாற்றங்கள் நிகழ்வது பன்னெடுங்காலப் போக்கோடு முரண்படுவன. பன்னெடுங்காலப் போக்கில் புதிய காரணக்கூறு ஒன்று இடையிலே தோன்றுவதாலும் அல்லது சிதைவதினாலும் சிற்சில மாற்றங்கள் இருக்கலாம். ஆனால், பெரும்பாலும் சமூக, பொருளாதாரத் துறைகளில் கிடைக்கின்ற கால மாறிகளைப் போன்றவற்றிலே குறிப்புகளின் தொடரில் காணப்படும் பன்னெடுங்காலப் போக்கு ஒரே சீராக, இடைவிடாது, மாதத்திற்கு மாதம் அல்லது ஆண்டுக்கு ஆண்டு ஏற்படுகின்ற ஒழுங்கின்மையையும் உள்ளடக்கியதாக இருக்கும்.

மூன்று மாதங்களுக்கொரு முறையும் அல்லது மாதத்திற்கு ஒரு முறையும் அல்லது வாரத்திற்கொரு முறையும் மதிப்புகள் கிடைக்கக்கூடிய வரலாற்றுத் தொடரில் பருவகால மாற்றங்கள்

காணப்படும். ரயில்வே வழி செல்கின்ற சரக்குகள் போக்கு, தீயினால் ஏற்படும் இழப்புகள், பல பண்டங்களின் நுகர்வுகள், பெருங்கடைகளின் விற்பனைகள், வேலை வாய்ப்புகள் இவைபோன்ற இன்னும் பல மாறிகளில் ஆண்டுக்கு ஆண்டு குறைந்த அளவுக்கு வேறுபாடுகளுடன் (சில சமயங்களில் முன்னேற்றத்தைக் குறிக்கும் படிப்படியான மாற்றங்களுடன்) அதேவகையான பருவ மாற்றங்கள் நேரும். இத்தகைய மாற்றங்கள் பருவம் தவறாத தன்மையதாய் 12 மாதங்கள் என்ற நிலைத்த காலக்கூறிலே நிகழும்.

பருவ மாற்றம்போல அத்தனை காலாகாலத்தில் அமையாவிட்டாலும், பல பொருளாதார, சமூகத் தொடர்களில் ஒரே ஒழுங்காக அமைந்த மாற்றங்களைக் காணலாம். இதனைச் சுழற்சி மாற்றங்கள் என்போம். விலைகள், கூலிகள், தொழில் உற்பத்திப் பெருக்கம், வாணிகப் பெருக்கம், திருமண வீதங்கள், பங்கு மார்க்கெட்டில் வியாபார நிலை, தனிப்பட்ட வணிக நிறுவனங்களின் செயல்கள் முதலியனவற்றில் பொதுவாக, தொழில் ஏற்ற இறக்கத்தால் வளர்ச்சியும் சுருக்கமும் மாறிமாறி அமைந்து காணப்படும் இத்தகைய காலகட்டங்களின் நீளம் வேறுபடலாம். ஆனால், சுழற்சியாக முன்பு நிகழ்ந்த மாற்றங்களின் போக்குகளைப் பற்றி, கண்டறிந்ததில் அவை போதிய அளவுக்கு ஒழுங்காக அமைந்திருப்பதனால் அவற்றை வகையாக ஆராய்வதற்கு இடம் ஏற்படுகிறது.

இதுபோல கிட்டத்தட்ட ஒழுங்கற்ற இயக்கங்களை உடையவற்றோடு, தற்செயலாக ஒழுங்கின்றி அமைந்த காரணக் கூறுகளும் பிணைந்துள்ளன. இந்த இயக்கங்களை இயைபிலாதன எனக் கருதுகிறோம். காலத் தொடர்வரிசை ஆய்வில் இந்த வகையில், எதிர்பாராத தீய நிகழ்ச்சிகளின் — நிலநடுக்கம், போர், வெள்ளம், தீ — விளைவுகளால் ஏற்படும் மாற்றங்களையும், இத்தனைக் கடுமையற்ற, எண்ணிக்கையில்லாத சிறு நிகழ்ச்சிகளின் விளைவினால் ஏற்படும் மாற்றங்களையும் அடக்குகின்றோம். குறிப்பிடப்பட்ட ஒரு தேதியில் பன்னெடுங்கால இயக்கத்தினாலும், பருவகால இயக்கத்தினாலும், வட்ட சுழற்சி காரணக் கூறுகளினாலும் ஏற்படுகின்ற மாற்றங்களை இத்தகைய நிகழ்ச்சிகளின் விளைவுகளும் பாதிக்கின்றன. ஒரு சமயத்தில் கண்டறிகிற மதிப்பு இந்தக் காரணக் கூறுகள் யாவும் சேர்ந்து ஏற்படுத்திய விளைவின் ஒட்டு மொத்தமே.

பகுப்புப் பிரச்சினை: ஆய்வாளர் காலத் தொடர்வரிசையினை ஆராயும்போது, மேற்கண்ட வகைகளில் ஏதோ ஒருவகை மாற்றத்தைப்பற்றி அக்கறை காட்டுகிறார். லம்பர் (lumber) உற்பத்தியில் பருவ மாற்ற அமைப்பு ஏதும் தொடர்ந்து காணப்படுகிறதா ? அப்படியானால் அது என்ன ? வாணிகச் சுழற்சிகள் காலத்தில்

தொழில் உற்பத்தி அளவில் எவ்வகையான மாற்றம் காணப்படுகின்றது ? கடந்த நூற்ருண்டில் மின்விசைப் பெருக்கத்தில் ஏற்பட்ட மாறுதல் எத்தகையது ? எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட சிக்கலுக்கேற்ப, ஆராயப்படுகின்ற தொடரின் பலவகை இயக்கங்களையும் கருதாது, ஆராயப்படும் சிக்கலை உருவாக்கும் இயக்கத்தினைமட்டுமே தனியே பிரித்தெடுக்க ஆய்வாளர் விரும்புகிருர். இதனைப் பகுப்பு முறையினுல்தான் சாதிக்கவேண்டும். இங்கே ஓர் அடிப்படைச் சிக்கல் எழுவதைக் கவனிக்கவேண்டும். பதிவு செய்யப்பட்ட காலத் தொடர்வரிசையில் உறுப்புகளாக நிற்கும் தனிமங்கள் எங்ஙனம் கலந்து இயங்கின ? சுழற்சிப் போக்குகள் இல்லாவிடின் தனித்து அமையக்கூடிய பன்னெடுங்காலப் போக்கின்மீது சுழற்சிப் போக்குகள் பொருத்தப்பட்டுள்ளனவா ? பருவகால மாறுபாடுகள் இந்தப் பன்னெடுங்காலப் போக்கு, சுழற்சிப் போக்கு ஆகியவற்றின் கலவைமீது பொருத்தப்பட்டிருக்கிறதா ? அல்லது பன்னெடுங்கால-பருவகாலப் போக்குகளின் கலவைமீது சுழற்சிப் போக்கு பொருத்தப்பட்டிருக்கிறதா ? இந்த நெடுங்காலப் போக்கு, வட்ட சுழற்சிப் போக்கு, பருவகாலப் போக்கு ஆகியவற்றின் கூட்டின்மீது இயைபிலாக் காரணக் கூறுகள் மாற்றம் விளைவிக்கின்றனவா ? பன்னெடுங்காலப் போக்குகளை ஆராயும்போது அது முற்றிலும் கற்பனையாக அமைக்கப்பட்டதா ? அந்த வளர்ச்சி சீரான இடைவிடாத படிமுறை வளர்ச்சியா ? அல்லது முன்னேக்கியும் சற்று பின்னேக்கியும் அடுத்தடுத்து ஏற்படும் மாற்றங்களின் மொத்த விளைவா ? இந்தக் கேள்விகளைப்பற்றி இன்னும் விளக்கமாகப் பின்னர் ஆராய்வோம். இப்போதைக்கு இந்தக் கேள்விகளில் பெரும்பாலானவை விடைகூற முடியாதவை என்றுமட்டும் குறிப்போம். நாம் கண்டறிந்த காலத் தொடர்வரிசையில் ஏற்பட்டுள்ள மாற்றங்கள் அத்தகைய சக்திகளில் கூட்டுக் கலவையினுல் விளைந்தது என்று நமக்குத் தெரியாது. எவ்வகையாகப் பகுப்புமுறையினை நாம் கையாண்டாலும் அதற்கு ஆதாரமாக இந்த வேறுபட்ட சக்திகளின் விளைவுகளைப்பற்றிச் சில புனைவுகளைச் செய்துகொண்டே தீர.வேண்டியிருக்கிறது. இந்தப் புனைவுகளில் சில, மற்றதைவிடப் பொருத்தமானவையாக இருக்கலாம். எனினும், ஒரு குறிப்பிட்ட முறையினைக் கையாளும்போது, அந்தச் சமயத்தில் மேற்கொள்ளப்படுகின்ற புனைவுகளைப்பற்றி மறந்துவிடலாகாது.

காலத் தொடர்வரிசையின் தனிச் சிறப்புகள் : இத் துறையில் கையாளப்படும் ஆய்வுமுறைகளைப்பற்றி விவரங்களை விரித்துக் காண்பதற்குமுன்னுல் காலவரிசைப்படி ஒழுங்கு செய்யப்பட்ட இக் குறிப்புகள் முன் அதிகாரங்களில் நாம் பயன்படுத்திய குறிப்புகளிலிருந்து எவ்விதம் வேறுபட்டு விளங்குகின்றன என்பதுபற்றி இரண்டு கருத்துகளை நாம் கவனிக்கவேண்டும். முதலாவதாக,

காலத் தொடர்வரிசையினை உருவாக்கும் பல வேறுபட்ட குறிப்புகளும் ஒன்றுக்கொன்று சார்புடையவை. அடுத்தடுத்த கண்டறிந்த குறிப்புகளில் இதனை நன்கு உணரலாம். 1955 ஆம் ஆண்டு பிப்ரவரி மாதம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட கார்களின் எண்ணிக்கை 1955ஆம் ஆண்டு ஜனவரி மாதம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட கார்களின் எண்ணிக்கையோடு சார்பு இல்லாததன்று. ஒரு நாணயத்தை அடுத்தடுத்துச் சுண்டுவதனால் கிடைக்கின்ற முடிவுகள், சார்பற்று இருக்கும் நிலையோடு இது முற்றிலும் வேறுபட்ட தன்மையது. சார்பின்மையைப் புனைந்துகொள்வதால் மேற்கொள்ளப்படுகின்ற நிகழ்திறக் கணிப்புகளைப் பொருளாதார, சமூக இயல்களில் பயனாகும் காலத் தொடர்வரிசைகளை உருவாக்கும் ஒன்றுக்கொன்று சார்ந்த குறிப்புகளுக்குப் பயன்படுத்த முடியாது.

ஒழுங்கு அமைப்பினை எதிர்பார்ப்பவருக்குத் திகைப்பை ஏற்படுத்தும் மற்றொன்றும் உண்டு. சமூக, பொருளாதார இயல்களில் ஆராயப்படும் மாறிகளின் முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளும் காலத்தால் மாற்றமடையும். எடுத்துக்காட்டாக, திவாலாக்கள் (bankruptcies) பற்றிய சட்டத்தில் மாற்றம் ஏற்பட்டால் தொழில் தோல்விகளும் பெரும் அளவு பாதிக்கப்படும். இதனால் 1913ஆம் ஆண்டில் ஃபெடரல் ரிஸர்வ் சிஸ்டம் (Federal Reserve System) அமைக்கப்பட்டபோது, பாங்குத் தொழிலின் தன்மையே முற்றிலும் மாற்றமடைந்தது. இந்த விளைவுகளின் உண்மை என்ன என்பது முக்கியமானது. ஒரு கலத்திலிருந்து கறுப்பு, வெள்ளை நிறப் பந்துகளை மாதிரியாகப் பிரித்தெடுத்து, அந்த மாதிரியின் அடிப்படையில் கலத்திலே இந்த இரு வண்ணப் பந்துகளும் என்ன வீதத்திலே இருக்கும் என முழுமைத் தொகுதிபற்றி மதிப்பீடு செய்கையில், மாதிரி பிரித்தெடுத்த பின்னர் கலத்திலே உள்ள பொருளடக்கத்தில் எத்தகைய அடிப்படை மாற்றமும் நிகழாது என்று தளராத நம்பிக்கையோடு செய்கிறோம். மேக்ஸ்வெல் பூதத்தைப் (Maxwell's demon) போன்ற ஒரு பூதம் கலத்தில் உள்ள பந்துகளின் எண்ணிக்கையிலே மாற்றங்கள் செய்துவிட்டால், நமது மதிப்பீடு பயனற்றதாகிவிடும். ஆனால், உலக நடைமுறையில் மனித இயக்கங்களில் இத்தகைய மாற்றங்கள் நிகழத்தான் செய்கின்றன. ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் கண்ட குறிப்புகளை அடிப்படையாகக்கொண்டு ஒரு தொகுதியின் சமூக, பொருளாதாரப் போக்கினை ஆராய்கிறோம். பின்னர் அம் மாதிரியிலிருந்து நாம் பெற்ற முடிவுகளை அடுத்த காலகட்டங்களுக்கும் பயன்படுத்துகின்றோம். ஆனால், இந்த இடைக்காலத்தில் சமூக அமைப்புகள் மாற்றம் பெற்றிருக்கலாம்; பொருளாதார செயல்முறைகள் விரிவுபெற்றிருக்கலாம். மனிதர்களைக் கட்டுப்படுத்தும் சட்டதிட்டங்கள் மாற்றப்பட்டிருக்கலாம்.

சமூக விஞ்ஞானிகளும் வாணிகர்களும் தங்கள் மாதிரிகளைப் பிரித்தெடுக்கின்ற 'கலத்தின்' அமைப்பில் ஒரு பூதம் இடைவிடாது மாற்றங்கள் செய்துகொண்டேயிருக்கிறது. இதனுல் ஏற்படும் விளைவுகள் ஆய்வாளர் மேற்கொண்டுள்ள வேலையினைப் பெரிதும் பாதிக்காது இருக்கலாம்; நிகழ்ச்சியின் தொடர்ச்சியும் இடைவிடாது இருக்கலாம். ஆனுல், இறந்தகாலம் என்பது எதிர்காலத்திலிருந்தும் நிகழ்காலத்திலிருந்தும் முற்றிலும் பிரித்தெடுக்கமுடியாததாகும்; பொருட்படுத்தவேண்டிய மாற்றங்கள் எப்போதுமே நிகழ்வதற்கு வாய்ப்புகள் இருக்கின்றன. எனவே, நெடுங்காலப் போக்கு, சுழற்சிப் போக்கு அல்லது பருவகாலப் போக்கு ஆகிய இறந்தகாலத் தன்மைகளின் அடிப்படையில் எதிர்காலத்திற்காகச் செய்யப்படுகின்ற உய்த்துணர்வுகளில் ஓரளவு பிழைகள் இருந்தேதீரும்.

காலத் தொடர்வரிசையினை ஒழுங்குபடுத்தும் அடிப்படை முறை

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களை அலைவுப் பட்டியலாக மாற்றி அமைப்பதைவிடக் காலத் தொடர்வரிசை விவரங்களை ஒழுங்குபடுத்துவது எளிது. தன் வகையிலும் (primary) அல்லது பிறர் வகையிலும் (secondary) கிடைக்கின்ற விவரங்களே ஆய்வுக்கு வேண்டிய விதத்தில் அமைந்துவிடுகின்றன. எனினும், சில எச்சரிக்கைகளை மேற்கொள்ளவேண்டியது அவசியம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள், எந்தத் தேதிகளில் எடுக்கப்பட்டன என்பதைத் தெளிவாகப் புரிந்துகொண்டு, வரையறை செய்து கூறப்பட வேண்டும். (BLS மொத்த விலைக் குறியீட்டு எண்களில் எடுத்துக்கொள்ளப்படும் விலைப்புள்ளி போல) மாத விவரம் ஒரு தனி நாள் விவரத்தையொட்டியதாக இருக்கலாம்; அல்லது (சராசரி மணி ஊதியங்களைப்போல) சராசரிகளாக இருக்கலாம்; அல்லது (பருத்தி நுகர்வுப் புள்ளி விவரங்களைப்போல) ஒவ்வொரு மாதத்திற்கும் கூடுதல் தொகைகளாக இருக்கலாம். மாதப் புள்ளி விவரங்களை அடுத்தடுத்துக் கூட்டியும் அமைக்கலாம்; இது நிலக்கரி உற்பத்திப் புள்ளி விவரங்களில் இருப்பதுபோல ஒவ்வொரு குறிப்பும் அத் தேதி வரையில் அந்த ஆண்டுக்குரிய கூடுதலைத் தெரிவிப்பதாக இருக்கலாம். ஒரு மாதத்திற்கு ஆண்டுக்குச் சராசரி குறிப்புகள் தரப்படுமானுல் அந்தச் சராசரியினை அடைந்த விதம் எது என்பதும் தெரியவேண்டும்.

மற்றும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலத் தொடர்வரிசையில் பல காலங்களில் அமைந்துள்ள விவரங்களையும் முற்றிலும் ஒப்புநோக்கு

வதற்கு வசதி இருக்கவேண்டும். ஒருமையில்லாத காலத் தொடர் வரிசையினை ஆராய்வது தவருன முடிவுகளைத் தருவதாகவும், பயனற்றதாகவும் இருக்கும். என்ருலும் அத்தகைய காலத் தொடர் வரிசைகள் அடிக்கடி பதிப்பிக்கப்படுவதைக் காண்கிருேம். வாணிகச் சங்கங்களாலும், அரசாங்க நிறுவனங்களாலும் பதிப்பிக்கப்படும் பொருள் உற்பத்தி, நுகர்வு ஆகிய புள்ளி விவரங்கள் எண்ணிக்கையால் வேறுபடும் அறிக்கைகளின்பேரில் அமைந்து இருப்பதைக் காணலாம். பல நாட்களில் தொகுக்கப்பட்ட விலைப்புள்ளித் தொடர், அப் புள்ளிகள் அலகுகளாலும் தரங்களாலும் (grades) வேறுபட்டனவாக இருக்கும்போதும், பல மார்க்கட்டுகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டனவாக இருக்கும்போதும் ஒப்புநோக்குவதற்கு வசதியாக இருக்காது. மக்கள்தொகை அமைப்பிலே வேறுபடுத்திப் பாகுபாடுகளைச் செய்யும் போது, மக்கள்தொகைப் புள்ளி விவரங்களை ஒப்புநோக்கும் வசதியை இழந்துவிடுகிருேம். ஒரு பிராந்தியத்தில் பணியாற்றும் வாணிகப் பிரதிநிதியின் எல்லையினை மாற்றி அமைப்பதால் அவர் அனுப்பும் விவரங்கள் பெரிதும் மாற்றம் பெற்றுவிடுகின்றன. அமெரிக்க ஸ்டீல் கார்ப்பொரேஷன் (United States Steel Corporation) வைத்துள்ள நிறைவேற்றப்படாத ஆர்டர்களின் புள்ளி விவரங்கள் பல வித அவசரத் தேவைகளுக்கு முதலில் ஈடுகொடுப்பதனுல் அடிக்கடி மாறிவிடுகின்றன. தரத்தினை மாற்றுவதாலும் வடிவ அமைப்பினை மாற்றுவதாலும் பல கால இடைவெளிகளில் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற பொருளைப்பற்றிய விவரங்கள் பொருந்துவதில்லை. இவை யாவும் ஆய்வுமுறையைச் சீர்கெட்டதாக்கும்; இவை காலத் தொடர் வரிசைகளில் காணப்படும் குறைபாடுகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும். ஒரு தொடரினை நன்கு சோதித்த பின்னரே திருத்தமானது எனவும் ஒருமையுடையது எனவும் ஏற்றுக்கொள்ள வேண்டும்.

வரைபடம் அமைத்தல்: கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலத் தொடர்வரிசையைப் பட உருவத்தில் அமைத்து மேற்கொண்டு ஆய்வுகளை நடத்துவதற்கு முதல்படி, விவரங்களைப் புள்ளிகளாக வரைபடத்தில் குறிப்பது ஆகும். பன்னெடுங்காலப் போக்கு மற்றும் தொடரின் பொதுவான பண்புகள் யாவும் வரைபடமாக அமைத்த அளவிலேயே எளிதில் புலனுகலாம். விவரங்களைச் சாதாரண வரைதாளிலோ, அரை லாகிருத வரைதாளிலோ குறிக்கலாம். சில பணிகளுக்காக அரை லாகிருத வரைதாளில் வரைவதன் சிறப்பு முன்னர் விளக்கப்பட்டது. ஆய்வுக்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட பொருளும் அதுகுறித்த விவரங்களின் தன்மையையும் பொறுத்தே வரைதாளைத் தேர்ந்தெடுப்போம். விற்பனைகளிலோ, விலைகளிலோ, வார்ப்பு இரும்பு உற்பத்தியிலோ, ஆய்வு கொள்ளப்

பட்ட எப் பொருளிலும் ஏற்படுகின்ற தனித்த, (absolute) ஏற்ற இறக்கங்களை ஆராய்கின்றபோதோ, தொடர்களுக்கு இடையே உள்ள தனித்த வேறுபாடுகளை ஒப்புநோக்கும்போதோ சாதாரண இயற்கணிதரீதியில் அமைந்த படத்தைப் பயன்படுத்தலாம். சதவீத மாற்றங்கள் அல்லது ஒப்பீட்டு அடிப்படையில் அமைந்த ஏற்ற இறக்கங்களின் ஒப்புமை நமது ஆராய்ச்சிக்குள்ளான பொருளானல் அரை லாகிருத வரைபடத்தினைத் தேர்ந்தெடுத்தல் சிறந்தது. பொதுவாகப் பிந்திய வகையான வரை படத்துக்கு விளக்கம் தருவதில் ஒருவர் பயிற்சி பெற்றிருந்தால் அதனையே பயன்படுத்துவது சிறப்புடையது. காலத்தை ஒரு மாறியாக உடைய பொருளாதாரப் புள்ளி விவரங்களை ஓர் அச்சில் லாகிருத பிரிவு செய்யப்பட்டுள்ள வரைதாளில் வரைகின்றபோது தெளிவான, அதிகம் சிதையாத உறவுகளை நன்கு காணமுடியும்; தொடர்களைச் சிறப்பாக ஒப்புமைப்படுத்தியும் பார்க்கமுடியும்.

சில சமயங்களில் காலத் தொடர்வரிசையினை வரைபடத்தில் குறித்த அளவிலேயே, அதனைப்பற்றிய ஆய்வு முடிந்துவிடுகிறது. பொதுவான பன்னெடுங்காலப் போக்கினை வரைபடம் தோராயமாகக் காட்டிவிடும். பருவகால மாறுபாடுகள் முதலான கால வேறுபாடுகள் இருப்பதனைக் கண்டுகொள்ளலாம். பன்னெடுங்காலப் போக்குகள், ஏற்ற இறக்கங்கள் ஆகியவைகுறித்து ஓரளவுக்கு ஒத்துப் பார்க்கவும் முடியும்; இவ்வகையாகக் கிடைக்கின்ற அறிவு அளவு முறையையொட்டி அமையாததனல் ஒப்புமைகள் திருத்தமின்றியும், தோராயமாகவும் இருக்கும் என்பதைக் கவனிக்கவேண்டும். இருப்பினும், சுவையற்ற புள்ளி விவரங்களைவிட இத்தகைய படங்கள் ஓரளவுக்குப் பன்னெடுங்காலப் போக்குகளையும் உறவுகளையும் தெளிவாக உருவகப்படுத்துகின்றன; இதில் திருத்தமும் உறுதியும் இல்லையாயினும் சில காரியங்களுக்கு இந்த அறிவே போதுமானதாக இருக்கிறது. வேறு சில பணிகளுக்கு இன்னும் திருத்தமான அளவையும், இன்னும் செப்பமான ஆய்வுமுறையும் தேவைப்படும்; அப்போது ஏற்ற முறைகளைக் கையாள்வது எப்படி என இங்கு விவரிப்போம்.

பன்னெடுங்காலப் போக்கின் அளவைகளாக நகரும் சராசரிகள்

வரலாற்று மாறிக்கு முதல் எடுத்துக்காட்டாக அமெரிக்க ரயில்வேமூலமாக அனுப்பப்பட்ட கார்களின் எண்ணிக்கையைப் பற்றிய புள்ளி விவரங்களைக் காண்போம். 10-1 பட்டியலில் 2ஆம் பத்தியில் 1918-லிருந்து 1953வரை ஒவ்வோர் ஆண்டிலும்

பட்டியல் 10-1

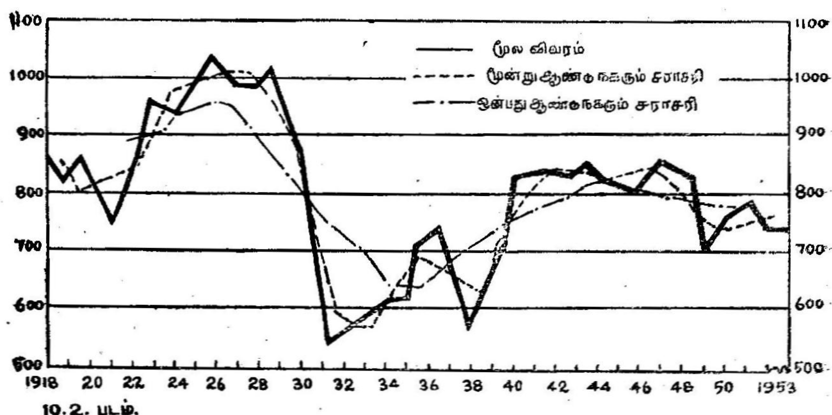
முதலாம் வகுப்பு ரயில்மார்க்கமாகக் கார்களை ஏற்றுமதி செய்ததின் பயனாகக் கிடைத்த கட்டணங்கள்.

1918—1953 வரை, ஆண்டுதோறும் வாராந்திர சராசரிகள்

(ஆயிரம் கார்களில்)

ஆண்டு (1)	மூல விவரம் (2)	மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரி (3)	ஐந்து ஆண்டு நகரும் சராசரி (4)	ஏழு ஆண்டு நகரும் சராசரி (5)	ஒன்பது ஆண்டு நகரும் சராசரி (6)
1918	857.5				
1919	804.5	843.2			
1920	867.7	809.5	823.4		
1921	756.2	818.3	843.4	858.3	
1922	830.9	848.3	869.2	876.5	890.5
1923	957.9	907.4	892.7	907.5	905.5
1924	933.4	958.8	945.7	925.4	926.4
1925	985.1	979.9	978.1	959.1	942.8
1926	1021.1	999.7	984.9	985.5	956.9
1927	993.0	1002.1	1001.4	974.7	943.9
1928	992.1	1000.3	980.9	943.4	897.7
1929	1015.9	963.4	919.5	880.1	856.4
1930	882.3	870.9	829.3	814 5	812.9
1931	714.4	712.9	743.3	757.4	766.7
1932	541.9	606.1	658.7	702.2	733.5
1933	561.9	565.7	603.4	656.3	703.8
1934	593.2	587.0	599.4	633.7	656.0
1935	605.8	631.1	635.9	615.3	630.4
1936	694.4	674.9	640.7	631.1	628.7
1937	724.4	668.2	652.5	650.7	658.9
1938	585.7	654.1	671.2	682.1	688.0
1939	652.1	645.7	694.9	713.2	712.7
1940	699.2	721.5	714.8	730.6	738.2
1941	813.3	778.7	760.9	746.4	750.6
1942	823.6	817.7	797.4	777.9	758.4
1943	816.2	824.9	818.8	798.3	788.5
1944	834.8	819.0	815.1	820.7	807.3
1945	806.1	812.0	821.6	821.9	806.3
1946	795.0	819.0	822.6	802.9	799.1
1947	855.8	824.1	793.8	793.1	794.1
1948	821.5	789.3	782.2	785.1	784.6
1949	690.6	753.4	779.0	774.3	773.7
1950	748.1	739.2	753.9	766.0	
1951	778.8	752.5	736.9		
1952	730.5	748.6			
1953	736.6				

வாராந்திர சராசரிகளாக அமெரிக்க ரயில் மார்க்கமாக, கார் ஏற்றுமதிக் கட்டணம்பற்றிய புள்ளி விவரங்களைக் குறித்துள்ளோம். குறிப்புகள் ஆண்டுகள்தோறும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன. ஆதலால் பருவகாலப் போக்கு இங்கு இடம் பெறுவதற்கில்லை. நெடுங்காலப் போக்கு, சுழற்சிப் போக்கு, இயைபிலாக் காரணங்கள் ஆகியவற்றின் விளைவையே பட்டியலில் காணப்படும் புள்ளி விவரங்கள் தெரிவிக்கின்றன. இவற்றில் பன்னெடுங்காலப் போக்கினை வரையறை செய்வது நமது முதல்வேலை.



10.2. படம்.

முதலாம் வகுப்பு ரயில்மார்க்கமாக, கார் ஏற்றுமதி செய்ததின் பயனாகக் கிடைத்த கட்டணங்கள்; 1918—1953 வரை ஆண்டு தோறும் வாராந்திர சராசரிகள், நகரும் சராசரிகள் (ஆயிரம் கார்கள்).

10.2 படத்தில் 36 ஆண்டுக் காலத்திற்கான கார் இறக்குமதி கட்டண விவரங்கள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த ஆண்டுகளில் கார் ஏற்றுமதி பல பெருத்த மாற்றங்களுக்கு உட்பட்டுள்ளது; எனினும், பொதுவாகக் குறைவுபடுகின்ற பன்னெடுங்காலப் போக்கினைக் காண்கிறோம். இந்தப் பன்னெடுங்காலப் போக்கினைத் தோராயமாக அறிவதற்குப் பல முறைகள் உண்டு. சில சமயங்களிலேயே ஏற்படுகின்ற ஏற்ற இறக்கங்களை நீக்கிவிட்டு, நெடுங்காலப் போக்கினைத் தோற்றுவிக்கும் நிலையான காரணக் கூறுகளை மட்டும் வரையறை செய்து காண்பதற்கு, நகரும் சராசரிகளைப் பயன்படுத்தலாம். காலக் காரணக் கூறுக்கும் மற்ற மாறிக்கும் ஒரு திட்டவட்டமான சார்பலன் உறவு இருப்பதாகப் (நடைமுறையிலாவது) புனைந்துகொண்ட, குறிக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஏற்ப ஒரு வளைகோட்டினைப் பொருத்துவதன்மூலம், பன்னெடுங்காலப் போக்கிற்கு ஒரு தோராயத்தைக் காணமுடியும்; விவரங்களை இழைப்பதன்மூலம்

அதே விளைவை இன்னும் சற்று வெளிப்படையாகக் காணலாம்; வளைகோடு மேலும் தோராயமும், நடைமுறைக்குப் பொருந்துவதாகவும் விளங்கும். சில ஆய்வுகளில் ஒரு புள்ளியியல் தொடரினை ஆராய அதற்கு ஒத்த மற்றொரு தொடரினை, நிலைக்கோடாக அல்லது பன்னெடுங்காலப் போக்கை உணர்த்தும் கோடாகப் பயன்படுத்துவது உண்டு.

நகரும் சராசரி முறையின்மூலமாகப் பன்னெடுங்காலப் போக்கினைத் தீர்மானிக்கவேண்டுமானால், பல ஆண்டுகளுக்குச் (பல மாதங்களுக்கு அல்லது பல வாரங்களுக்கு) சராசரி மதிப்பைப் பெற்று, அம் மதிப்பை, அந்தச் சராசரியினைக் கணிக்கப் பயன்பட்ட கால இடைவெளியின் மையத்தில் அமையும் இயல்நிலைப் போக்கு மதிப்பாகக் கருதலாம். 10-1 பட்டியலில் 1918-லிருந்து 1953-வரை கார் இறக்குமதிக் கட்டணங்கள் 3, 5, 7, 9 ஆண்டுக்கால நகரும் சராசரிகளாக இம் முறையில் கணிக்கப்பட்ட விவரங்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன.

1946-ல் மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரி என்பது 1945, 1946, 1947 ஆண்டுகளின் சராசரியாகும். 1944, 1945, 1946, 1947, 1948 ஆகிய ஐந்து ஆண்டுகளின் சராசரியை 1946ஆம் ஆண்டில் ஐந்தாண்டு எண்ணைக் குறிக்கின்றோம். இவ்வகையாகவே மற்ற சராசரிகளும் கணிக்கப்படுகின்றன. இதுபோலவே ஒவ்வொரு சராசரியையும் காலத்திற்கு மையமாக அமைக்கிறோம். அதாவது கொடுக்கப்பட்ட காலத்தின் நடுவில் அமைகிற சராசரி, அக் காலத்தின் போக்கைத் தெரிவிப்பதாகக் கருதப்படுகிறது. ஒற்றைப்படை எண்களைக்கொண்ட எண்களை ஆண்டுகளுக்குப் பயன்படுத்தும்போது, மையப்படுத்தும் இந்த முறை எளிதாகிறது; இந்த எண்கள் ஒற்றைப் படையாகத்தான் இருக்கவேண்டுமென்பதில்லை; இரட்டைப்படை எண்களை ஆண்டுகளுக்குப் பயன்படுத்தும்போது, முதலில் கணிக்கப்பட்ட நகரும் சராசரிகளுக்கு மீண்டும் இரண்டாண்டு நகரும் சராசரிகளைக் கண்டு மையப்படுத்தலாம். 10.2 படத்தில் கொடுக்கப்பட்ட மூல விவரத்தோடு மூன்றாண்டு, ஒன்பதாண்டு நகரும் சராசரிகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

இவ்வகையாக, சராசரியினைப் பயன்படுத்துவதால் வளைகோட்டுக்கு ஓர் இழைவு கொடுத்து ஏற்ற இறக்கங்களால் பொதுவான போக்கிலிருந்து ஏற்படும் விலக்கத்தைக் குறைக்க முடிகிறது. அத்தகைய சராசரியைக் கணக்கிடுகையில் அதிக ஆண்டுகளைக் கணக்கில் எடுத்துக்கொண்டால், வளைகோடு அதிகம் இழைவுபெற்றுச் செப்பமாக அமையும்; இதனைத் தவிர இந்தக் காலத்தினைத் தீர்மானிக்கும் வேறு காரணக் கூறுகளும் உண்டு. இந்தக் காரணக் கூறுகளில் சிலவற்றை ஆராய்வோம்.

நகரும் சராசரிகளின் சில பண்புகள் : சுழற்சியின் நீளமும் ஏற்ற இறக்கங்களின் அளவும் மாறிலியாக இருக்கும்போது, சுழற்சியின் ஏற்ற இறக்கங்கள் ஒரே சீரான ஒரு வரம்பையொட்டியோ, ஒரு மாருத சாய்வையுடைய நேர்கோட்டையொட்டியோ அமைந்திருப்பதாகக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது; அந்தச் சுழற்சியின் காலத்திற்குச் (அல்லது அதன் ஒரு மடங்கு) சமமான ஒரு காலம் நகரும் சராசரியின் காலமாக இருந்தால், போக்கினை முற்றிலும் சரியாக வெளியிடும் நேர்கோடு ஒன்று கிடைக்கும். இதே சூழ்நிலையில் இதே சுழற்சி காலத்திற்குக் குறைவாகவோ அதிகமாகவோ நகரும் சராசரிக் காலத்தை எடுத்துக்கொண்டால், நேர்கோடு கிடைக்காது; அதற்குப் பதிலாக மூலத்திலுள்ளதுபோன்றே காலத்தினை உடைய புதியதொரு சுழற்சி குறைந்த அளவு ஏற்ற இறக்கங்களோடு கிடைக்கும். இந்தச் சுழற்சிகளின் உச்சமும் சிறுமமும் மூல சுழற்சிகளின் உச்சத்தோடும் சிறுமத்தோடும் ஒன்றவேண்டிய அவசியமில்லை. பொதுவாக, சராசரி அடிப்படையாக அமைகின்ற காலம் அதிகரிக்க அதிகரிக்கப் புதிய சுழற்சியில் கிடைக்கின்ற ஏற்ற இறக்கங்களின் அளவு குறைவுபடும்.[1]

இந்தக் கருத்துகளை, 10-2 பட்டியலில் எதேச்சையாகத் தொகுத்துத் தரப்பட்டுள்ள விவரங்கள் விளக்குகின்றன. முதல் எடுத்துக்காட்டில் ஐந்து எண்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளன; இவை தொடர்ச்சியாக மீண்டும் மீண்டும் வருகின்ற எண்கள் ; இவை ஒரு பொது வரம்பினையொட்டி ஏற்ற இறக்கங்களைப் பெற்றிருக்கின்றன.

இரண்டாவது பத்தியிலும் மூன்ருவது பத்தியிலும், சுழற்சிகளை அறவே நீக்கிய நகரும் சராசரிகளாக, விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. சராசரியின் காலம் சுழற்சியின் காலத்திற்கோ, அதன் ஒரு மடங்குக்கோ சமமாக இருக்காதபோது (4), (5) பத்திகளில் காணப்படும் புள்ளி விவரங்களில் தெரிவதுபோல் சுழற்சியை விலக்கிவிட முடியாது.

மேற்கூறிய முடிவுகள் ஒரு நேர்கோட்டினையொட்டி சுழற்சிகள் ஏற்படும்போதே பொருந்தும். முன்விவரமே 10-3 பட்டியலில் 3 என்ற நிலைத்த அதிகரிப்போடு தரப்பட்டுள்ளன. + 3 என்ற சாய்வினை (slope) உடைய நேர்கோட்டின்மீது அதே சுழற்சிகளைப் பொருத்துவதற்கு இது சமம்.

[1] ஏற்ற இறக்கங்கள் குறைவுபடுவதன் அளவு ஒரே சீராக இருக்காது ஆனல், சுழற்சியுடையதாக இருக்கும்.

சுழற்சிகளின் விளைவுகளை அறவே நீக்கிய போக்கு மதிப்புகள், சுழற்சியின் காலத்துக்கோ, அதன் மடங்குக்கோ சமமான காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரிகளை எடுத்துக்கொள்வதனால் கிடைக்கும். (4), (5) பத்திகளில் காட்டப்பட்டுள்ளதுபோல வட்ட சுழற்சியின் காலத்துக்குச் சமமல்லாத காலத்துச் சராசரியை எடுத்துக்கொள்ளும் போது அதே காலத்துக்குச் சுழற்சிகள் இருப்பினும் ஊசல் குறைந்து காணப்படும்.

நிலைத்த காலமும் ஊசலும் நிலவும் இத்தகைய இலட்சியமான எளிய சூழ்நிலைகள் இல்லாதபோது நகரும் சராசரிகளின் தெளிவு

பட்டியல் 10-2

நகரும் சராசரிகளைப் பயன்படுத்துவதுபற்றிய விளக்கம்

சுழற்சி உடைய விவரம் (1)	5 குறிப்புகளுக்கு நகரும் சராசரி (2)	10 குறிப்புகளுக்கு நகரும் சராசரி (மையப்படுத்தியது) (3)	3 குறிப்புகளுக்கு நகரும் சராசரி (4)	8 குறிப்புகளுக்கு நகரும் சராசரி (மையப் படுத்தியது) (5)
2				
6			$5\frac{1}{3}$	
8	$6\frac{1}{5}$		8	
10	$6\frac{1}{5}$		$7\frac{2}{3}$	
5	$6\frac{1}{5}$		$5\frac{2}{3}$	$6\frac{3}{8}$
2	$6\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{5}$	$4\frac{1}{3}$	$6\frac{13}{16}$
6	$6\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{5}$	$5\frac{1}{3}$	$6\frac{3}{8}$
8	$6\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{5}$	8	$5\frac{3}{4}$
10	$6\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{5}$	$7\frac{2}{3}$	$5\frac{11}{16}$
5	$6\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{5}$	$5\frac{2}{3}$	$6\frac{3}{8}$
2	$6\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{5}$	$4\frac{1}{3}$	$6\frac{13}{16}$
6	$6\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{5}$	$5\frac{1}{3}$	$6\frac{3}{8}$
8	$6\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{5}$	8	$5\frac{3}{4}$
10	$6\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{5}$	$7\frac{2}{3}$	$5\frac{11}{16}$
5	$6\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{5}$	$5\frac{2}{3}$	$6\frac{3}{8}$
2	$6\frac{1}{5}$		$4\frac{1}{3}$	$6\frac{13}{16}$
6	$6\frac{1}{5}$		$5\frac{1}{3}$	
8	$6\frac{1}{5}$		8	
10			$7\frac{2}{3}$	
5				

(3), (5) பத்திகளிலுள்ள குறிப்புகள் இரண்டு குறிப்புகளுக்கான நகரும் சராசரிகளின் சராசரியைக்கொண்டு மையப்படுத்தியது.

குறைவுபட்டு, விளக்கம் தருவது சிக்கலடைகிறது. எனவே, பொதுவாகச் சுழற்சியின் காலத்திற்கு மேற்பட்ட காலம் அல்லது சமமான காலம் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. இந்தக் காலத்தினும் குறைந்த சராசரியினை எடுக்கும்போது கூறிய சுழற்சிகள் பொருந்திய

நேர்கோடு ஒன்று கிடைக்கும்; 'இந்தச் சுழற்சிகள், சராசரிக் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ளப்படும் காலம் அதிகமாக அதிகமாகக் குறைவுபடும்.'

இந்தச் சுழற்சியின் ஊசல் மாறுபடும்பொழுது காலம் மாறிலீயெனக் கொண்டால், சுழற்சிக்குச் சமமான காலத்தை உடைய நகரும் சராசரி, சிறிய சுழற்சிகளால் பாதிக்கப்படுகின்ற போக்குக்

பட்டியல் 10-3

நேர்கோட்டுப் போக்கை உடைய ஒரு தொடருக்கு நகரும் சராசரிகளைப் பயன்படுத்துவதுபற்றிய விளக்கம்

சுழற்சி உடைய விவரம் (1)	5 குறிப்புகளுக்கு நகரும் சராசரி (2)	10 குறிப்புகளுக்கு நகரும் சராசரி (மையப்படுத்தியது) (3)	3 குறிப்புகளுக்கு நகரும் சராசரி (4)	8 குறிப்புகளுக்கு நகரும் சராசரி (மையப் படுத்தியது) (5)
2				
9			$8\frac{1}{3}$	
14	$12\frac{1}{5}$		14	
19	$15\frac{1}{5}$		$16\frac{2}{3}$	
17	$18\frac{1}{5}$		$17\frac{2}{3}$	$18\frac{3}{8}$
17	$21\frac{1}{5}$	$21\frac{1}{5}$	$19\frac{1}{3}$	$21\frac{3}{16}$
24	$24\frac{1}{5}$	$24\frac{1}{5}$	$23\frac{1}{3}$	$24\frac{3}{8}$
29	$27\frac{1}{5}$	$27\frac{1}{5}$	29	$26\frac{3}{4}$
34	$30\frac{1}{5}$	$30\frac{1}{5}$	$31\frac{2}{3}$	$29\frac{1}{16}$
32	$33\frac{1}{5}$	$33\frac{1}{5}$	$32\frac{2}{3}$	$33\frac{3}{8}$
32	$36\frac{1}{5}$	$36\frac{1}{5}$	$34\frac{1}{3}$	$36\frac{3}{16}$
39	$39\frac{1}{5}$	$39\frac{1}{5}$	$38\frac{1}{3}$	$39\frac{3}{8}$
44	$42\frac{1}{5}$	$42\frac{1}{5}$	44	$41\frac{3}{4}$
49	$45\frac{1}{6}$	$45\frac{1}{5}$	$46\frac{2}{3}$	$44\frac{1}{16}$
47	$48\frac{1}{5}$	$48\frac{1}{5}$	$47\frac{2}{3}$	$48\frac{3}{8}$
47	$51\frac{1}{5}$		$49\frac{1}{3}$	$51\frac{3}{16}$
54	$54\frac{1}{5}$		$53\frac{1}{3}$	
59	$57\frac{1}{5}$		59	
64			$61\frac{2}{3}$	
62				

(3), (5) பத்திகளிலுள்ள குறிப்புகள் இரண்டு குறிப்புகளுக்கான நகரும் சராசரிகளின் சராசரியைக்கொண்டு மையப்படுத்தியது.

கோட்டைத் தரும். சராசரியின் காலம் வட்ட சுழற்சியின் காலத்துக்குச் (அல்லது அதன் மடங்கிற்கு) சமமாக இருக்கும்போது இந்த இரண்டாம் படிவ சுழற்சிகளின் ஊசல் சிறுமமாக இருக்கும். இந்தக் கடைசி இரண்டு ஒழுங்கின்மைகளும் சேரும்போது மாறுபட்ட ஊசல்களையும் நீளங்களையும் உடைய சுழற்சிகள் விவரங்களில் காணப்படும். வட்ட சுழற்சியின் சராசரி நீளத்துக்கோ, அதன் மடங்குக்கோ சமமான

காலத்தை உடைய நகரும் சராசரியானது போக்கினை மிகவும் திருத்தமாக வெளிக்காட்டும்.

போக்கு நேர்கோட்டிலிருந்து விலக்கமடையும்போது புதிய காரணக் கூறு ஒன்று பிறக்கிறது. தொடரின் அடிப்படையான போக்கு மேல்நோக்கிக் குவிந்திருப்பின் (concave upwards) நகரும் சராசரி, போக்கின் உண்மை மதிப்புக்கு எப்போதும் மேம்பட்டிருக்கும்; இதன் எதிர்மறை உண்மையாக இருக்குமானுல், அதாவது போக்கு உள்நோக்கிக் குவிந்திருக்குமானுல், நகரும் சராசரியின் மதிப்பு போக்கின் உண்மையான மதிப்பைவிட எப்போதும் குறைவாக இருக்கும்.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளில் இந்தச் சூழ்நிலை நன்கு விளக்கப்பட்டுள்ளது. 10-4 பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ள விவரங்கள், மூன்ருவது

பட்டியல் 10-4

நேர்கோட்டுப் போக்கில்லாத ஒரு தொடருக்கு நகரும் சராசரியினைப் பயன்படுத்துவதுபற்றிய விளக்கம்

(வளர்ச்சி வீதம்)

x (1)	x^2 (2)	சுழற்சி விவரம் (3)	(2)ஆம் பத்தி +(3)ம் பத்தி (4)	(4)ஆம் பத்தியில் 5 குறிப்புகளுக்கு நகரும் சராசரி (5)	உண்மையான போக்கு மதிப்புகள் $(x^2+6.2)$ (6)
0	0	2	2		
1	1	6	7		
2	4	8	12	12.2	10.2
3	9	10	19	17.2	15.2
4	16	5	21	24.2	22.2
5	25	2	27	33.2	31.2
6	36	6	42	44.2	42.2
7	49	8	57	57.2	55.2
8	64	10	74	72.2	70.2
9	81	5	86	89.2	87.2
10	100	2	102	108.2	106.2
11	121	6	127	129.2	127.2
12	144	8	152	152.2	150.2
13	169	10	179	177.2	175.2
14	196	5	201	204.2	202.2
15	225	2	227	233.2	231.2
16	256	6	262	264.2	262.2
17	289	8	297	297.2	295.2
18	324	10	334		
19	361	5	366		

பத்தியில் உள்ளதைப்போல நிலைத்த காலமும் ஊசலும் கொண்ட சுழற்சியினை மேல்நோக்கிக் குவிந்திருக்கும்—அதாவது சீராக

அதிகரிக்கும்—போக்கு நேர்கோட்டில் பொருத்தியதால் கிடைக்கும் மதிப்புகளாகும். சுழற்சியின் விளைவுகளை நகரும் சராசரி அறவே நீக்க முடியுமானால் சராசரியிலிருந்து கிடைக்கும் மதிப்புகள், ஒவ்வொரு சுழற்சியிலிருந்தும் கிடைக்கும் ஐந்து மதிப்புகளின் சராசரி மதிப்போடு (6.2), (2)ஆம் பத்தியில் தரப்பட்டுள்ள $y = x^2$ என்ற சார்பலனின் மதிப்புகளைக் கூட்டியதற்குச் சமமாக இருக்கும்.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் நகரும் சராசரிகளின் மதிப்புகள், உண்மையான போக்கின் மதிப்புகளைவிட அதிகமாக இருக்கின்றன; இவ்வகைத் தொடர்களில் இத்தகைய சிதைவு எப்போதும் ஏற்படும்.

பட்டியல் 10-5

நேர்கோட்டுப் போக்கில்லாத ஒரு தொடருக்கு நகரும் சராசரியினைப் பயன்படுத்துவதுபற்றிய விளக்கம்.

(குறைவு வீதம்)

x	$\sqrt{x}$	சுழற்சி விவரம்	(2)ஆம் பத்தி +(3)ஆம் பத்தி	(4)ஆம் பத்தியில் 5 குறிப்புகளுக்கு நகரும் சராசரி	உண்மையான போக்கு மதிப்புகள் $(\sqrt{x} + 6.2)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	0	2	2.00		
1	1.00	6	7.00		
2	1.41	8	9.41	7.428	7.61
3	1.73	10	11.73	7.876	7.93
4	2.00	5	7.00	8.166	8.20
5	2.24	2	4 24	8.414	8.44
6	2.45	6	8.45	8.634	8.65
7	2.65	8	10.65	8.834	8.85
8	2.83	10	12.83	9.018	9.03
9	3.00	5	8.00	9.192	9.20
10	3.16	2	5.16	9.354	9.36
11	3.32	6	9.32	9.510	9.52
12	3.46	8	11.46	9.658	9.66
13	3.61	10	13.61	9.800	9.81
14	3.74	5	8.74	9.936	9.94
15	3.87	2	5.87	10.068	10.07
16	4.00	6	10.00	10.194	10.20
17	4.12	8	12.12	10.318	10.32
18	4.24	10	14.24		
19	4.36	5	9 36		

10-5 பட்டியலில் மேல்நோக்கிக் குவிந்துள்ள—அதாவது ஒரே சீரான குறையும் வீதத்தில் அதிகரிக்கும்—போக்கினை வெளியிடும் நேர்கோட்டின்மீது, அதே சுழற்சி மதிப்புகளைப் பொருத்துவதனால் கிடைக்கும் முடிவுகள் தரப்பட்டுள்ளன. இந்த எடுத்துக்காட்டில்

வட்ட சுழற்சிகளை முற்றிலும் நீக்கினால் (6.2)-ல் காணப்படும் ஐந்து குறிப்புகளின் சராசரி மதிப்புகளோடு $y = \sqrt{x}$ என்ற சார்பலன் மதிப்புகளைக் கூட்டியதற்குச் சமமான மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

இதில், நகரும் சராசரியின் மதிப்புகள் மிகவும் குறைந்துள்ளன. x-ன் மதிப்பு குறையக்குறைய இந்தச் சிதைவு அதிகமாகும். ஏனெனில், இத்தகைய மதிப்புகளை வளர்ச்சி விகிதத்தின் குறைவு மிகவும் பாதிக்கும்.

இதுவரை அறிந்த கருத்துகளால், நகரும் சராசரியின் காலம் பொதுவாகச் சுழற்சியின் காலத்துக்குக் குறைவுபடாமல் இருக்க வேண்டும் என்பதையும், விவரங்கள் ஒழுங்கின்றிக் காணப்பட்டால், நகரும் சராசரியின் காலம் சுழற்சியின் காலத்தின் உயர் மடங்குக்குச் சமமாக இருத்தல் நல்லது என்பதையும் அறிந்தோம். கணிப்பில் எடுத்துக்கொள்ளப்படும் காலம் அதிகரிக்க அதிகரிக்க, சராசரியின் உறுதி நிலைக்கிறது. ஆனால், அடிப்படைப் போக்கானது குறிப்பிடத் தக்க அளவு நேர்கோட்டு அமைப்பிலிருந்து விலகி, மேல் நோக்கியோ கீழ்நோக்கியோ செல்கிற வளைகோட்டு அமைப்பினை உடையதாக இருப்பின், சராசரியின் காலத்தை அதிகரிக்க அதிகரிக்க நகரும் சராசரியினைப் பயன்படுத்துவதில் உள்ள பிழையும் அதிகரிக்கும். அத்தகைய சமயங்களில் போக்கினை அளக்க நகரும் சராசரி பயன்படுத்தப்படுமானால் சராசரியின் காலம், சுழற்சிகளை சராசரிப்படுத்துவதில் சிறுமமாக இருக்கவேண்டும்; அதாவது, ஒரு சுழற்சியின் சராசரி நீளத்திற்குச் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

ஆனால், நடைமுறையில் இந்த வேறுபட்ட சூழ்நிலைகள் யாவும் மிகவும் சிக்கலான விதத்தில் பிணைந்து காணப்படும். சுழற்சிகள் ஊசலாலும் நீளத்தாலும் வேறுபடுகின்றன என்ற உண்மை, மிகவும் நீண்ட காலத்தை அடிப்படையாகக்கொண்ட நகரும் சராசரி தேவை என்பதை உணர்த்துகிறது; சிறிய காலத்துக்குப் போக்கு, நேர்கோட்டு வடிவத்தில் இருக்காது என்பதனால் குறைந்தகால சராசரியே அதிகமான மேல்நோக்கிய அல்லது கீழ்நோக்கிய சிதைவு நேராது தடுக்கும். செயல்முறை வேலையில், நகரும் சராசரியைக் காலத்துக்கொத்து (up to date) அமைப்பது என்பது இயலாத காரியம் என்பதையும் கவனிக்கவேண்டும். சராசரிக்கு, மேற்கொள்ளப்படுகின்ற காலம் குறைவாக இருக்க இருக்க, பின்தங்குதல் (lag) குறைவாக இருக்கும். இப் பல கட்டுப்பாடுகளையும் மனத்தில்கொண்டு கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஏற்ற காலத்தினைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

பன்னெடுங்காலப் போக்கினை வெளியிடுவதே நகரும் சராசரிகளின் நோக்கம் என்பதை, முந்திய அத்தியாயத்தில் புனைந்து

கொள்ளப்பட்டது. இயைபிலா ஏற்ற இறக்கங்களை விலக்கி, விவரங்களை இழைவுபடுத்துவதற்கும் நகரும் சராசரியையே பயன் படுத்தலாம். இந்தக் காரியத்துக்கேயெனில், சுழற்சியின் சராசரி நீளத்திற்குக் குறைவான காலத்தைக்கொண்ட நகரும் சராசரி அமைக்கவேண்டும்.

வேறுபட்ட காலங்களையுடைய நகரும் சராசரிகள்பற்றிய விளக்கம்: கார் ஏற்றுமதிக் கட்டணம்பற்றிய புள்ளி விவரங்களை மீண்டும் எடுத்துக்கொள்வோம். (409ஆம் பக்கத்தில்) 10.2 படத்தில், வேறுபட்ட நகரும் சராசரிகளுக்கு வரையப்பட்டுள்ள நேர்கோடுகளை ஆராய்ந்தால், அவற்றுக்கிடையே உள்ள வேறு பாடுகள் நன்கு விளங்கும். மூல விவரங்களை நெருக்கமாக வரை படத்தில் பின்பற்றுவது மூன்றாண்டு சராசரிகளே. இது நாம் முன்னரே எதிர்பார்த்ததுதான். ஒன்பதாண்டு சராசரிக் குறிப்புகள் போக்கினை மிக இழைவான நேர்கோட்டால் காட்டுவது ஒருபுற மிருக்க, மற்றொருபுறம், இது விவரங்களிலிருந்து மிகவும் விலகிச் சென்றுவிடுகின்றது. குறிப்பாக, 1923-லிருந்து 1930-வரை, 1931-லிருந்து 1935-வரை ஆகிய காலங்களில் மிகவும் அதிகமாக விலகிச் செல்வதைக் காணலாம். மூலத் தொடரில் 1929-க்குப் பின்னரும் 1932-க்குப் பின்னரும் நேர்ந்த இயக்கங்களின் கூரிய மாற்றங்களே இந்த விலக்கங்களுக்குக் காரணமாகும்.

வெவ்வேறு நகரும் சராசரிகளின் சிறப்புகளை ஒப்பிட்டு ஆராய் வதற்கு இந்தக் காலத்தில் நடைபெற்ற வாணிகத்தைப்பற்றிய செய்திகள் உதவும். கார் போக்குவரத்துக் கட்டண அளவு பொதுவான வாணிகச் சூழ்நிலைக்கு ஏற்றதொரு குறியீடு ஆகும்; ஏனெனில், தொழில் இயக்கத்தினாலும், ஊக வாணிகச் சூழ்நிலைகளாலும் குறிப்பாகப் பாதிக்கப்படும் இந்தத் தொடரில் சிறிய பெரிய வாணிகச் சுழற்சிகள் பிரதிபலிக்கப்படும். 1918-லிருந்து 1953-வரையான கால இடைவெளியில் வாணிகச் சுழற்சிகளின் எண்ணிக்கையைக் கொண்டு, சுழற்சி விலக்கத்தினை அளப்பதற்கு எந்த நகரும் சராசரி ஏற்றது என்பதனைத் தீர்மானிக்கலாம். இந்த எடுத்துக்காட்டில் நடைமுறையில் தெளிந்த ஒரு முடிவிலிருந்து பின்னோக்கி வேலை செய்கிறோம். இந்த முறையை எப்போதும் கையாளமுடியும் எனச் சொல்வதற்கில்லை.

வாணிகப் பின்னடைவுக்குப்பின் மீண்டும் எப்போது புது வளர்ச்சி தோன்றுகிறதோ அந்த ஆண்டை சுழற்சி தோன்றும்

27

துவக்க இடமாகக் கொண்டால் பொதுவான வாணிக நடவடிக்கையின் சுழற்சிகளைப் பின்வருமாறு வேறுபடுத்தி அறியலாம் :[2]

1919—1921	1932—1938
1921—1924	1938—1946
1924—1927	1946—1949
1927—1932	1949—1954

மூன்றுண்டு நகரும் சராசரிகளால் ஏற்படும் சுழற்சிகள் மிகப்பல ஆதலால் இங்கே கூறப்படவில்லை. உண்மையில் இந்தச் சராசரிகளிலிருந்து விலக்கங்கள், சிறிய குறைந்தகால ஏற்ற இறக்கங்களால் அதிகமாக பாதிக்கப்படுவதால், பொது அளவில் அவற்றுக்கிசைந்த பொருளாதார சுழற்சிகளின் இயக்கம்பற்றி மிகக் குறைந்த செய்தியினையே வெளியிடும். ஐந்து ஆண்டு, ஏழு ஆண்டு, ஒன்பதாண்டுச் சராசரிகளிலிருந்து விலக்கங்களாகப் பின்வரும் சுழற்சிகள் குறிக்கப் பட்டுள்ளன :

ஐந்து ஆண்டு நகரும் சராசரிகளில் இருந்து கிடைக்கும் விலக்கங்களின் சுழற்சிகள்	ஏழு ஆண்டு நகரும் சராசரிகளில் இருந்து கிடைக்கும் விலக்கங்களின் சுழற்சிகள்	ஒன்பது ஆண்டு நகரும் சராசரிகளில் இருந்து கிடைக்கும் விலக்கங்களின் சுழற்சிகள்
1921—1924	1921—1932*	1922—1932*
1924—1927	1932—1938	1932—1938
1927—1932	1938—1945	1938—1946
1932—1938	1945—1949	1946—
1938—1943		
1943—1946		
1946—1949		
1949—		

*இந்தச் சுழற்சிகள் ஒவ்வொன்றின் துவக்க கீழ் அளவுகள், 1921-லும், 1922-லுந்தான் இருந்தன என்பதைத் தெளிவாகக் கூறுவதற்கில்லை.

இவ்விதமாகத் தீர்மானிக்கப்பட்ட சுழற்சிகளின் தொடருக்கும், பர்ன்ஸூம் (Burns) மிட்சலும் (Mitchell) வேறுபடுத்திக் கண்ட ஆதார சுழற்சிகளுக்கும் உள்ள வேறுபாடுகளே நகரும் சராசரியின் சிறப்புத் தன்மைகளை வெளியிடுகின்றன. ஏழு ஆண்டு, ஒன்பதாண்டுச் சராசரிகள் குறைந்த சுழற்சிகளைக் காட்டுவதில்லை. 1920-லிருந்து

[2] ஆர்தர் எஃப். பர்ன்ஸ் (Arthur F. Burns), வெஸ்லி சி. மிட்செல் (Wesley C. Mitchell) ஆகிய இருவரும் செய்த அமெரிக்க வாணிகச் சுழற்சியின் கால வரையறையையொட்டியது இத் தேதிகள். பர்ன்ஸ், மிட்செல் பார்க்கவும் : து.நா.ப. 13, பக்கம் 78.

1930-வரையான காலத்தில் நிகழ்ந்த இச் சுழற்சிகளை (1921-24, 1924-27), இந்த இரு தொடர்களும் காட்டுவதில்லை. ஐந்தாண்டு நகரும் சராசரிகளிலிருந்து கிடைக்கும் விலக்கங்கள் இந்தச் சிறிய சுழற்சிகளை வரையறை செய்கின்றன. மற்றொருபுறத்தில் 1943-ல் போக்கு நேர்கோட்டுக்கும் குறைந்த விலக்கத்தை இந்த ஐந்தாண்டுத் தொடர் காட்டுகிறது; பர்ன்ஸ்-மிட்சல் (Burns-Mitchell) கால வரிசையில் குறிக்கப்பட்ட அடிப்படைச் சுழற்சியான 1938-46-ஐ இது இரு 'சுழற்சிகளாக'க் குறித்துக் காட்டுகிறது.

வாணிகத் துறையில் ஏற்படும் சிறிய மாற்றங்களை அறிவதில் நாம் அக்கறை காட்டினால், அதாவது 3-லிருந்து 5ஆண்டுகளுக்குள் சராசரி காலங்களைக்கொண்டு சுழற்சிகளை ஆராய்வதானால், ஒப்பீட்டு அடிப்படையில் இன்னும் குறைந்தகால இடைவெளியில் நகரும் சராசரிகளை எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். ஐந்து ஆண்டுச் சராசரி இங்கே பொருத்தமானது. இன்னும் நீண்டகால இடைவெளிகள் சராசரிகள் போக்கின் இயக்கங்களை மேலும் தெளிவாகக் காட்டலாம்; ஆனால், வாணிகச் சுழற்சிகளாக முறையாகப் பாகுபாடு செய்யப்பட்ட ஏற்ற இறக்கங்களைக் காட்டாமல் போகலாம். எனினும் நீண்ட சுழற்சிகளை—அதாவது ஒன்பது, பதினொன்று, ஐம்பது ஆண்டுகள்வரையான சராசரிக் காலத்தைக் கொண்டவைகளை—நிறுவ அண்மையில் மேற்கொள்ளப்பட்ட முயற்சிகளைக் குறிப்பிடவேண்டும். அத்தகைய சுழற்சிகளை ஆராய்வதற்கு ஏற்ற கால இடைவெளிகளைக்கொண்ட நகரும் சராசரிகள் பயன்படுத்தப்படும்.

பொதுவாக, நகரும் சராசரிக்குள்ள பெரிய சிறப்பு அதன் நெகிழ்வுத் தன்மையே. நெடுங்காலப் போக்கினைக் கணிதரீதியில் வளைகோடுகளாக அமைக்கையில், கால இடைவெளியை இரண்டு அல்லது மூன்று உட்பிரிவுகளாகப் பிரித்து ஒவ்வொன்றுக்கும் தனித் தனியே வளைகோடுகளைப் பொருத்தவேண்டிய தேவை சில சமயங்களில் ஏற்படுகிறது; மாறுபடும் சூழ்நிலைகளும் மிகவும் கூர்மையாக வேறுபடும் வளர்ச்சி அல்லது குறைவு விகிதமும் இதற்குக் காரணங்களாகும். இத்தகைய மாற்றங்கள் ஏற்படும்போது, நகரும் சராசரிகள், புதிய சூழ்நிலைக்கேற்ப நெகிழ்ந்து பொருந்தும் சிறப்பைப் பெற்றிருக்கின்றன; கோவைகளைப் பயன்படுத்தி அளப்பதைவிட, இதன்மூலம் நெடுங்காலப் போக்கினை, சிறப்பாக அளத்தல் முடியும்.

தனிப்பட்ட அல்லது நிறையிட்ட நகரும் சராசரிகள், பல்வகையான சேர்க்கையில், பொருளாதாரக் காலத் தொடர்வரிசைகளை ஆய்வதற்குப் பலவிதமாகப் பயன்படுகின்றன. ஃபிரடரிக் ஆர். மெக்காலே (Frederick R. Macaulay) என்பவர் எழுதிய 'திஸ்மூதிங் ஆஃப்

டைம் சீரீஸ்' (The Smoothing of Time Series)[3] என்ற கட்டுரையில் இந்தப் பயன்களையும் வெவ்வேறு பணிகளுக்கேற்ற பொருத்தமான செயல்முறைகளையும்பற்றிய விவரம் காணலாம்.

கணித வளைகோடுகளால் பன்னெடுங்காலப் போக்கினை அமைத்துக்காட்டல்

பலவகையான விவரங்களில், நகரும் சராசரியினை அடிப்படையாகக்கொண்ட நேர்கோட்டைவிட, கணிதக்கோவையொன்றால், பன்னெடுங்காலப் போக்கினை வெளியிடுதல் ஏற்றதாக இருக்கலாம். அதாவது வளர்ச்சி (அல்லது சரிவு), மாறிலியான தனித்த (absolute) அதிகரிப்புகளால் (குறைபாடுகளால்) இருக்குமானால் பன்னெடுங்காலப்போக்கினை நேர்கோடு மிகவும் பொருத்தமாகக் காட்டும்; அல்லது மூலதன வளர்ச்சியைப்போல—அதாவது கொடுக்கப்பட்ட அசல் கூட்டுவட்டி விகிதத்தில் வளர்வதுபோல—மாறாத சதவிகிதங்களால் வளர்ச்சி இருக்கலாம்; அப்போது அடுக்கு வளைகோடு (exponential curve) அத்தகைய நீண்டகாலப் போக்கினை விளக்கிக் காட்டும். ஒரு வரலாற்று மாறியின் நெடுங்காலப் போக்கினைக் கணிதக் கோவையொன்று வெளியிடுமானால், அத்தகைய கோவையினைப் பயன்படுத்தியே ஆய்வு, விளக்கம், உய்த்துணர்வு ஆகிய வேலைகளை எளிதில் செய்ய முடியும்.

சமூக, பொருளாதார, வாணிகத் தொடர்வரிசைகளைக் கணிதரீதியில் அமைத்துக் காட்டும்போது, வளர்ச்சிக்கு ஓர் அடிப்படை 'விதி' இருப்பதாகப் புனைந்துகொள்ளப்படுகிறது. கண்டறியப்பட்ட ஒழுங்கின் தன்மையை 'விதி' எனக் கருதுவதிலே பிழையொன்றுமில்லை. கண்டறிந்த செய்தியை, கணிதக்கோவை என்ற குறுக்கெழுத்து அமைப்பால் காட்டுவதும் சரியே. சில சமயங்களில் சமூகப் பொருளாதார இயல்களில் மாற்றங்களைக் குறித்து இன்னும் திருத்தமாக அமைக்கப்பட்ட விதிகள் நிறுவப்படலாம்; நடைமுறையில் கண்டறியப்பட்ட ஒழுங்குகளைவிடக் கணிதக் கோவைகள் சில வளர்ச்சி விதியினை நன்கு காட்டுவதாகச் சில மாணவர்கள் கருதுகின்றனர். இந்தக் கருத்துக்கு ஏற்ற ஆதாரமில்லை. இப்போதைக்கு, நடைமுறையில் உருவாக்கப்பட்ட நகரும் சராசரியாலும் அல்லது கணிதக்கோவையாலும் தரப்படும் பன்னெடுங்காலப் போக்கினை, முன்னறிவிப்பின்றி மாறக்கூடிய, நடைமுறையில் நிறுவப்பட்ட ஒரு கணித ஒழுங்கு என்று கருதுவதே பொருத்தமானது.

3 து.நா.ப. 95.

பன்னெடுங்காலப் போக்கினைத் தீர்மானிக்கும் கணக்கு ஒன்றைச் செய்ய ஏற்ற வளைகோட்டு வகையினைத் தேர்வதே முதற் படியாகும். ஒருகால் இதுவே நமது கணக்கில் மிகவும் கடினமான பகுதியாக இருக்கலாம்; நிச்சயமாக இந்தப் பகுதியில்தான் ஒருவரது தனிப்பட்ட கருத்துக்கு நேரிடையாக மதிப்பளிக்கும் தேவை பிறக்கிறது. ஏனெனில், ஏற்ற வளைகோட்டினைத் தேர்வதில் எவ்வித சட்ட திட்டங்களும், தர நிர்ணயிப்பு முறைகளும் துணையாக அமைவதில்லை. முக்கியமான வளைகோட்டு வகைகளையும் அவற்றைப் பொருத்தும் முறைகளையும் கண்டறிந்தபின் இதுபற்றி மேலும் கூறுவோம். தற்போது இரண்டாவது அத்தியாயத்தில் வர்ணிக்கப்பட்ட வகைகளில், ஒன்றைச் சேர்ந்த வளைகோட்டை அல்லது தொடர்புள்ள ஒரு வடிவத்தினைத் தேர்ந்தெடுப்பதாக வைத்துக்கொண்டு, அதனைக் கொடுக்கப்பட்ட விவரத்துக்குப் பொருத்துகின்ற செயல்முறை வேலை எதிர்நோக்கி இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

உடன்தொடர்பு முறைகளைப்பற்றி முந்திய அதிகாரத்தில் விவாதித்ததுபோன்ற பிரச்சினையே இங்கும் எழுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டில் a-க்கும், b-க்கும் மிகவும் வாய்ப்பான மதிப்புகளைக் குறைந்த வர்க்கமுறைமூலம் தீர்மானிக்கலாம் என அறிந்தோம்; கொடுக்கப்பட்ட காலத் தொடர்வரிசையினை ஆராய்ந்து கண்ட பன்னெடுங்காலக் கோவையின் அமைப்பு நேர்கோட்டு அமைப்பானால், $y = a + bx$ (x என்பது காலம்; y என்பது வரலாற்று மாறி) என்ற வகையில் அமைந்த சமன்பாட்டில் a-க்கும் b-க்கும் மிகவும் வாய்ப்பான மதிப்புகளைப் பெறவேண்டும். பொதுவாகப் பன்னெடுங்காலப் போக்கில், இந்த அளவைகளைப் பெறுவதற்குக் குறைந்த வர்க்கமுறைதான் கையாளப்படுகிறது; ஆனால், இந்த முறைக்குத் தர்க்கரீதியான அடிப்படைச் சூழ்நிலைகள், காலத் தொடர்வரிசையிலே உருவாவதில்லை. ஏனெனில், காலரீதியாக வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கண்டறிந்த குறிப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாதன அல்ல; அதனால் இயைபுடைய காரணக் கூறுகளின் சக்தியினாலேயே பொருத்தப்படவிருக்கும் கோவையிலிருந்து விலக்கங்கள் ஏற்படக்கூடும். எனவே, நடைமுறை வசதியை முன்னிட்டும், சுருக்கமாகச் செய்யக்கூடிய எளிமையை முன்னிட்டும் கால வரிசையில் ஒழுங்கு செய்யப்பட்ட குறிப்புகளுக்குக் கணித வளைகோட்டைப் பொருத்தும்போது; குறைந்த வர்க்க முறையைப் பயன்படுத்துகிறோம். மேற்கூறிய காரணங்களைக் காட்டி இம் முறை பயனுவதற்கு அமைதி கூறலாம்; என்றாலும், குறைந்த வர்க்கமுறையைக் கையாள்வதில் ஏற்படும் குறைபாடுகள், கணித நெடுங்காலப் போக்குக் கோடுகளை நடைமுறையில் பயனுள்ள கோவைகளாகக் கருதவேண்டுமே அல்லாது, காலத்தால் நிகழும்

மாற்றத்தைக் காரியகாரணரீதியில் வெளியிடுவதாக அமைந்த விதிகள் எனக் கருதுவது பொருந்தாது என்ற கருத்தை மீண்டும் வலியுறுத்துகின்றன.

குறைந்த வர்க்கமுறையினை (ஒன்பதாவது அதிகாரத்தில் கண்டதுபோல) கையாண்டு, நேர்கோட்டினைப் பொருத்தும்போது இரண்டு இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளை ஒரேகாலத்தில் தீர்வுகாண வேண்டியிருப்பதை முன்னர்க் கண்டோம். காலத் தொடர்வரிசையில் இம் முறையினைக் கையாளும்போது, கணிப்புகளை எளிமையான முறையில் செய்யமுடியும். இடைவிடாத காலத் தொடர்வரிசையினைக் குறிக்கும்போது இருப்பதுபோல, x மதிப்புகள் அடுத்தடுத்த எண்களாக (consecutive numbers) இருக்குமானால், இடைநிலை மதிப்பில் மூலத்தை எடுத்துக்கொள்ளலாம். குறிப்புகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படையாய் இருக்கும்பொழுது இதுவே நடு உறுப்பாகவும் இருக்கும். அப்போது $\Sigma(x)$ மதிப்பு சுழியாக இருக்கும். நார்மல் சமன்பாடுகள்,

$$\Sigma(y) = na$$
$$\Sigma(xy) = b\Sigma(x^2)$$

என்று ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு காலத் தொடர்வரிசை 1938-லிருந்து 1954-வரை ஆண்டுக் கணக்கில் அமைந்திருக்குமானால், 1946-ல் மூலத்தை எடுத்துக்கொள்ளலாம். அப்போது 1945-க்கு ஏற்ற x மதிப்பு -1 ஆகவும் 1947-ல் $+1$ ஆகவும் மற்றும் இதுபோலவும் இருக்கும். விவரங்களை இதுபோன்று எடுத்துக்கொள்ளும்போது a-க்கும், b-க்கும் தீர்வு காண்பது எளிதாகிறது. ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்படை எண்ணாக இருக்கும்போதுங்கூட, காலத்தை (x மாறி) அரையாண்டு அலகுகளால் அளந்தால் மேற்கூறிய முறையையே இப்போதும் கையாளலாம்.

x-ன் மதிப்புகள் 1-லிருந்து துவங்கி அடுத்தடுத்த நேர் எண்களாக இருக்குமானால் $\Sigma(x)$, $\Sigma(x^2)$ ஆகியவற்றில் மதிப்புகளை எளிதில் தீர்மானிக்கலாம். முதல் n இயற்கை எண்களின் கூடுதல் $\frac{n(n+1)}{2}$. இம் முறையில் ஒன்றிலிருந்து ஐந்துவரை ஆன எண்களின் கூடுதல் $\frac{5(5+1)}{2}$; அதாவது 15 ஆகும். இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளில் $\Sigma(x)$-க்கு இந்த மதிப்பினைத் தரலாம். இதேபோல, முதல் n இயற்கை எண்களின் வர்க்கக் கூடுதல் $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ ஆகும். அதாவது ஒன்றிலிருந்து ஐந்துவரை ஆன எண்களின்

வர்க்கக் கூடுதல் $\frac{250+75+5}{6} = 55$ ஆகும். இந்தக் கோவைகளால் இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளில் $\Sigma(x^2)$-க்குப் பதிலிட்டால்,

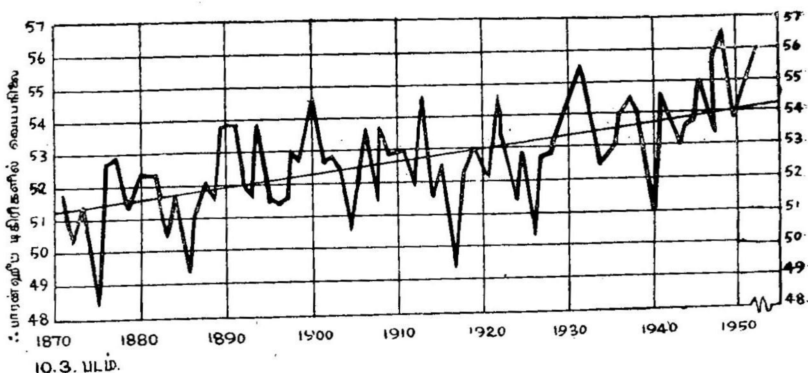
$$\Sigma(y) = na + b\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \quad (10.1)$$

$$\Sigma(xy) = a\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + b\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)$$ எனக்

கிடைக்கும். முதலில் கொடுத்த சமன்பாடுகளைக்கொண்டு கணிப்புகள் செய்வதைவிட இவ்விதம் உள்ள சமன்பாடுகளில் தீர்வு செய்வது எளிது. ஆண்டுகளை, இவ்விதமாக ஒன்றிலிருந்து துவங்கி அடுத்தடுத்து எண்களாக மதிப்பிட்டு, காலத் தொடர் வரிசைக்கான விவரங்களைக் கையாளலாம்.

நேர்கோட்டுப் போக்குக்கு எடுத்துக்காட்டுகள்

10.3 படமும், 10.4 படமும் நெடுங்காலப் போக்கினை வரையறை செய்வதற்காக நேர்கோட்டினைப் பொருத்திய இரண்டு காலத் தொடர்வரிசைகளைக் காட்டுகின்றன. 10.3 படத்தில் 1871-லிருந்து



10.3. படம்.

நியூயார்க் நகரில், 1871—1953 ஆண்டுகளில், ஆண்டின் சராசரி தட்பவெப்ப நிலைகள் போக்கும் நேர்கோடும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

1953வரை உள்ள ஆண்டுகளில் நியூயார்க் நகரத்தில், ஆண்டின் சராசரி தட்பவெப்ப நிலை காட்டப்பட்டிருக்கிறது. 1871-லிருந்து 1949-வரை உள்ள விவரத்துக்குப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு $y = 52.482 + 0.0346x$ என்று இருக்கிறது; இதில் y என்பது ∴ பாரன்ஹீட் டிகிரிகளில் வெப்பநிலை; x என்பது 1910-ஐ மூலமாகக்

கொண்டு, ஆண்டுகளாகக் காலத்தினை அளப்பது.[4] நேர்கோட்டின் பயனுக்கு இது நல்லதோர் எடுத்துக்காட்டு. கடந்த 80 ஆண்டுகளில் நியூயார்க்கில் சராசரி வெப்ப நிலையில் மெதுவான அதிகரிப்பு இருப்பதைக் காணலாம். மேற்கூறிய சமன்பாடு இந்த அதிகரிப்பினை எளிய முறையில் கூறுகிறது; இதிலிருந்து சராசரியாக வெப்பநிலை ஆண்டுதோறும் 0.0346 ஃபாரன்ஹீட் டிகிரி அதிகரிப்பு பெற்றது என்பதைத் தெரிந்துகொள்கிறோம். அடிப்படையில் இதை ஒரு 'விதி' என்று நாம் கூறமுடியாது. ஏனெனில், இந்த மாற்றத்திற்குக் காரணகாரியரீதியில் அடிப்படை கிடையாது. கடந்தகால அநுபவத்தில் கண்டறிந்த இயக்கத்தையே, எதிர்காலத்திலும் எதிர்பார்க்கிறோம் என்பதைத் தவிர, இதற்குச் சமாதானம் கிடையாது. எனினும், வானிலை வரலாற்றின் ஒரு பகுதியைச் சுருக்கமாக வெளியிடும் அறிக்கை என்ற அடிப்படையில் இந்தச் சமன்பாடு பயனுடையது என்பது வெளிப்படை. இவ்விதமாகக் காலத் தொடர் இயக்கத்தை வரைகட்டிக் கூறிவிட்டால், மேற்கொண்டு பல சிக்கல்களும், எந்தக் காரணக் கூறுகளைக்கொண்டு இவ்விதம் இயக்கம் நடைபெறுகிறது என்பதற்கான ஆராய்ச்சியும் தோன்றியே தீரும்.

10.4 படத்திலுள்ள வரைபடத்தில், 1935-லிருந்து 1953 ஆண்டுவரை வேளாண்மையில் ஈடுபட்டோரது (குடும்பத் தொழிலாளர்களும் கூலிவேலை செய்பவர்களும் சேர்ந்த) எண்ணிக்கை காட்டப்பட்டுள்ளது. இந்தத் தொடர்வரிசைக்குப் பன்னெடுங் காலப் போக்கின் நேர்கோட்டினைப் பொருத்தி, செயல்முறையை எடுத்துக்காட்டி விளக்குவோம். 10-6 பட்டியலில், கண்டறிந்த குறிப்புகளிலும், பொருத்துவதற்குத் தேவைப்படுகிற மதிப்புகளும், நெடுங்காலப் போக்கின் மதிப்பாகக் கண்டறிந்தவைகளும் தரப்பட்டுள்ளன. (2), (5) பத்திகளில் தரப்பட்டுள்ள விவரங்கள் கணிப்பில் பயன்படுத்தப்படும்.

தேவைப்படும் மாறிலிகளைத் தீர்மானிப்பதற்காகத் தீர்வு செய்யப்படவேண்டிய சமன்பாடுகள் (320ஆம் பக்கம் பார்க்க)

$$\Sigma(y) = Na + b\Sigma(x)$$
$$\Sigma(xy) = a\Sigma(x) + b\Sigma(x^2)$$

என்ற அமைப்பில் கிடைக்கும். கண்டறிந்த மதிப்புகளிலிருந்து

4 இந்தத் தட்பவெப்ப நிலையைப்பற்றிய புள்ளிவிவரம், யு. எஸ். டிபார்ட்மென்ட் ஆஃப் காமெர்ஸ், வெதர் பீரோ (Weather Bureau, U. S. Department of Commerce) வெளியிட்டான, 'Local Climatological Summary, New York City, N. Y.' எனும் நூலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டது.

பட்டியல் 10-6

அமெரிக்காவில் வேளாண்மை வேலைவாய்ப்பு : 1935–1953* வரை வேளாண்மையில் ஈடுபட்டோரது சராசரி எண்ணிக்கை

போக்குக் கோட்டினைப் பொருத்துவதற்குத் தேவையான மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை

ஆண்டு	x	y வேலையில் ஈடுபடும் நபர்கள் (ஆயிரங்களில்)	xy	x^2	y_c வேலையில் ஈடுபட்டோரின் (நேர் கோட்டு) போக்கு மதிப்புகள் (ஆயிரங்களில்)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1935	1	12,733	12,733	1	12,269
1936	2	12,331	24,662	4	12,072
1937	3	11,978	35,934	9	11,875
1938	4	11,622	46,488	16	11,677
1939	5	11,338	56,690	25	11,480
1940	6	10,979	65,874	36	11,283
1941	7	10,669	74,683	49	11,086
1942	8	10,504	84,032	64	10,889
1943	9	10,446	94,014	81	10,692
1944	10	10,219	102,190	100	10,495
1945	11	10,000	110,000	121	10,298
1946	12	10,295	123,540	144	10,100
1947	13	10,382	134,966	169	9,903
1948	14	10,363	145,082	196	9,706
1949	15	9,964	149,460	225	9,509
1950	16	9,342	149,472	256	9,312
1951	17	8,985	152,745	289	9,115
1952	18	8,669	156,042	324	8,918
1953	19	8,580	163,020	361	8,721
மொத்தம்	190	199,399	1,881,627	2,470	

$N = 19$ $\Sigma(y) = 199{,}399$

$\Sigma(x) = 190$ $\Sigma(xy) = 1{,}881{,}627$

$\Sigma(x^2) = 2{,}470$

* குடும்பத் தொழிலாளர்களும் கூலிவேலை செய்பவர்களும்

ஆதாரம் : Farm Labor, Agricultural Marketing Service, USDA Jan. 13, 1954.

தேவைப்பட்ட மதிப்புகளைப் பதிலிட

$$199,399 = 19a + 190b$$
$$1,881,627 = 190a + 2470b$$

எனக் கிடைக்கும். அதிலிருந்து,

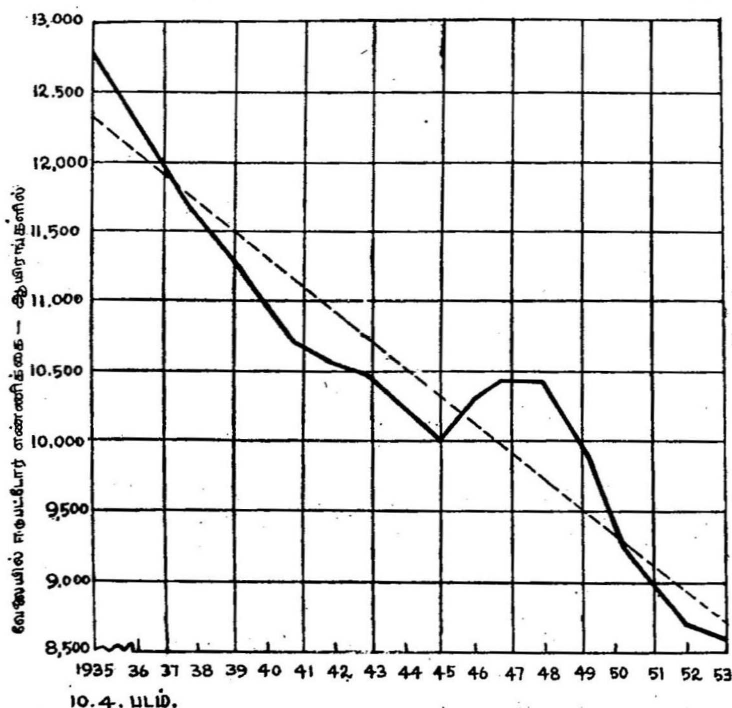
$$a = 12,465.965$$
$$b = -197.128$$

எனக் கிடைக்கும். எனவே, 1934ஐ மூலமாகக்கொண்டு மிகச் சிறப்பாகப் பொருந்தும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை

$$y = 12,466.0 - 197.1x$$

எனப் பெறலாம்.

இதுபோன்று சமன்பாட்டால் கிடைத்த போக்கு மதிப்புகள் 10-6 பட்டியலில் (6) பத்தியில் காட்டப்பட்டுள்ளன. 10.4 படத்தில்



10.4. படம்.

1935—1953-ல், அமெரிக்காவில் வேளாண்மையில் ஈடுபட்ட நபர்களின் சராசரி எண்ணிக்கை—ஆயிரக்கணக்கில்

உள்ள வரைகோட்டை ஆராய்வதன்மூலம் பொருத்தப்பட்டுள்ள நேர்கோடு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட காலத்துக்குத் தொடர்வரிசை

யின் போக்கினைப் பொருத்தமாக வெளியிடுகிறது என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம். வேளாண்மை வேலைவாய்ப்புகள் தொடர்ந்து குறைந்து கொண்டே வருகின்றன ; யுத்தத்திற்குச் சற்று முந்திய காலத்தில் தான் இப் போக்கில் ஒடிசல் காணப்படுகிறது. சராசரியில் ஆண்டுக்கு 197,000 வீதம் வேளாண்மையிலிருந்து விலகிச் செல்வதாக இயக்கம் காட்டப்பட்டுள்ளது. ஆய்வுக்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட காலம் மிகவும் குறுகியதே. பொதுவாக, தொடரில் கண்டறிந்த குறிப்புகள் அதிகமாக அதிகமாக, பன்னெடுங்கால இயக்கத்தினை, போக்கு நேர்கோட்டால் வெளியிடுவதில் நமது நம்பிக்கை அதிகமாகும். இந்த எடுத்துக்காட்டில் அமெரிக்கநாட்டு வேளாண்மையில், இயந்திர சாதனங்கள் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்பட்ட ஒரு காலம் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டது. எனவே, வேலைவாய்ப்புக் கோட்டிற்கு ஒரு திருத்தமான அடிப்படை கிடைத்துவிடுகிறது; இல்லாவிட்டால் வேலைவாய்ப்பில் காணப்பட்ட சரிவுக்கு வேறு காரணம் காட்ட முடியாது. (1935-க்கு முன்பிருந்தே வேளாண்மை வேலைவாய்ப்புகள் குறைவுபட்டாலும், இந்த இயக்கம் 1930-விருந்து 1940-க்குள் இடைப்பட்ட காலத்திலும் பிற்காலத்திலும் விரைவாக அதிகரித்து விட்டது.)

பல்லுறுப்புக் கோவை ஒன்றினைப் பொருத்துதல்

முன்னர்க் கண்ட விவாதத்தில் நேர்கோட்டுப் போக்குக்கே ஆய்வு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது. அத்தகைய கோவை பல சமயங்களில் நீண்டகால இயக்கங்களைத் திருத்தமாக வெளியிட்டாலும் சில சமயங்களில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்குப் பொருந்தி வருவதில்லை. இந்தச் சங்கடத்திலிருந்து மீள்வதற்காகக் காலத் தொடர்வரிசையினைச் சில பகுதிகளாகப் பிரித்து அதில் ஒவ்வொரு காலத்துக்குமுள்ள விவரத்துக்குத் தனித் தனி நேர்கோடுகளைப் பொருத்துவது செயல்முறையில் சில சமயங்களில் கையாளப்படுகிறது. காலத் தொடர்வரிசையில் ஓர் ஒடிசல் ஏற்படும்பொழுதும், ஆய்வுக் கெடுத்துக்கொள்ளப் பட்ட காலம் முழுவதும் ஒரே சீராக இல்லாதபோதும் இச் செயல் முறை ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடியதே. ஆனால், காலம் முழுவதும் ஒரே சீராக (homogeneous) அமைந்துள்ளபோது, தனித்தனி பகுதிகளாக நேர்கோடுகளைப் பொருத்துவதனால் பன்னெடுங்காலப் போக்கின் தத்துவமே மீறப்பட்டுவிடுகிறது. நேர்கோடுகள் பொருந்தாதபோது, ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை, நீண்டகாலப் போக்குக்குப் பொருத்தலாம். வளைகோட்டினைப் பொருத்துகின்ற பொதுவான செயல்முறையைச் சுருக்கமாகக் கூறுவோம்.

தேவைப்படுகின்ற வகையின் சமன்பாட்டைப் பொதுமைப் படுத்தி $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$ என்று எழுதலாம்.

நடைமுறைத் தேவைகளுக்கு x-ன் 2 அல்லது 3 படிகளுக்கு மேல் வளைகோட்டினை எடுத்துக்கொள்வது கூடாது. இரண்டாவது படிக்கு ஏற்ற வளைகோட்டை எடுத்துக்கொண்டால் மூன்று தெரியாத எண்கள் உள்ளன ; அவற்றைக் காண்பதற்கு மூன்று இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளையும் ஒரே சமயத்தில் தீர்வு காணவேண்டியிருக்கிறது.

இதற்கான செயல்முறை நேர்கோட்டு வகையில் விவரித்ததைப் போன்றதே. ஒவ்வொரு கண்டறிந்த சமன்பாட்டையும் அந்தச் சமன்பாட்டில் தெரியாத முதல் எண்ணின் கெழுவால் பெருக்கவேண்டும். கிடைக்கின்ற சமன்பாடுகளைக் கூட்டி முதல் இயல்நிலைச் சமன்பாட்டைப் பெறவேண்டும். இதே செயல்முறையை மற்றும் இரு தெரியாத எண்களுக்கும் கையாண்டு கிடைக்கின்ற மூன்று இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளையும் தீர்வுகண்டு a, b, c ஆகியவற்றின் மதிப்பைப் பெறவேண்டும். இந்த மூன்று மதிப்புகளும் மூன்று மாறிலிகளுக்கும் மிகவும் வாய்ப்பாக அமையக்கூடிய மதிப்புகளாகும். இந்த மூன்று இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளின் பொது வடிவங்கள் பின் வருமாறு இருக்கும்:

$$\begin{aligned} \Sigma(y) &= na + b\Sigma(x) + c\Sigma(x^2) \\ \Sigma(xy) &= a\Sigma(x) + b\Sigma(x^2) + c\Sigma(x^3) \qquad (10.2) \\ \Sigma(x^2y) &= a\Sigma(x^2) + b\Sigma(x^3) + c\Sigma(x^4) \end{aligned}$$

இந்தச் செயல்முறையின் ஓர் எடுத்துக்காட்டாக இரண்டாவது படி வளைகோட்டினை 1, 2; 2, 6; 3, 7; 4, 8; 5, 10; 6, 11; 7, 11; 8, 10; 9, 9 ஆகிய புள்ளிகளுக்குப் பொருத்துவதில் கிடைக்கின்ற கணிப்புகளை எடுத்துக்காட்டுவதன்மூலம் விளக்குவோம். எல்லா விரிவான கணிப்புகளையும்போலவே, வளைகோட்டினைப் பொருத்துவதிலும், ஒழுங்காகவும், சீராகவும், ஒன்றிலிருந்து மற்றது உறவுகொண்டு தொடருமாறு அடுத்தடுத்த செயல்கள் (operations) இருக்குமாறும், கணிப்பினைத் திட்டமிட்டுச் செய்வது மிகவும் இன்றியமையாதது. மிகவும் கவனமாகச் செய்தபோதிலும் கணிதப் பிழைகளும் நேர இடமுண்டாதலால், வழிகளைச் சரிபார்க்க ஏற்பாடுகளை அமைத்துக் கொள்ளவேண்டும். ஒவ்வொரு செயலும் நன்கு விளங்குமாறும் முடிவுகளின் ஒவ்வொரு தொகுப்பும் தெளிவாக இருக்குமாறும் பட்டியல் வடிவத்தில் அமைத்துக்கொள்வது நல்லது. 10-7 பட்டியலில் கண்டபடி இந்தக் கணக்குக்கான விவரங்களை ஒழுங்கு படுத்திக்கொள்வோம்.

x-ன் மதிப்புகள் 1-லிருந்து துவங்கி — இந்த எடுத்துக்காட்டில் இருப்பதுபோல — அடுத்தடுத்த முழு எண்களாக இருந்தால்

பட்டியல் 10-7

இரண்டாவது படி பல்லுறுப்புக் கோவையினைப் பொருத்துவதற்குத் தேவையான மதிப்புகளைப் பொருத்துதல்

x	y	xy	x^2	x^2y	
1	2	2	1	2	$n = 9$
2	6	12	4	24	$\Sigma(x) = 45$
3	7	21	9	63	$\Sigma(x^2) = 285$
4	8	32	16	128	$\Sigma(x^3) = 2{,}025$
5	10	50	25	250	$\Sigma(x^4) = 15{,}333$
6	11	66	36	396	$\Sigma(y) = 74$
7	11	77	49	539	$\Sigma(xy) = 421$
8	10	80	64	640	$\Sigma(x^2y) = 2{,}771$
9	9	81	81	729	
45	74	421	285	2,771	

$\Sigma(x)$, $\Sigma(x^2)$, $\Sigma(x^3)$, $\Sigma(x^4)$ ஆகியவற்றை வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி [5] அல்லது தயாரிக்கப்பட்ட பட்டியலிலிருந்து [6] அறியலாம்.

இந்த மதிப்புகளை மேற்கூறிய சமன்பாடுகளில் பதிலிட்டுப் பின்வரும் இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்:

$$74 = 9a + 45b + 285c$$

$$421 = 45a + 285b + 2{,}025c$$

$$2{,}771 = 285a + 2{,}025b + 15{,}333c$$

[5] துணைக்குறிப்பு வசதி கருதி, முதல் n இயற்கை எண்களின் முதல் நான்கு படிகளின் கூடுதல் தொகைக்கான வாய்பாடுகளைத் தருவோம். (இவற்றில் இரண்டை முன்னரே தந்தோம்) :

$$\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Sigma(n^2) = \frac{(2n+1)}{3}\Sigma n$$

$$\Sigma(n^3) = (\Sigma n)^2$$

$$\Sigma(n^4) = \frac{3n^2 + 3n - 1}{5}\Sigma(n^2)$$

[6] பியர்சனின் (Pearson) 'Tables for Statisticians and Biometricians' எனும் நூலில் பட்டியல் XXVIII பார்க்கவும். இந்த நூலில் பிற்சேர்க்கைப் பட்டியல் IX-ல், 1-லிருந்து 50 வரையிலுள்ள எண்களின் ஆறுவது படிகளின் மதிப்புகள் தரப்பட்டுள்ளன.

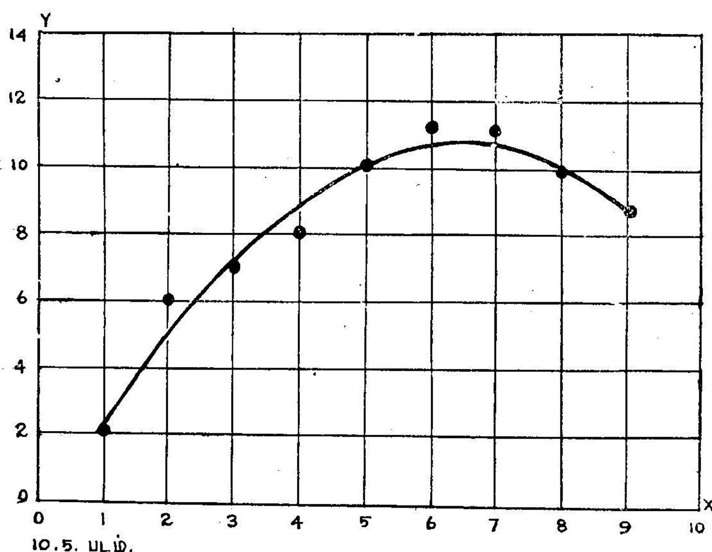
இந்தச் சமன்பாடுகளை ஏககாலத்தில் தீர்வு காண்பதன்மூலம் மூன்று மாறிலிகளுக்கும் பின்கண்ட மதிப்புகள் கிடைக்கும் :

$$a = -.929$$
$$b = +3.523$$
$$c = -.267$$

விரும்பிய வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$y = -.929 + 3.523x - .267x^2$$

எனக் கிடைக்கும். 10.5 படத்தில் இந்த வளைகோடும் கொடுக்கப்பட்ட ஒன்பது புள்ளிகளும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன.



10.5. படம்.

ஒன்பது புள்ளிகளுக்கு இரண்டாவதுபடி வளைகோட்டினைப் பொருத்துவதை விளக்குகிறது

இந்த எடுத்துக்காட்டில் இருப்பதுபோல x-ன் மதிப்புகள் அடுத்தடுத்து இருக்குமானால், நடு மதிப்பினை மூலமாக எடுத்துக் கொண்டு கணிப்பினை எளிதாக்கிக்கொள்ளலாம். இந்த எடுத்துக் காட்டில் $\Sigma(x)$-ம் $\Sigma(x^3)$-ம் சுழிக்குச் சமமாக இருக்கும்; எனவே, இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்,

$$\Sigma y = na + c\Sigma(x^2)$$
$$\Sigma(xy) = b\Sigma(x^2)$$
$$\Sigma(x^2y) = a\Sigma(x^2) + c\Sigma(x^4)$$

என்று ஆகும்.

$y = a + bx + cx^2 + dx^3$ என்ற வடிவையுடைய மூன்றுவது படி பல்லுறுப்புக் கோவையைப் பொருத்தவேண்டுமானுல் நான்கு மாறிலிகள் தீர்மானிக்கப்பட வேண்டும். அதற்கு நான்கு இயல் நிலைச் சமன்பாடுகள் தேவைப்படும். அவை பின்வரும் வடிவத்தில் இருக்கும் :

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(y) &= na + b\Sigma(x) + c\Sigma(x^2) + d\Sigma(x^3)\\ \Sigma(xy) &= a\Sigma(x) + b\Sigma(x^2) + c\Sigma(x^3) + d\Sigma(x^4)\\ \Sigma(x^2y) &= a\Sigma(x^2) + b\Sigma(x^3) + c\Sigma(x^4) + d\Sigma(x^5)\\ \Sigma(x^3y) &= a\Sigma(x^3) + b\Sigma(x^4) + c\Sigma(x^5) + d\Sigma(x^6)\end{aligned}\right\} \quad (10.3)$$

நான்கு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிலிகளைத் தீர்வு காண்பதென்ருல் பெருத்த அளவுக்கு இயற்கணித கணிப்புகள் செய்யப் படல் வேண்டும்; இத்தகைய சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி நெடுங் காலப் போக்கினை வெளியிடுவது அவசியம்தானு என்ற கேள்வி எழுகிறது. போதுமான அளவு மாறிலிகளைப் பயன்படுத்தினுல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலுள்ள ஒவ்வொரு மாற்றத்தையும் வெளிக்காட்டும் வகையில் பொருத்தப்படும் வளைகோடு அமைந் திருக்கும் என்பதென்னவோ உண்மைதான்; ஆனுல், அத்தகைய வளைகோட்டினை நீண்டகாலப் போக்கினை வெளியிடுவதாகக் கொள்வது பொருந்தாது.[7] எளிய சீரான நீண்டகாலப் போக்கி லிருந்து—நேர்கோட்டு வகையோ, பிறவகையோ—சிறு அளவுக்கு விலக்கங்கள் நேருமென்று பொருளாதார விவரங்களில் எதிர்பார்க்க லாம்; ஆனுல், மிகவும் உண்மையான போக்கு இருக்கும்பொழுது

[7] வில்லியம் ஆஃப் ஒஸம் (William of Occam) என்பாரது ரேஸர் எனப் படும் பார்சிமனி விதி (Razor or Law of Parcimony) கூறுகிறபடி நிலவு கிறதா, இல்லையா எனத் தெரியாதவற்றுக்கு விளக்கம் தரும்போது, தேவை யின்றி உருப்படிகளை (இங்கே 'மாறிலிகளை' எனப் படிக்கவும்) அதிகரிக்கக் கூடாது என்ற கருத்து இத்தகைய சிக்கல்களுக்கும் சிறப்பாகப் பொருந்தி வருவ தாகும்.

நடைமுறை வளைகோடுகளை வெளியிடுவதற்கு எனக் குறிப்பிடப்பட்ட கருவியல்பான (potential) தொடர்வரிசை வகைகளைப் பயன்படுத்தவேண்டு மானுல் பின்வரும் கட்டுப்பாடுகள் பூர்த்தி செய்யப்படவேண்டும் என ஸ்டின் மெட்ஸ் (Steinmetz) வரையறை செய்கிருர்.

1. *a*, *b*, *c*,......ஆகிய அடுத்தடுத்த கெழுக்கள் விரைவிலே குறைவடைய வேண்டும்; கண்டறிந்த வீச்சுக்குள் உயர் உறுப்புகள் மிகக் குறைந்த இரண் டாந்தர உறுப்புகளாகத் தோன்றுமாறு குறையவேண்டும்.

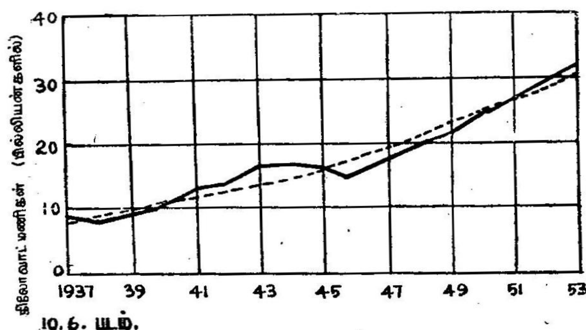
2. அடுத்தடுத்த கெழுக்கள் ஒரு திட்டவட்டமான விதிக்குட்பட்டு, அடுக்குக் கோவை, கோண கணிதக் கோவை முதலான மற்ற ஒருகோவையாக அமைந்த குறுக்கத் தொடரினைச் (convergent series) சுட்டிக் காட்டுவதாக அமைய வேண்டும்.

3. ஒரு சில கெழுக்கள் தவிர, எல்லாக் கெழுக்களும் மிகச் சிறிதாக இருந் தால் அந்தச் சில கெழுக்களை மட்டுமே ஆராய்வது போதுமானது.

மிகவும் எளிய வடிவத்திலிருந்து கூறிய விலக்கங்கள் தோன்றுவது அரிது. சூழ்நிலைகளின் நீடித்த மாற்றங்களினால் அத்தகைய விலக்கங்கள் நேருகிறதென்றால் நேர்கோட்டுப் போக்கிற்கு ஒரு தனி நேர்கோடு பொருந்தாது; அப்போது காலத்தினைப் பல பகுதிகளாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் தனித்தனி போக்குக் கோட்டை அமைப்பது நல்லது. ஸ்டீன்மெட்ஸ் (Steinmetz) என்பவர் 'கண்டறிந்த குறிப்புகளின் வீச்சுகள் நிலவும் சூழ்நிலைகள் மாறாது இருக்கும்போதுதான், நடைமுறை வளைகோடுகளை ஒரு தனி நேர்கோட்டால் பொருத்துவது ஏற்றது' என்று கூறுகிறார். இந்தக் கூற்று பருப்பொருளியல் புள்ளிவிவரங்களுக்குப் பொருத்தப்படும் வளைகோடுகளைப்பற்றியது எனினும், பொருளாதாரப் புள்ளிவிவரங்களுக்கும் பொருந்திவருகிறது.

இரண்டாவது படி உள்ள நீண்டகாலப் போக்கு

கடந்த பத்தாண்டுகளில் மின்சக்தியின் உற்பத்தியும் விற்பனையும்பற்றிய புள்ளிவிவரங்களை, நேர்கோடு அல்லாத போக்குடைய தொடர்வரிசைக்கு நல்ல எடுத்துக்காட்டுகளாகக் கூறலாம். 10.6 படத்தில் 1937-லிருந்து 1953-வரை ஆன ஆண்டுகளில் அமெரிக்காவில் கடைநிலை (ultimate) நுகர்வோருக்கு விற்பனையான மின்சக்தி பற்றிய புள்ளிவிவரம் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. 10-8 பட்டியலில், இதனை இரண்டாவது படி பல்லுறுப்புக் கோவையாகப் பொருத்துவதற்குத் தேவைப்படுகின்ற கணிப்புகள் தரப்பட்டுள்ளன.



10.6. படம்.

1937—1953 ஆண்டுகளில் கடைநிலை நுகர்வோருக்கு மாத சராசரி மின்சக்தி விற்பனைகள்—போக்குக் கோட்டுடன்.*

* எடிசன் எலெக்டிரிக் இன்ஸ்டிடியுட் (Edison Elictric Institute) புள்ளிவிவரங்கள்.

கணிப்புகளை எளிமைப்படுத்துவதற்காக, மூலத்தை நடு ஆண்டில் தேர்ந்தெடுத்து பொருத்துவது நல்லது. தயாரிக்கப்பட்ட பட்டியலிலிருந்தோ, 429ஆம் பக்கத்தில் தரப்பட்டுள்ள

பட்டியல் 10-8

1937-1953 ஆண்டுகளில் கடைநிலை நுகர்வோருக்கு மின்சக்தி விற்பனைகள்*

(பில்லியன் கிலோவாட் மணிகளில் சராசரி மாத விற்பனைகள்)

போக்கு நேர்கோட்டைப் பொருத்துவதற்குத் தேவையான கணிப்புகள்

ஆண்டு (1)	x (2)	y (விற்பனைகள்) (3)	xy (4)	x^2y (5)
1937	−8	8.3	−66.4	531.2
1938	−7	7.8	−54.6	382.2
1939	−6	8.8	−52.8	316.8
1940	−5	9.9	−49.5	247.5
1941	−4	11.7	−46.8	187.2
1942	−3	13.3	−39.9	119.7
1943	−2	15.5	−31.0	62.0
1944	−1	16.5	−16.5	16.5
1945	0	16.1	0.0	0.0
1946	+1	15.9	+15.9	15.9
1947	+2	18.1	+36.2	72.4
1948	+3	20.1	+60.3	180.9
1949	+4	20.7	+82.8	331.2
1950	+5	23.4	+117.0	585.0
1951	+6	26.5	+159.0	954.0
1952	+7	28.6	+200.2	1401.4
1953	+8	31.9	+255.2	2041.6
		293.1	+569.1	7445.5

$N = 17$ $\Sigma(x^4) = 17{,}544$

$\Sigma(x) = 0$ $\Sigma(y) = 293.1$

$\Sigma(x^2) = 408$ $\Sigma(xy) = 569.1$

$\Sigma(x^3) = 0$ $\Sigma(x^2y) = 7{,}445.5$

* எடிஸன் எலெக்டிரிக் இன்ஸ்டிடியுட் தொகுத்தது.

வாய்பாடுகளிலிருந்தோ x-ன் இரண்டாவது படிகள், நான்காவது படிகள் ஆகியவற்றின் கூடுதலைக் காணலாம். இந்தக் காலத்தின் நடுவில் மூலத்தை எடுத்துக்கொண்டால், $y = a + bx + cx^2$ என்ற கோவையைப் பொருத்துவதற்கான இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்

$$\Sigma(y) = Na + c\Sigma(x^2)$$
$$\Sigma(xy) = b\Sigma(x^2)$$
$$\Sigma(x^2y) = a\Sigma(x^2) + c\Sigma(x^4)$$

என ஆகும்.

பொருத்தமான மதிப்புகளைப் பதிலிட்டால்

$$293.1 = 17a + 408c$$
$$569.1 = 408b$$
$$7,445.5 = 408a + 17,544c$$

எனக் கிடைக்கும். மாறிலிகளைத் தீர்வு கண்டால்,

$$a = 15.968$$
$$b = +1.395$$
$$c = +0.053$$

எனக் கிடைக்கும். மூலத்தை 1945-ல் கொண்டு கணக்கிட்டதால் தேவைப்படுகின்ற சமன்பாடு,

$$y = 15.968 + 1.395x + 0.053x^2$$

எனக் கிடைக்கும். இந்தச் சமன்பாட்டை 10 6 படத்தில் குறித்துள்ளோம். மின்சக்தியின் மொத்த விற்பனை பெற்ற சீரான வளர்ச்சி, போர்க் காலத்திலும் போருக்குப் பிற்பட்ட காலத்திலும் நடைபெற்ற மாற்றங்களால் ஓரளவுக்குக் குலைந்தாலும், போக்கினைக் கணிசமான அளவு நன்கு வெளியிடுவதாகக் கோவை அமைந்துள்ளது.

வளைகோட்டினைப் பொருத்துவதில் லாகிருதத்தினைப் பயன்படுத்துதல்

மேற்கூறிய குடும்பத்தினைச் சேர்ந்த வளைகோடுகள் எளிய—ஆனால் மிகவும் பயனுள்ள—வகைப்பட்டன. காலத் தொடர்வரிசையினை ஆய்வு செய்வதில் இவற்றினும் ஓரளவுக்கு அதிகப் பயனுடையவை அரைலாகிருத வகையினைச் சேர்ந்த வளை கோடுகள். பல தொடர் விவரங்களை அரைலாகிருத அல்லது 'வீத' வரைதாளில் குறிப்பதின் நன்மைகளை முந்திய பகுதிகளில் விளக்கினோம். அளவைகளுக்கு இடையேயுள்ள ஒப்பீட்டு மாற்றங்கள், அளவைகளின் வீதங்கள் ஆகியவைகுறித்து உண்மை நிலையை வெளியிடுவதே இவ்வகையான வரைபடத்தின் அடிப்படைச் சிறப்பாகும். பொருளாதார விவரத்தினை ஆய்வு செய்யும்போது இவ்வகையான உறவுகளைப்பற்றிப் பொதுவாக அதிக அக்கறை காட்டப்படும். இதே அடிப்படையில் போக்குகளும் தீர்மானிக்கப்படும் என்பது தர்க்கரீதியில் எதிர்பார்க்கக்கூடியதே.

அப்படிச் செய்வதில், முன்னர்க் கண்ட அதே பொதுவகை வளை கோடுகளின் தொகுதி ஒன்றைப் பயன்படுத்துவோம்; ஆனால், இதில் y-க்குப் பதிலாக, $\log y$-யினைப் பயன்படுத்தவேண்டும். அதாவது,

நேர்கோட்டுக்கு $\log y = a + bx$ என்ற வடிவத்தினையும், பல்லுறுப்புத் தொடருக்கு $\log y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots$ என்ற பொது வடிவத்தையும் கையாளுவோம். இப்படிக் கிடைக்கும் வளைகோடுகளை இயற்கணித வரைகோட்டிலேயே இயற்கையான x-மதிப்புகளையும் y-ன் லாகிருத மதிப்புகளையும் குறித்து வரையலாம்; அல்லது y அச்சு வழியே லாகிருத அளவுத் திட்டமுடைய அரை லாகிருத வரைதாளில் x, y ஆகியவற்றின் இயற்கை மதிப்புகளையே குறித்தும் வரையலாம். இம் முறைகளில் பிந்தியது எளிமையானது.

இந்தச் செயல்முறையினை விளக்குவதற்காக, $\log y = a + bx$ என்ற வகையினைச் சேர்ந்த வளைகோட்டினைப் பொருத்துவதில் பயன்படும் வழிகளை எடுத்துக்காட்டுவோம். அமெரிக்காவில் 1936-லிருந்து 1953-வரை பெட்ரோலிய உற்பத்தியின் போக்கினை அறியவேண்டியிருக்கிறது. இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளுக்குத் தேவையான மதிப்புகள் 10-9 பட்டியலிலிருந்து கிடைக்கின்றன. தீர்வு காணப்படவேண்டிய சமன்பாடுகள்,

$$\Sigma(\log y) = Na + b\Sigma x$$
$$\Sigma(x \cdot \log y) = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$

என்ற வடிவத்தில் இருக்கின்றன. கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைப் பதிலிட்டால்,

$$57.84863 = 18a + 171b$$
$$558.64891 = 171a + 2{,}109b$$

எனக் கிடைக்கிறது. மாறிலிகளுக்குத் தீர்வு கண்டால்

$$a = 3.03564$$
$$b = 0.01876$$

எனக் கிடைக்கும். தேவைப்படுகின்ற வளைகோட்டின் சமன்பாடு, 1935-ல் மூலத்தைக் கொண்டு

$$\log y = 3.03564 + 0.01876x$$

என்று வரும்.

இந்த வளைகோட்டினை மேற்கண்டவாறு குறைந்த வர்க்க முறையில் பொருத்துகையில், லாகிருத விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதல் சிறுமமாக இருக்கும் என்ற நிபந்தனையைப் பூர்த்தி செய்கிறோம். அதாவது, இந்த நிபந்தனைக்கு உள்ளாகும் வேறுபாடுகள் கண்டறிந்த மதிப்புகளின் லாகிருதங்களுக்கும், அதற்கு இயைந்த போக்கு மதிப்புகளின் லாகிருதங்களுக்குமுள்ள வேறுபாடுகளாகும். இயற்கணித (இயற்கையான) விலக்கங்களில் இருபடிக் கூடுதல்

சிறுமமாக இருக்கும்போது கிடைக்கின்ற வளைகோடு இதுவன்று என்பதைக் கவனிக்கவேண்டும்.

பட்டியல் 10·9

1936-1953 ஆண்டுகளில் அமெரிக்காவில் பெட்ரோலிய உற்பத்தி*

(மில்லியன் பேரல்களில்—barrels)

போக்குக் கோட்டினைப் பொருத்துவதற்குத் தேவையான மதிப்புகளைக் கணித்தல்

ஆண்டு	x	y	$\log y$	$x \log y$	$\log y_c$ (போக்கின் லாகிருதம்)	y_c (போக்கின் கணிக்கப்பட்ட மதிப்பு)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1936	1	1,099 7	3.04127	3.04127	3.05440	1,133.4
1937	2	1,279.2	3.10694	6.21388	3.073'6	1,183.4
1938	3	1,214.4	3.08436	9.25308	3.09192	1,235.7
1939	4	1,265.0	3.10209	12.40836	3.11068	1,290.2
1940	5	1,353.2	3.13136	15.65680	3.12944	1,347.2
1941	6	1,402.2	3.14681	18.88086	3.14820	1,406.6
1942	7	1,386.6	3.14195	21.99365	3.16696	1,468.7
1943	8	1,505.6	3.17771	25.42168	3.18572	1,533.6
1944	9	1,677.8	3-22474	29.02266	3.20448	1,601.3
1945	10	1,711 1	3.23328	32.33280	3.22324	1,672.0
1946	11	1,733.4	3.23890	35.62790	3·24200	1,745.8
1947	12	1,857.0	3.26881	39.22572	3.26076	1,822.9
1948	13	2,020.2	3.30539	42.97007	3.27952	1,903.4
1949	14	1,841.9	3.26527	45.71378	3.29828	1,987.4
1950	15	1,973.6	3.29526	49.42890	3.31704	2,075.0
1951	16	2,247.7	3.35174	53.62784	3.33580	2,166.7
1952	17	2,290.0	3.35984	57.11728	3.35456	2,269.4
1953	18	2,360.0	3.37291	60.71238	3.37332	2,362.2
			57.84863	558.64891		

$N = 18$ $\Sigma(\log y) = 57.84863$

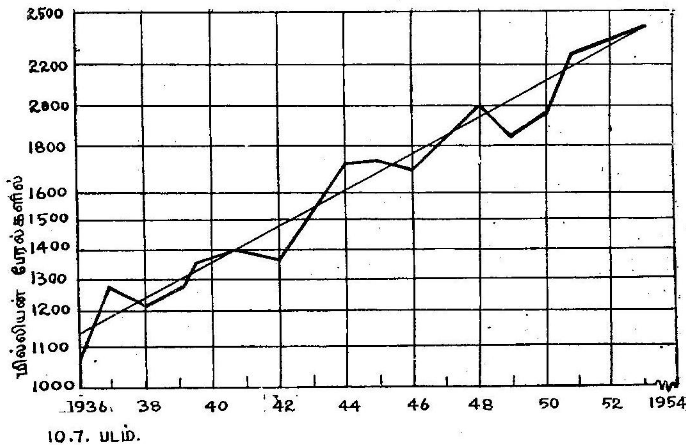
$\Sigma(x) = 171$ $\Sigma(x \,.\, \log y) = 558.64891$

$\Sigma(x^2) = 2,109$

*ஆதாரங்கள் : பீரோ ஆஃப் மைன்ஸ் (Bureau of Mines); அமெரிக்கன் பெட்ரோலியம் இன்ஸ்டிடியுட் (American Petroleum Institute).

மேற்கூறிய சமன்பாட்டில் ஏதோ ஓர் ஆண்டைக் குறிக்கும் x மதிப்பினைப் பதிலிட்டால், போக்கின் லாகிருதத்தையோ, இயல் மதிப்பினையோ கணக்கிடலாம். இதுபோன்று கிடைக்கும்

லாகிருதங்களேயும் இதற்கு இயைந்து கிடைக்கும் இயற்கை எண்களான பல ஆண்டுகளின் போக்கு மதிப்புகளேயும், (6) (7) பத்திகளில் தந்துள்ளோம். 10.7 படத்தில் போக்கின் கோவை கண்டறிந்த மூல மதிப்புகளோடு வரைபடமாகத் தரப்பட்டுள்ளது. இது நன்ருகப் பொருந்துகிறது.



10.7. படம்.

1936—1953 ஆண்டுகளில் அமெரிக்காவில் பெட்ரோலிய உற்பத்தி—சராசரி வளர்ச்சி வீதத்தை வரையறை செய்யும் கோட்டுடன்.

நேர்கோட்டுப் போக்கினை வரையறை செய்வதற்கு சார்ந்த மாறியை லாகிருதங்களில் எடுத்துக்கொள்ளும் இவ்வகைச் சமன்பாடு சில தனிப்பட்ட சிறப்புகளை உடையது. இச் சமன்பாட்டின் லாகிருத வடிவம், கூட்டு வட்டி வளேகோட்டுக்கு (படிமுறை வளேகோட்டுக்கு) ஒத்திருப்பதைப் படிப்போர் கவனிக்கவேண்டும்; 2ஆம் அதிகாரத்தில் கண்டதுபோல இதன் சமன்பாடு

$$y = p(1 + r)^x \qquad (10.4)$$

அல்லது

$$\log y = \log p + x \log (1 + r)$$

என்றிருக்கிறது. இப்போது கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டில் $\log p$ என்பதற்குப் பதிலாக a என்ற குறியீட்டையும், $\log (1 + r)$-க்குப் பதிலாக b என்ற குறியீட்டையும் பயன்படுத்தியிருக்கிருேம். என்ருலும், இரண்டு சமன்பாடுகளும் சர்வ சமமானவையே.

1936-லிருந்து 1953 வரை பெட்ரோலிய உற்பத்திப் போக்கினை வரையறை செய்யும் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளை இயற்கை

எண்களாக எளிதில் மாற்றியமைக்கலாம். இப்போது,

$$\log y = 3.03564 + 0.01876x$$

எனக் கிடைக்கிறது; இதில் 3.03564 என்பது $\log p$; 0.01876 என்பது $\log (1 + r)$. 3.03564 என்பதற்கியைந்த இயற்கை எண் 1,085.5. 0.01876-க்கு இயைந்த இயற்கை எண் 1.044. எனவே, பெட்ரோலிய உற்பத்திப் போக்கின் இயற்கை உருவம்

$$y = 1085.5(1.044)^x$$

என்று இருக்கும்; இதில் 1935-ல் மூலம் எடுக்கப்பட்டுள்ளது. 1.044 என்ற மாறிலியிலிருந்து 1ஐக் கழித்து 0.044-ஐப் பெறுகிறோம். இது கூட்டு வட்டி வீதத்தில் வளரும் தொடரில் வளர்ச்சி வீதமான r-ஐ ஒத்தது. [1-ஐக் கழித்துப் பெறுவது எதிர் (negative) மதிப்பானால், வளர்ச்சியும் நிச்சயமாக எதிர்தான்.] இந்த அளவை, 1936-லிருந்து 1953 வரையில் இயற்கை பெட்ரோலிய உற்பத்தி, ஆண்டுக்கு 4.4 சதவீத சராசரி விகிதத்தில் அதிகரித்தது என்று சுட்டிக்காட்டுகிறது. (சதவீத அடிப்படைக்கு r-ஐ மாற்றுவதற்கு 100ஆல் பெருக்கு கிறோம்.)

காலத் தொடர்வரிசையினை வீத வரைபடத் தாளில் நேர் கோடாக அமைக்கமுடியும் என்றால் (அத்தகைய கோவைகள் மிக விரிவாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன), r என்ற மாறிலி மிகவும் பயனுள்ள மதிப்பாகிறது; தொடர்வரிசையின் சராசரி ஆண்டு வளர்ச்சி வீதத்தையோ, சரிவு வீதத்தையோ இது தெரிவிக்கிறது. நிச்சயமாக இது ஒரு கட்புலனாகா அளவை; எனவே, முற்றிலும் வேறுபட்ட மூல அலகுகளைக் கொண்ட தொடர்வரிசைகளின் போக்குகளைக்கூட ஒப்புமை செய்வதற்கு வசதியாக இருக்கிறது. கொடுக்கப்பட்ட கால இடைவெளியில் மக்கள் தொகையின் வளர்ச்சி வீதம் ஆண்டுக்கு 1.4 சதவீதமாக இருக்கலாம்; பெட்ரோலிய உற்பத்தி 4.5 சதவீத வீதத்தில் அதிகரித்திருக்கலாம்; கார்களின் உற்பத்தி 4.2 சதவிகிதத்திலும், கோதுமை உற்பத்தி 1.1 விகிதத்தி லும், மொத்த தேசீய வருமானம் 1.6 சதவிகிதத்திலும் அதிகரித் திருக்கலாம். இந்தத் தொடர்வரிசைகளின் போக்குகள் நேரிடை யாக ஒப்புநோக்கக் கூடியவை; இவற்றிலிருந்து செய்யும் முடிவுகள் நாட்டின் வளர்ச்சியையும், போக்கையும், தன்மையையும் உணர்த் தும். சமூக, பொருளாதார மாற்றங்களை ஆராய்வதற்கு இந்த அளவை மிகவும் பயனுள்ள ஒரு கருவியாகும்.[8]

[8] கிளோவரின் சராசரி மதிப்புப் பட்டியலைக் (James W. Glover, 'Tables of Applied Mathematics' George Wahr, Ann Arbor, Michigan, 1923, 468ff பார்க்க) கொண்டு இச் செயல்முறையினை விரிவாகப் பயன்படுத்துவ தில் செலவாகும் நேரத்தையும் உழைப்பையும் குறைக்கலாம். இப் பட்டியலைக் கொண்டு, கூட்டு வட்டி வளைகோட்டை இயற்கை எண்களுக்கு நேராகவே பொருத்திவிடலாம். தேவைப்படும் கணிப்புகள் யாவும் எளிமையாகவும் விரை வாகவும் கிடைத்துவிடுகின்றன.

இப்போது விளக்கப்பட்ட வகையைச் சேர்ந்த கோவையில் சில உறுப்புகளைச் சேர்ப்பதன்மூலம், வீதத்தாளில் நேர்கோட்டுப் போக்கில்லாத தொடரை ஆராய முனையலாம். மூன்றுவது மாறிலி ஒன்றைச் சேர்த்துக்கொண்டால்,

$$\log y = a + bx + cx^2$$

என்ற வகையைச் சேர்ந்த சமன்பாடு கிடைக்கும். இஃது இயற்கை எண்களாலான இரண்டாவது படியைச் சேர்ந்த பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு அமைத்தலாகிருத அல்லது விகித மறுவடிவமாகும். இது போல மேலும் சில மாறிகளைச் சேர்க்கலாம்; இயற்கை எண்களைப் பற்றிப் பேசுகையில் முன்னரே கூறிய கட்டுப்பாடுகளை மனத்தில் கொண்டு, இத்தகைய சமன்பாடுகளில் மாறிலிகளைச் சேர்த்தல் வேண்டும்.

பிற வளைகோட்டு வகைகள்

பொருளாதாரப் புள்ளிவிவரங்களை ஆராய்பவரது தேவைகளில் பெரும்பாலானவற்றை, முந்திய பகுதிகளில் கண்ட இரண்டு வளைகோட்டுக் குடும்பங்களும் நிறைவு செய்யும். பெரும்பாலான காலத் தொடர்வரிசைகளில், போக்கினை, இயற்கை எண்களுக்கோ, விவரங்களின் லாகிருதங்களுக்கோ (அதாவது y மதிப்புகளின் லாகிருதங்கள்; இருவகை வளைகோடுகளிலும் காலம் என்ற x மாறி இயற்கை எண் உறுப்புகளிலேயே இருக்கும்), பல்லுறுப்புக் கோவையினைப் பொருத்துகையில் எடுத்துக்கொள்கிறோம். இந்த வகைகள் நெகிழ்வும் மிகுந்த பயனுமுடைய வளைகோட்டு வகைகளை உள்ளடக்குகின்றன.[9] இவையேயன்றி, பிறவகைப்பட்ட வளைகோட்டு வகைகள் சில, காலத் தொடர்வரிசையில் குறைவாகப் பயன்பட்டா

[9] இதனினும் உயர்ந்த படியுடைய தொடர்களின் வளைகோடுகளைப் பொருத்துவதற்கு—குறிப்பாக ஒரே விவரத்துக்குப் பல்வேறுபட்ட படிகளில் அமைந்த வளைகோடுகளைப் பொருத்துவதற்கு—கணிப்பை எளிமையாக்கும் வழிமுறைகள் சில உண்டு. நீண்டகால ஆய்வுத் திட்டங்களுக்கு, இந்த முறைகளைக் கையாளும்போது கூடுதல் பொறிச் செயல்முறைகளைத் தொடர்ந்து செய்து, வளைகோட்டைப் பொருத்திவிடலாம். ஒரே செயலைப் பன்முறை செய்வதாக அமையும் பணியேயன்றிப் பிறவற்றில் இம்முறையைப் பயன்படுத்துவது உசிதமன்று. முன் பக்கங்களில் கூறிய குறைந்த வர்க்க முறையை அடிப்படையாகப் பயன்படுத்துவதுபற்றி மாணவர் கற்றல்வேண்டும். நீடித்த கணிப்பு வேலைகளுக்கு மட்டும் பிற முறைகளைக் கையாளவேண்டும்.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கணிக்க வகைப்படுத்தப்பட்ட செயல்முறைகள், செங்குத்துப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் (orthogonal polynomial) பயன்கள் பற்றிய விளக்கங்கள் ஆகியவற்றிற்குப் பின்வரும் நூல்களை ஒப்புநோக்குக. ஆர். ஏ. ஃபிஷர் (து.நூ.ப. 50), ஃபிஷர், யேட்ஸ் (து.நூ.ப. 51, பக்கங்கள் 23-25. பொருத்துதற்கான பட்டியல்களுக்குப் பட்டியல் XXIII, எல். எச். ஸி. டிப்பெட் (து.நூ.ப. 160), எம். ஜி. கெண்டால் (து.நூ.ப. 78, இரண்டாவது தொகுதி).

லும், சில சூழ்நிலைகளில் மிகுந்த பயனுடையதாய் அமைந்து விளங்குவதை நினைவில் கொள்ளவேண்டும்.

காலத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த பொருளாதாரப் புள்ளி விவரங்களுக்குச் சாதாரண பரவளைய வகையினைச் சேர்ந்த ($y = ax^b$) வளைகோடுகள் பொருந்தி வருவதில்லை; ஏனெனில், அப்படிப் பயன்படுத்தினால், காலம் என்ற மாறியைப் பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகக் கருதவேண்டியுள்ளது. அத்தகைய வளைகோடு இரட்டை லாகிருத வரைதாளில் நேர்கோடாக வடிவம் பெறுகிறது என்பதனை நினைவுகூர்தல் வேண்டும். எனினும், இவ் வகையைச் சேர்ந்த வளைகோடு, கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் போக்கினைத் திருத்தமாக வெளியிடுமானால், அதனைப் பயன்படுத்துவது நடைமுறையில் ஏற்றதே.

அத்தகைய வளைகோடுகளை லாகிருதங்களைப் பயன்படுத்தி நேர்கோட்டு வகையைச் சேர்ந்த சமன்பாட்டின்மூலம் பொருத்தலாம்.

$$y = ax^b$$

என்ற சமன்பாடு லாகிருத வடிவத்தில்

$$\log y = \log a + b \log x$$

என்று ஆகும்.

$$y = ar^x$$

என்று சாதாரணப் படிமுறை வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதலாம். (இச் சமன்பாட்டிலுள்ள r என்பது, முன்பு பயன்படுத்தப்பட்ட $1+r$-க்குச் சமம்.) இச் சமன்பாட்டை, பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் வளர்ச்சி அடையும் அல்லது குறைவுபடும் தொடரின் போக்கை அறியப் பயன்படுத்தலாம். பொதுவாக, பொருளாதாரத் தொடர்களின் போக்கு, நிலையான அளவுகளால் பெருக்குத் தொடர்வரிசையிலிருந்து விலகுவதாக நடைமுறையில் கண்டறியப்பட்டிருக்கிறது. கொடுக்கப்பட்ட சந்தர்ப்பத்தில் இந்த விலக்க அளவையே மூலத் தொடரோடு சேர்த்து (அல்லது கழித்து) ஒரு புதிய தொடர்வரிசை ஒன்றை உருவாக்கலாம்; இது தெளிவான பெருக்கமடையும் (exponential) போக்கினை உடையது. பெருக்கத் தொடரிலிருந்து K என்ற மாருத அளவையால் தொடர் விலக்கமடையுமானல், மூலத் தொடரின் போக்கினை

$$y = ar^x - K \qquad (10.5)$$

என்று எழுதலாம். இதுபோன்ற திருத்தியமைக்கப்பட்ட பெருக்க வளைகோட்டு வகை, சில சமயங்களில் போக்கினை மிகவும் திருத்த

மான முறையில் வெளியிடலாம். பிற்சேர்க்கை F-ல் அத்தகைய வளைகோட்டினைப் பொருத்தும் முறை விவாதிக்கப்பட்டுள்ளது.

பொருளாதாரப் புள்ளிவிவரங்களை விளக்கம் தருவதற்கு ஆயுள் பாதுகாப்புத் துறையில் முதன்முதலில் பயன்படுத்தப்பட்ட கோம்பர்ட்ஸ் (Gompertz) வளைகோட்டின் சமன்பாட்டைச் சில சமயங்களில் பயன்படுத்துகிறோம். அந்தச் சமன்பாடு

$$y = ab^{c^x} \qquad (10.6)$$

என்பதாகும். மக்கள்தொகை அதிகரிப்பு ஒரு பொது விதிக்குக் கட்டுப்பட்டு வளர்கிறது என்றும், அதேவகையில் உற்பத்திப் பெருக்கம் மக்கள் பெருக்கத்தின் நேர் சார்பலனாக அமைந்து தொழில் பெருக்கமும் வளரும் என்றும் விவாதித்து, இந்த அடிப்படையில் பொருளாதாரப் புள்ளிவிவரங்களை ஆய்வதற்கு இந்த வளைகோட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

இதேவகையான வளர்ச்சியைக் காட்டும் மற்றொரு வளைகோடு—'லாஜிஸ்டிக்' எனும் பெயர் பெற்றது—வெர்ஹஸ்ட் (Verhulst), ரேமண்டு பேர்ல் (Raymond Pearl), லோவல் ஜே. ரீட் (Lowell J. Reed) ஆகியோரால் மக்கள் பெருக்கததை முன்கூட்டியே அறிவதற்காகப் பயன்படுத்தப்பட்டது. சில சமூகப் பொருளாதாரத் தொடர்களின் போக்குகளை இந்த வளைகோடு வருணிக்கக் காண்கிறோம். பிற்சேர்க்கை F-ல், கோம்பர்ட்ஸ் வளைகோடு லாஜிஸ்டிக் வளைகோடு ஆகியவற்றைப் பொருத்தும் செயல்முறைகளைப்பற்றிய எடுத்துக்காட்டுகள் தரப்பட்டுள்ளன.

மாதாந்திரப் போக்கின் மதிப்புகளைத் நிர்மானித்தல்: இதுவரையில் விளக்கம் தரப்பட்ட செயல்முறைகள் வருட அளவுகளைப் பற்றியன. வருடாந்திரப் புள்ளிவிவரங்களுக்கு ஒரு நேர் கோட்டினையோ, வளைகோட்டினையோ பொருத்தியபின் மாதாந்திர அலகுகளில் மாற்றிக் காணவேண்டிய தேவை அடிக்கடி எழுகிறது. சுழற்சி இயக்கத்தினை ஆராயும்போது அத்தகைய மாதாந்திர அளவைகளைப்பற்றிய சிக்கல்கள் எழுகின்றன; பன்னிரண்டாம் அத்தியாயத்தில் இவை விளக்கப்பட்டுள்ளன.

போக்குச் சமன்பாட்டில் a என்ற மாறிலி, மூலமாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட ஆண்டின் போக்கு மதிப்பினைத் தெரிவிக்கிறது. கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொருத்தும் முறையில் பயனாகின்ற வருடாந்திர விவரங்கள், பன்னிரண்டு மாத மதிப்புகளின் சராசரிகளானால் (அதாவது ஓராண்டில் வார்ப்பு இரும்பின் சராசரி விலை), a என்ற மாறிலி ஆண்டு விவரங்களின் மையமாக அமைந்துள்ள மாதத்தின்

நீண்ட போக்கினை அளக்கிறது. ஆண்டு விவரங்கள் பன்னிரண்டு மாத மதிப்புகளின் கூடுதல்களானால் (எடுத்துக்காட்டாக ஒரு ஆண்டில் மொத்த வார்ப்பு இரும்பு உற்பத்தி), a என்ற மாறிலியை 12ஆல் வகுத்தால்தான் ஆண்டின் மையமாகவுள்ள மாதத்தின் போக்கு மதிப்புக் கிடைக்கும்.

போக்கு, நேர்கோட்டுப் போக்கானால், $y = a + bx$ என்ற சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலியான b என்பது, 12 மாத காலத்தில் போக்கினால் அடைந்த மாற்றத்தை வரையறை செய்கிறது. பொருத்துவதற்குப் பயனாகும் வருடாந்திர விவரங்கள் மாத மதிப்புகளின் சராசரிகளானால் மாதப் போக்கு மதிப்புகளின் இடைவைப்பு மதிப்பைக் காணும்போது, மாதத்துக்கு மாதம் உள்ள வளர்ச்சி (அல்லது குறைவு) (எடுத்துக்காட்டாக, கொடுக்கப்பட்ட ஆண்டில் ஜனவரியிலிருந்து பிப்ரவரி வரை) $b/12$ ஆகும். வருடாந்திர விவரங்கள் மாத மதிப்புகளின் கூடுதல்களாக இருந்தால் மாதத்திற்கு மாதம் வளர்ச்சி $b/144$ ஆகும்.

மாதாந்திரப் போக்கு மதிப்புகளைத் திருத்தமாக மையப்படுத்துவதற்கு மேலும் ஒருபடி செல்லவேண்டும். இவற்றைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாத விவரங்கள் எந்தக் காலத்தினைக் குறித்ததோ அதன் மையப் புள்ளிகளில் அமைக்கவேண்டும். காலண்டர் ஆண்டில் கண்ட 12 மாதங்களின் ஒவ்வொன்றின் மையத்தினையும் குறித்த மாத விவரங்களைச் சராசரிப்படுத்தினாலோ, கூட்டினாலோ, ஜூலை 1-ந் தேதியை மையமாகக் கொண்ட ஓர் எண் கிடைக்கும். அதாவது, மூல ஆண்டின் நடுவில் மையப்படுத்திய மாதத்தின் மையம் ஜூலை 1-ல் அமைகிறது. உண்மையான மாத விவரங்களை ஒப்புநோக்க வேண்டுமானால் ஜூலை 15, ஆகஸ்டு 15 இவைபோன்ற மையத்தை உடைய போக்கு மதிப்புகளை அறிய விரும்புகிறோம். மூல ஆண்டின் நடுவினை மையமாகக்கொண்டு அமைந்த மாதப் போக்கு மதிப்புகளோடு (அதாவது a அல்லது $a/12$) போக்குச் சமன்பாட்டிலிருந்து நாம் பெற்ற b-என்ற மதிப்பின் மாதத்திற்கு மாதம் ஏற்படும் அதிகரிப்பில் (குறைவில்) ஒரு பாதியினைச் சேர்க்க வேண்டும். இப்படிச் செய்தால் ஜூலை 15-ஐ மையமாகக் கொண்ட மாதத்தின் போக்கு மதிப்புக் கிடைக்கும். இந்த மதிப்பினை அம் மாதத்தில் உண்மையான கண்டறிந்த மதிப்போடு ஒப்பிடலாம். இதனோடு மாதா மாதம் பெற்ற போக்கு அதிகரிப்பினைச் (குறைப்பினை) சேர்த்தால் அடுத்து வருகின்ற மாதங்களுக் கெல்லாம் போக்கு மதிப்புகள் கிடைக்கும்; கழித்தால் முந்தியமாதங்களுக் கெல்லாம் போக்கு மதிப்புகள் கிடைக்கும்.[10]

[10] *மாதங்களைப்பற்றித் தரப்பட்டுள்ள மூலவிவரம் நடுத் தேதிக்குப் பதிலாக மாதம் முதல் தேதி அல்லது கடைசித் தேதி குறித்ததாக இருந்தாலும், இதே போன்ற திருத்தத்தை—தேதிகளை ஏற்றபடி மாற்றிக் கொள்ளவும்—செய்ய*

போக்கினை வெளியிட வளைகோட்டினைத் தேர்ந்தெடுத்தல்

பொருளாதாரப் புள்ளிவிவரத்தின் போக்கினை ஒரு கால இடை வெளியில் வெளியிடுவதற்கேற்ற பலவகையான வளைகோடுகளைப் பொருத்தும் முறைகள் விளக்கப்பட்டன. ஒருசமயத்தில் இந்தப் பலவகை வளைகோடுகளில் எதனைத் தேர்ந்தெடுப்பது? எடுத்துக் கொள்ளப்படும் ஆண்டுகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் 'இயல்நிலை' முறையில் எது தரம் மிகுந்ததாக இருக்கும்? இந்தக் கேள்விகளைக் குறித்துக் கடந்த பகுதிகளில் பல செய்திகளைக் கூறியபோதிலும், பொதுவான விதிமுறைகள் வரையறை செய்யப்படவில்லை. உண்மையில், இந்த அடிப்படைக் கேள்விகளுக்கு விடையாக அமை கின்ற பொது விதிமுறைகள் ஏதுமில்லை. இத்தகைய சந்தர்ப்பங் களில் பொருத்தத்தின் சிறப்பினை அறுதியிட்டுக் கூறும் ஆய்வுகள் ஏதுமில்லை. கொடுக்கப்பட்ட சந்தர்ப்பத்தில் போக்கினை வெளிப் படுத்துவதற்கு எவ்வகை வளைகோடு ஏற்றது என்பதனை முடிவு செய்வது பெரும்பாலும் தனிப்பட்டோரது தீர்ப்பே. அத்தகைய தீர்ப்புகளில் அநுபவமே பெருமளவுக்குத் துணை நிற்கிறது. ஆனால், ஏற்ற வளைகோட்டு வகையினைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கு உதவியாகச் சில பொதுச் செய்திகளைக் கூறலாம்.

1. வளைகோட்டு வகையினைத் தேர்ந்தெடுப்பதில் முதல்படி, விவரங்களை வரைபடத்தில் குறிப்பதே. இதனைச் செய்து முடித்த பின் உற்றுநோக்குவதின்மூலம் ஏற்ற வகையினைத் தீர்மானிப்பது பல சமயங்களில் இயலும். வரைபடத்தினை, நான்குவிதமான சேர்க்கைகளில் புள்ளிவிவரங்களைக் குறிப்பதன்மூலம் அமைக்கலாம். பொருளாதாரப் புள்ளிவிவரங்களுக்கு முன்னிரண்டு வகையும் மிகுந்த முக்கியமுடையன.

(*a*) இயற்கை x, இயற்கை y. (அதாவது, சாதாரண இயல் வரைபடத்தில், கொடுக்கப்பட்ட எண்களைக் குறிப்பது.)

(*b*) இயற்கை x, $\log y$. (x-ஐ இயல் அளவுத் திட்டத்திலும் y-ஐ லாகிருத அளவுத் திட்டத்திலும் குறிப்பது; அதாவது அரை லாகிருத வரைதாளைப் பயன்படுத்துவது.)

(*c*) இயற்கை y, $\log x$. (x அச்சை லாகிருதமாகக் கொண்டு, அரைலாகிருத வரைதாளில் குறித்தல்.)

லாம். நேர்கோடல்லாத போக்குக்கும் இடைவைப்புச் செயல்முறையை ஏற்றபடி மாற்றிக்கொள்ளலாம். ஆண்டுக்காண்டு மாற்ற வீதத்தின் பன்னிரண்டாம் படிமூலம், மாதத்துக்கு மாதம் மாற்ற வீதத்தைத் தரும். இடைவைப்பு பற்றிய பொது முறைகளுக்கு விட்டேக்கர், ராபின்சன் (Whittaker and Robinson) எழுதிய 'The Calculas of Observations' காண்க (து.நா.ப. 190).

d. Log y, log x. (இரண்டு அச்சுகளிலும் லாகிருத அளவுத் திட்டமுள்ள வரைதாளில் குறித்தல்.)

மேற்கண்ட வகைகளில் எதிலாவது நேர்கோட்டுப் போக்குத் தென்படுமானல், (இரண்டாவது அதிகாரத்தில் கண்டதுபோல) கொடுக்கப்பட்ட சூழ்நிலையில், நேர்கோட்டு வகையினைக் குறிக்கக் கூடிய சமன்பாட்டு வகையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். நேர் கோட்டுச் சமன்பாடு பொருத்தமற்றதானல் கொடுக்கப்பட்ட விவரங் களுக்கேற்ற வேறு ஏதாவது எளிய வகையினைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். அவ்விதமான எளிய சமன்பாடுகளைக் குறிக்கும் வளை கோடுகள் எல்லாவற்றையும் நன்கு தெரிந்து வைத்திருந்தால்தான் போக்கினை வெளியிடுவதற்கு ஏற்ற வளைகோட்டினைத் தேர்ந் தெடுத்து வரைபடம் அமைக்கமுடியும்.

2. இரண்டு மாறிகளான x-க்கும், y-க்குமுள்ள உறவுகளை ஆராய்வதன்மூலம் பொருத்தமான வளைகோட்டினைத் தேர்ந் தெடுக்கலாம். சாதாரணமாகப் பின்வரும் உறவுகள் பொருந்தி வரும்.[11]

(*a*) x-ன் மதிப்புகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையிலும், அதற்கு இசைந்த y-ன் மதிப்புகள் பெருக்குத் தொடர்வரிசையிலும் இருந்தால், உறவு படிமுறை வகையினதாகும். அதன் சமன்பாடு

$$y = ab^x$$

ஆகும்.

(*b*) x-ன் மதிப்புகள் பெருக்குத் தொடர்வரிசையிலும், அதற் கிசைந்த y-ன் மதிப்புகளும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையிலிருந்தால், உறவு, பரவளைய அல்லது உபவளைய வகையினதாகும். அதன் சமன்பாடு,

$$y = ax^b$$

ஆகும்.

(*c*) x-ன் மதிப்புகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையிலும் அதற்கு இசைந்த y-ன் மதிப்புகளின் முதல்நிலை வேறுபாடுகள் மாறிலி யாகவும் இருந்தால், உறவு நேர்கோட்டு வகையினதாகும்; அதன் சமன்பாடு

$$y = a + bx$$

ஆகும்.

[11] கூட்டுத் தொடர் மாறிலியான தனித்த அதிகரிப்பால் மாற்றம் அடை கிறது என்பதையும், பெருக்குத் தொடர் மாறிலியான சதவீதத்தால் மாற்றம் அடைகிறது என்பதையும் நினைவூட்டுகிறோம்.

x-ன் மதிப்புகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்திருக்கையில் அதற்கிசைந்த அடுத்தடுத்த y-மதிப்புகளின் வேறுபாடுகளை 'முதல் வேறுபாடுகள் அல்லது முதல்நிலை வேறுபாடுகள்' என்போம். இதனை $\triangle y$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்போம். அடுத்தடுத்த முதல் வேறுபாடுகளின் இடையேயுள்ள வேறுபாடுகளை 'இரண்டாம் வேறுபாடுகள்' என்போம்; இதனை $\triangle^2 y$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்போம். இதுபோன்றே மேல்நிலை வேறுபாடுகளையும் பெறலாம். வேறுபாடுகளை எங்ஙனம் உருவாக்குவது என்பதைப் பின்வரும் பட்டியல் விளக்கும் :

x	y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$	$\triangle^3 y$
1	11			
2	40	29	32	12
3	101	61	44	12
4	206	105	56	12
5	367	161	68	12
6	596	229	80	12
7	905	309	92	12
8	1,306	401	104	12
9	1,811	505	116	
10	2,432	621		

(d) x-ன் மதிப்புகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்திருக்கும்பொழுது, அதற்கிசைந்த n நிலை y வேறுபாடுகள் மாறிலியாக இருக்குமானால், மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள உறவானது—x-ன் n படிவரை உள்ளடக்கிய—பல்லுறுப்புக் கோவையினால் குறிக்கப்படும். அதாவது,

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + qx^n$$

என்ற சமன்பாட்டு வகையால் குறிப்பிடப்படும். அதாவது, மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில், மூன்றாவது நிலை வேறுபாடுகள் மாறிலியாக இருப்பதனால் x-க்கும் y-க்கும் உள்ள உறவு

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

என்ற சமன்பாட்டு வகையினால் குறிக்கப்படும். பொருளாதாரப் புள்ளிவிவரங்களை ஆராய்வதற்காக ஏற்ற வளைகோட்டினைத் தேர்ந்தெடுக்க ஒருவர் முனைவாரானால் மேற்கூறிய சோதனைகளையெல்லாம் பூர்த்தி செய்யும் வளைகோட்டைக் காண்பது அரிதே. குறிக்கப்பட்ட எல்லாப் புள்ளிகளின் வழியாகவும் வளைகோடு செல்லும்போதுதான் இது நடைபெறும். ஆனால், பொதுவாகத் தரப்பட்டுள்ள மேலே கூறிய சூழ்நிலைகளுள் சிலவற்றுக்குத்தான் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்கள் தோராயமாகப் பொருந்தியதாக இருக்கும்; ஏற்ற வளைகோட்டு வகை குறிப்பாக உணர்த்தப்படும்.

3. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை ஆராய்ந்தும், ஒரு திட்டவட்டமான முடிவுக்கு வர முடியவில்லையானால், விவரங்களுக்குப் பொருந்தப் பலவகை வளைகோடுகளைப் பொருத்தி அவற்றில் கிடைக்கும் முடிவுகளை ஒப்புநோக்கி ஒரு முடிவுக்கு வரலாம். ஒப்புநோக்கப்படும் வளைகோட்டுச் சமன்பாடுகளில் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள மாறிலிகள் இருக்குமானால், வளைகோடுகளிலிருந்து விலக்கங்களின் இரண்டாம் படியின் சராசரியின் வர்க்க மூலத்தை ஒப்பிடுவதால், கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு, எந்த வரம்புகளுக்குள் வளைகோடு நெருங்கிய பொருத்தமுடையதாக இருக்கிறது என்றறிய ஓர் ஆய்வு முறை கிடைக்கிறது.

$$\Sigma(d^2) = \Sigma(y^2) - a\Sigma(y) - b\Sigma(xy) - c\Sigma(x^2y) - \ldots \quad (10.7)$$

என்ற உறவினைப் பயன்படுத்துவதன்மூலம் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் சராசரியின் வர்க்கத்தை எளிதில் கணிக்கலாம். இதில் $\Sigma(d^2)$ என்பது போக்கு நேர்கோட்டிலிருந்து ஏற்படும் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் (பிற்சேர்க்கை C-ல் இந்தச் சமன்பாட்டினைப் பொதுமையான வடிவத்தைப் பெறுகின்ற விதம் விளக்கப்பட்டுள்ளது), சமன்பாடுகளில் ஒரே எண்ணிக்கையுடைய மாறிலிகள் இல்லாதபோது, இத்தகைய சோதனை பயனற்றது; சோதித்துப் பார்ப்பதன்மூலமே ஒப்புமை செய்யமுடியும். போக்கினை எந்த வளைகோடு கொடுக்கப்பட்ட விவரத்துக்குப் பொருத்தமாக வெளியிடுகிறது என்று சந்தர்ப்பத்துக் கேற்றவாறு முடிவு செய்வதற்கு அடிப்படை, தனிப்பட்டோரது தீர்ப்பேயாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் எல்லைகளுக்குள் உள்ள நெருங்கிய பொருத்தம்மட்டும் இறுதியான விதி என்று கருதிவிடக்கூடாது. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அளவு எண்ணிக்கையுடைய மாறிலிகளைக் கொண்ட ஒரு சமன்பாட்டைப் பெறலாம். இதன் வளைகோடு, குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றின் வழியேயும் செல்லும்; ஆனாலும், இந்த வளைகோடு போக்கினை வெளியிடும் என்று கூறிவிட முடியாது. போக்கு என்பதன் கோட்பாடு, விவரங்களின் அடிப்படையில் பொதிந்து காணப்படும் ஒழுங்கான இழைவான இயக்கமேயாகும்; இந்த இயக்கத்திலிருந்து விலக்கங்கள் காணப்படினும் தொடரின் நீண்டகாலப் போக்கு வெளிப்படையாக இருக்கும். பொதுவாக, பன்னெடுங்காலப் போக்கின் தத்துவத்துக்கு முரண்படாமலிருக்கவேண்டுமாயின், வளைகோடு எளிய அமைப்பினதாய் இருத்தல்வேண்டும்; எனினும், சிக்கலான போக்கினை உடைய விவரத்தை எளிமையாகக் குறிக்கவேண்டும் என்பதற்காகப் பொருத்தமற்ற வளைகோட்டைப் பொருத்தியே தீரவேண்டும் என்பதும் பொருளன்று.

4. வளைகோட்டு வகையினைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்குமுன், பயன்படுத்தப்படுகிற போக்குக்கோடு எந்த எல்லைகளுக்கு உட்பட்டு அமையவேண்டும் என்ற முக்கியமான கேள்விக்குப் பதில் காண வேண்டும். குறிக்கப்பட்ட விவரங்களின் எல்லைகளுக்கு உள்ளேயே [அதாவது இடைவைப்புக்கு (interpolation)] பயன்படுவதானால், வளைகோட்டினைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கு நிபந்தனைகள் சிலவற்றை மேற்கொள்ள வேண்டும். ஆனால், விவரங்களின் எல்லைகளுக்கு அப்பாற்பட்ட காலத்துக்குப் பயன்படுத்துவதாக இருந்தாலும், அடுத்துத் தொடரும் கால இடைவெளியின் 'நார்மல்'[12] எல்லைகளைத் தீர்மானிக்கப் பயன்படுத்துவதாக இருந்தாலும், வேறு நிபந்தனைகளை ஆராயவேண்டும். முன்னதில் விவரங்களுக்குப் பொருந்தி வரும் வளைகோட்டினைமட்டும் பொருத்துவது போதுமானது. ஆனால், பின்னதிலோ இறந்தகால அடிப்படைக்கு முரண்படாது தர்க்கரீதியில் எதிர்காலத்தினை நோக்கிய நீட்சியாகப் போக்கு அமைந்திருக்க வேண்டும்.

புறவைப்பு (extrapolation) அல்லது நீட்சி (projection) என்பது, பொருத்தமான போக்கு நேர்கோடு பொருத்தப்பட்டு விட்டது எனவும், இறந்த காலத்தில் தொடரினைப் பாதித்த அதே சூழ்நிலைகள் எதிர்காலத்தில் நிலவுகின்றன எனவும், புனைந்து கொள்வதனால் செய்யப்படும் ஓர் ஊகம் என்ற உண்மையை அறிய வேண்டும். சூழ்நிலைகள் மாற்றமடைந்தாலும் புதிய உறுப்புகள் பிறந்தாலும் நீட்சி பயனற்றதாகிவிடுகிறது. அதோடு பொருளாதாரப் புள்ளிவிவரங்களைப் பயன்படுத்தும்போது பொதுவாக மாற்றம் எப்போது நிகழ்ந்தது என்பதை, நடந்தபின்னரேயன்றி முன்னரே கூறுவதியலாது. எனவே, நேர்கோட்டுப் போக்கினை நீட்சி செய்து பெறுகின்ற முடிவுகள், பிழைபட எப்போதும் ஏது உண்டு. என்றாலும் எதிர்காலத்தின் தன்மை இறந்தகாலத்தையொட்டியதே என்ற அடிப்படையில், நடைமுறைப் புள்ளிவிவர ஆய்வில் அத்தகைய நீட்சியைக் கையாள்வது ஏற்கக்கூடியதே. குறைந்தகால நீட்சியை விடத் தொலைவான எதிர்காலத்திற்குச் செய்யப்படுகின்ற நீட்சிகள் அதிகப் பிழைகளுக்கு உட்பட்டிருக்கும். எனவே, காலத்துக்குக் காலம் புதிய விவரங்கள் கிடைக்கையில் போக்கு நேர்கோடுகளைப் புதிதாக அமைக்கவேண்டும்.

[12] இங்கே 'நார்மல்' (Normal) என்று குறித்தது 'போக்கு மதிப்பு' என்ற பொருளிலேயே. இங்கு 'நார்மல்' என்ற சொல்லாட்சி வசதி கருதிய விந்தையான ஆட்சி. மனித வாழ்க்கையில் எதனை நார்மல்—இயல்பு—என்பது? அதுவும் எதிர்காலம்பற்றி நார்மல என்று குறிகக இன்னும் துணிச்சல் வேண்டும்! 'New Yorker' என்ற ஏடு கூறுவதுபோல், 'நார்மல்' என்பது காதலைப் போன்ற பழையது, ஆனால், எப்போதுமே புதியது; அது புள்ளியியலாருக்கு அடிக்கடி தென்படுகிற ஆனால், எண்ணத்திற்கு அப்பாற்பட்ட ஒரு மூலகம்...... நார்மல் என்பது ஒரு நினைவு, ஒரு புரி, ஒரு பழைய சரிகைத் துண்டு; ஒரு நூலின் பக்கங்களுக்கிடையே அமுக்கப்பட்ட மலரிதழ்.

நீட்சி செய்வதாக இருந்தால் மிகவும் சிக்கலான வளைகோட்டுக்குப் பதிலாக, சில மாறிகளைக்கொண்ட எளிய வளைகோடு ஏற்றது. மூன்றாவது அல்லது நான்காவது படியுடைய பல்லுறுப்புக் கோவைகள் சில சமயங்களில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு மிகவும் பொருத்தமுடையதாக இருக்கலாம். என்றாலும், அத்தகைய வளைகோடுகளைக்கொண்டு நீட்சி செய்வது பொருந்தாது. பெர்ரின் (Perrin) என்பார் சுட்டிக்காட்டியதுபோல இடைவைப்புக்குப் பொருந்திவருகின்ற வளைகோடு புறவைப்புக்குப் பொருந்தாமலே போகலாம் என்பதனை நினைவில் கொள்வது நல்லது.

ஆய்வு செய்யப்படுகின்ற காலத்தின் கடை ஆண்டுகளில் நிலவும் இயற்கை அல்லாத சூழ்நிலைகளினால் போக்கு நேர்கோடுகள் சிதைவு அடையுமானால் அவற்றை நீட்சிசெய்யப் பயன்படுத்தலாகாது என்பது முக்கியமானதொரு கருத்து.

பொதுவாக, இயற்கை எண்களுக்குப் பொருத்தப்படுகிற வளைகோடுகளைவிட y-ன் லாகிருதங்களுக்குப் பொருத்தப்படுகின்ற எளிய வளைகோடுகள் திருத்தமான முடிவுகளைத் தருகின்றன என்பது நீட்சியைப்பொறுத்தவரையில் உண்மையாகத் தெரிகிறது. கார்ல் ஜி. கார்ஸ்டன் (Karl G. Karsten) என்பவர் இந்தக் கருத்து குறித்துச் செய்துள்ள ஆராய்ச்சியில் சீரான மாற்ற வீதத்தின் அடிப்படையில் அமைந்துள்ள தத்துவம், சீரான மாற்ற அளவாக அமைந்துள்ள தத்துவத்தைவிடப் போக்கினை நன்கு நிலைநிறுத்திக் கொள்ளும் என்று விவாதித்துள்ளார். அதனால், அரைலாகிருத வளைகோடுகள் மாற்றத்தின் வீதங்களுககுச் சிறந்த அளவைகள்.

5. ஆய்வுக்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட காலம் முழுவதுக்கும்—ஒரு தொடர்வரிசைக்கு—ஒரே வளைகோடு பொருந்திவிடாது என்பது பல சமயங்களில் உண்மையே. ஆய்வுக் கெடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட உறுப்பின் வளர்ச்சியின் அடிப்படையிலே பொருளாதார மாற்றங்கள் ஏற்படுத்தும் விளைவுகளே இதற்குக் காரணமாகும். 19ஆம் நூற்றாண்டின் பிற்பகுதியிலும், 20ஆம் நூற்றாண்டிலும் தொழிற் புரட்சி பிரிட்டன் மக்களின் உற்பத்தித் திறனைப் பெருமளவுக்கு அதிகரித்ததோடு இங்கிலாந்தில் கணிசமான அளவுக்கு மக்கள் தொகைப் பெருக்கத்துக்கும் வழிவகுத்தது. அத்தகைய கட்டுக்கோப்பு மாற்றங்கள் பல பொருளாதாரத் தொடர்வரிசைகளில் மாற்றம் விளைவிக்கின்றன. இப்படிப்பட்ட சூழ்நிலைகளில் காலம் முழுவதையும் பல பகுதிகளாகப் பிரித்துக்கொண்டு அப்படிப் பிரிக்கப்பட்ட பலகாலப் பகுதிகளுக்கும் பொருத்தமான போக்கு நேர்கோடுகளைப் பொருத்த வேண்டும். இந்தச் செயல்முறையினை மிகுந்த அளவுக்கு நடத்தி விடக்கூடாது. போக்கு என்பது சீரான நெடுங்கால மாற்றம்;

எனவே, தொடரினைப் பலப்பல பகுதிகளாகப் பிரித்து அதிக அளவுக்குப் போக்கு நேர்கோடுகளைப் பொருத்துவது அடிப்படைக் கொள்கைக்கு முரணானது. அடிப்படைச் சூழ்நிலைகளில் உண்மையான மாற்றம் ஏற்பட்டிருந்தால் ஒரு குறிப்பிட்ட சந்தர்ப்பத்தில் போக்கு ஒடிந்துள்ளது எனப் புனைவதில் தவறில்லை. ஆனால், இத்தகைய காரணம் ஏதுமின்றிப் போக்கினை ஒடித்தால் அதனின்று கிடைக்கின்ற போக்கு மதிப்புகள் சிறப்புக் குன்றியனவாக இருக்கும்.

துணை நூல்கள்

Burns, A. F., ‘Production Trends in the United States Since 1870.’

Croxton, F. E. and Cowden, D. J., ‘Applied General Statistics,’ Chaps. 15, 16.

Kendall, M. G., ‘The Advanced Theory of Statistics,’ 3rd ed., Vol. II, pp. 363-387.

Koopmans, T., ed., ‘Statistical Inference in Dynamic Economic Models,’ Chaps. 11, 12 (an econometric approach to the analysis of time series).

Kuznets, S., ‘Secular Movements in Production and Prices.’

Lewis, E. E., ‘Methods of Statistical Analysis in Economics and Business,’ Chap. 10.

Macaulay, F. R., ‘The Smoothing of Time Series’.

Mills, F. C., ‘Economic Tendencies in the United States’.

Riggleman, F. R. and Frisbee, I. N., ‘Business Statistics’, 3rd ed., Chaps. 14, 15.

Sasuly, M., ‘Trend Analysis of Statistics: Theory and Technique’.

Schumpeter, J. A., ‘Business Cycles,’ Chap. 5.

Spurr, W. A., Kellog, L. S. and Smith, J. H., ‘Business and Economic Statistics’, Chap. 15.

Yule, G. U. and Kendall, M. G., ‘An Introduction to the Theory of Statistics’, 14th ed., Chap. 26.

இந்த அத்தியாய முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணை நூல்களைப் திப்பித்தோர் பெயரும், பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டும், நூலின் இரண்டாம் பாக) இறுதியில் உள்ள துணைநூல் பட்டியலில் ணலாம்.

கலைச்சொல் அகரவரிசை

தமிழ்—ஆங்கிலம்

அ

அச்சுகள் — Axes
அடிப்படை — Base
அட்டவணை — Table
அரைலாகிருத விளக்கப் படம் — Semilogarithmic Chart
அலகு — Unit
அலைவு — Frequency
அலைவுப் பட்டியல் — Frequency Tables
அலைவுப் பரவல் — Frequency distribution
அலைவுப் பலகோணம் — Frequency polygon
அலைவு வளைகோடு — Frequency curve
அலைவு விகிதம் — Frequency ratio
அலைவெண் — Frequency
அலைவெண் செவ்வகப் படம் — Histogram
அளவை — Measure

ஆ

ஆயங்கள் — Coordinates

இ

இடைநிலை — Median
இடைவெளி மதிப்பீடு — Interval estimation
இடைவைப்பு — Interpolation
இயல்நிலைப் பரவல் — Normal distribution
இயல்நிலைப் பிழை வளைகோடு — Normal curve of error
இயல்நிலை வளைகோடு — Normal curve
இயல்நிலை விலக்கம் — Normal deviate
இயைபிலா — Random
இயைபிலா ஏற்றஇறக்கம் — Random fluctuation
இயைபிலா மாதிரி — Random sample
இயைபிலா மாறி — Random variable
இரு வால்புறச் சோதனை — Two-tailed test
இழைத்தல் — Smoothing

ஈருறுப்புப் பரவல் — Binomial distribution

உ

உச்சம் — Maximum

உச்சநிகழ் வாய்ப்பு — Maximum likelihood

உடன்தொடர்பு — Correlation

உடன்தொடர்புக் கெழு — Correlation coefficient

உடன்தொடர்புப் பட்டியல் — Correlation table

உடன்தொடர்பு மாற்றம் — Covariance

உடன்தொடர்பு மாறுபாடு — Covariance

உய்த்துணர்வு — Inference

உருமாற்றம் — Transformation

உறுதியான மதிப்பீடு — Consistent estimate

ஊ

ஊசல் — Oscillation

எ

எச்சம் — Residual

எடுகோள் — Hypothesis

எதேச்சை மூலம் — Arbitrary origin

ஏ

ஏற்பு மண்டிலம் — Acceptance region

ஏற்றஇறக்கம் — Fluctuation

ஒ

ஒப்பீட்டு — Relative

ஒருவால்புறச் சோதனை — One-tailed test

ஒழுங்குச் சமன்பாடுகள் — Normal equations

ஒகைவ் — Ogive

க

கட்டளை விதிகள் — Criteria ✓

கண்டறிதல் — Observation

கர்ட்டாசிஸ் — Kurtosis

கா

காலத் தொடர்வரிசை — Time series

கால்மான விலக்கம் — Quartile deviation

கால்மான இடைவெளி — Quartile range
கால்மானம் — Quartile
காலவாரிச் சார்பலன் — Periodic function

கு

குத்தாயம் — Ordinate
குவிவுப் பரவல் — Cumulative distribution
குவிவு வளைகோடு — Cumulative curve
குவிவு விளக்கப் படம் — Cumulative chart
குறியீடு — Notation
குறியீட்டு எண் — Index number
குன்றந்த வர்க்க முறை — Least squares method

கூ

கூட்டுச் சராசரி — Arithmetic mean
கூட்டுத் தொடர் — Arithmetic series

கெ

கெழு — Coefficient

கோ

கோட்டம் — Skewness

ச

சதமானம் — Percentile
சமச்சீர் — Symmetry
சமச்சீரின்மை — Assymmetry
சராசரி — Average, Mean
சராசரி விலக்கம் — Mean deviation

சா

சார்ந்த — Relative
சார்பலன் உறவு — Functional relationship
சார்பிலா மாறி — Independent variable
சார்புடைய மாறி — Dependent variable

சி

சிகரத் தன்மை — Peakedness
சிதறல் — Dispersion
சிதறல் விளக்கப் படம் — Scatter diagram
சிறப்பு — Significance

சிறப்புகாண் சோதனை	— Test of significance
சிறப்பு வரம்பு	— Significance level
சிறுமம்	— Minimum
	சு
சுழற்சி	— Cycle
சுழற்சி ஏற்றஇறக்கம்	— Cyclical fluctuation
சுழற்சி மாறுபாடு	— Cyclical variation
	சூ
சூனிய எடுகோள்	— Null hypothesis
	செ
செங்குத்துப் பல்லுறுப்புக் கோவை	— Orthogonal polynomial
	சோ
சோதனைகள்	— Tests
	த
தரம்	— Standard
தரப்பிழை	— Standard error
தரவிலக்கம்	— Standard deviation
தனித்த	— Discrete
தள்ளுபடி மண்டிலம்	— Rejection Region
	தி
திறமான மதிப்பீடு	— Efficient estimate
	தொ
தொகுப்பு வாதம்	— Induction
தொடர்ச்சியுடைய மாறிகள்	— Continuous variable
தொடர்ச்சியற்ற மாறிகள்	— Discrete variable
	ந
நம்பக இடைவெளி	— Confidence interval
நம்பக எல்லைகள்	— Confidence limits
நம்பகக் கெழு	— Confidence coefficient
நகரும் சராசரிகள்	— Moving averages
	நி
நிகழ்திறம்	— Probability
நிகழ்பிழை	— Probable error

நிலையற்ற — Unstable
நிறையிட்ட சராசரி — Weighted average

நே

நேர்கோட்டு உடன்தொடர்பு — Linear correlation

ப

பகுப்பு முறை — Deduction
படி — Degree
பட்டியல் — Table
பட்டியலமைத்த — Tabulation
பட்டை விளக்கப் படம் — Bar charts
பண்பு — Attribute ✔
பதின்மானம் — Decile
பத்தி விளக்கப் படம் — Column diagram (Histogram)
பரவல் — Distribution
பருவகால ஏற்றஇறக்கம் — Seasonal fluctuation
பருவகால மாற்றங்கள் — ,, Variation
பன்னெடுங்காலப் போக்கு — Secular trend

பா

பாகுபாடு செய்தல் — Classification
பாகை — Degree

பி

பிரிவு — Class
பிரிவு அலைவெண் — Class frequency
பிரிவு இடைவெளி — Class interval
பிரிவு எல்லைகள் — Class limits
பிழை — Error
பிறழ்ச்சி — Bias ✔
பிறழ்ச்சியில்லா — Unbiassed ✔

பு

புலனாகாத — Abstract
புள்ளி மதிப்பீடு — Point estimation
புள்ளியியல் — Statistics (science)
புள்ளிவிவரங்கள் — Statistics (data)
புறவைப்பு — Extrapolation

பெ

பெருக்குச் சராசரி	— Geometric mean
பெருக்குத் தொடர்	— Geometric series
பெருக்க மொமென்டு முறை	— Product-moment method

போ

போக்கு	— Tendency, trend
போதுமான மதிப்பீடு	— Sufficient estimate

ம

மட்டாயம்	— Abscissa
மதிப்பளவை	— Quantiles
மதிப்பீடம்	— Rank
மதிப்பீடத் தொடர்பு	— Rank correlation
மதிப்பீடு	— Estimate, estimation

மா

மாதிரி	— Sample
மாதிரி அளவை	— Statistic
மாதிரிப் பரவல்	— Sampling distribution ✓
மாதிரிப் பிழைகள்	— Sampling errors
மாறி	— Variable
மாறிகளின் தொடர்பு	— Regression
மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு	— Regression coefficient
மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடு	— Regression equation
மாறிகளின் தொடர்பு நேர்கோடு	— Regression line
மாறுநிலை மண்டிலம்	— Critical region
மாறுபாடு	— Variance, variation
மாற்றம்	— Variation
மாற்றக் கெழு	— Coefficient of variation

மு

முகடு	— Mode
முகட்டு விளக்கம்	— Modal divergence
முழுமைத் தொகுதி	— Population
முழுமைத் தொகுதியின் அளவை	— Parameter

மூ

மூலம்	— Origin

மை

மைய எல்லைத் தேற்றம்	— Central limit theorem
மையப்போக்கு	— Central tendency

மொ

மொத்தம்	— Aggregate
மொமென்டு	— Moment

லா

லாஜிஸ்டிக் வளைகோடு	— Logistic curve

லோ

லோரன்ஸ் வளைகோடு	— Lorenz curve

வ

வரலாற்று மாறிகள்	— Historical variables
வரிசை	— Array
வரைபட அமைப்பு	— Graphic presentation
வரையற்ற பாகைகள்	— Degrees of freedom
வளைகோட்டைப் பொருத்துதல்	— Curve fitting

வா

வாய்ப்பு	— Chance

வி

விகிதங்கள்	— Rations
விலக்கம்	— Deviation, deviate
விவரங்கள்	— Data
விளக்கப் படங்கள்	— Charts, diagrams

வீ

வீச்சு	— Range
வீதங்கள்	— Rates

ஹா

ஹார்மானிக் சராசரி	— Harmonic mean

கலைச்சொல் அகரவரிசை

ஆங்கிலம்—தமிழ்

A

Abscissa	— மட்டாயம்
Abstract	— புலனாகாத
Aggregate	— மொத்தம்
Arithmetic mean	— கூட்டுச் சராசரி
Arithmetic series	— கூட்டுத் தொடர்
Arrays	— வரிசை
Assymmetry	— சமச்சீரின்மை
Attribute	— பண்பு
Average	— சராசரி
Axes	— அச்சுகள்

B

Bar charts	— பட்டை விளக்கப் படம்
Base	— அடிப்படை
Bias	— பிறழ்ச்சி
Binomial distribution	— ஈருறுப்புப் பரவல்

C

Central limit theorem	— மைய எல்லைத் தேற்றம்
Central tendency	— மையப் போக்கு
Chance	— வாய்ப்பு
Charts	— விளக்கப் படங்கள்
Class	— பிரிவு
Class frequency	— பிரிவு அலைவெண்
Class interval	— பிரிவு இடைவெளி
Class limits	— பிரிவு எல்லைகள்
Classification	— பாகுபாடு செய்தல்
Coefficient	— கெழு
Column diagram	— பத்தி விளக்கப் படம் (அலைவெண் செவ்வகப் படம்)
Confidence coefficient	— நம்பகக் கெழு
Confidence intervals	— நம்பக இடைவெளிகள்
Confidence limits	— நம்பக எல்லைகள்

Continuous variables — தொடர் மாறிகள்
Coordinates — ஆயங்கள்
Correlation — உடன்தொடர்பு
Correlation coefficient — உடன்தொடர்புக் கெழு
Correlation, linear — நேர்கோட்டு உடன்தொடர்பு
Correlation, rank — மதிப்பிடத் தொடர்பு
Correlation table — உடன்தொடர்புப் பட்டியல்
Covariance — உடன் மாற்றம், உடன் மாறுபாடு
Criteria — கட்டளை விதி
Critical region — மாறுநிலை மண்டிலம்
Cumulative chart — குவிவு விளக்கப் படம்
Cumulative distribution — குவிவுப் பரவல்
Curve fitting — வளைகோட்டைப் பொருத்துதல்
Cycle — சுழற்சி
Cyclical fluctuation — சுழற்சி ஏற்றஇறக்கம்
Cyclical variation — சுழற்சி மாறுபாடு

D

Data — விவரங்கள்
Decile — பதின்மானம்
Deduction — பகுப்பு முறை
Degree — டிகிரி, பாகை, படி
Degrees of freedom — வரையற்ற பாகைகள்
Deviation, Deviate — விலக்கம்
Deviation, mean — சராசரி விலக்கம்
Deviation, quartile — கால்மான விலக்கம்
Deviation, standard — தரவிலக்கம்
Diagram — விளக்கப் படம்
Discrete — தனித்த, தொடர்ச்சியற்ற
Discrete variable — தொடர்ச்சியற்ற மாறி
Dispersion — சிதறல்
Distribution — பரவல்
Distribution, frequency — அலைவுப் பரவல்

E

Error — பிழை
Estimate — மதிப்பீடு
Estimate, consistent — உறுதியான மதிப்பீடு
Estimate, efficient — திறமான மதிப்பீடு
Estimate, sufficient — போதுமான மதிப்பீடு

Estimate, unbiassed	— பிறழ்ச்சியில்லா மதிப்பீடு
Estimation	— மதிப்பீடு
Estimation, interval	— இடைவெளி மதிப்பீடு
Estimation, point	— புள்ளி மதிப்பீடு
Exponential function	— அடுக்குச் சார்பலன்
Extrapolation	— புறவைப்பு

F

Fluctuation	— ஏற்றஇறக்கம்
Fluctuation, random	— இயைபிலா ஏற்றஇறக்கம்
Fluctuation, seasonal	— பருவகால ஏற்றஇறக்கம்
Fluctuation, cyclical	— சுழற்சி ஏற்றஇறக்கம்
Frequency	— அலைவு, அலைவெண்
Frequency curve	— அலைவு வளைகோடு
Frequency polygon	— அலைவுப் பலகோணம்
Frequency ratio	— அலைவு வீதம்
Frequency tables	— அலைவுப் பட்டியல்கள்
Functional relationship	— சார்பலன் உறவு

G

Geometric mean	— பெருக்குச் சராசரி
Geometric series	— பெருக்குத் தொடர்
Graphic presentation	— வரைபட அமைப்பு

H

Harmonic mean	— ஹார்மானிக் சராசரி
Histogram	— அலைவெண் செவ்வகப் படம்
Hypothesis	— எடுகோள்

I

Index number	— குறியீட்டு எண்
Induction	— தொகுப்பு வாதம்
Inference	— உய்த்துணர்வு
Interpolation	— இடைவைப்பு

K

Kurtosis	— கர்ட்டாசிஸ்

L

Least squares, method of	— குறைந்த வர்க்க முறை
Linear correlation	— நேர்கோட்டு உடன்தொடர்பு

Logistic curve — லாஜிஸ்டிக் வளைகோடு
Lorenz curve — லோரன்ஸ் வளைகோடு

M

Maximum — உச்சம்
Maximum likelihood — உச்ச நிகழ் வாய்ப்பு
Mean — சராசரி
Mean, weighted — நிறையிட்ட சராசரி
Measure — அளவை
Median — இடைநிலை
Minimum — சிறுமம்
Modal divergence — முகட்டு விலக்கம்
Mode — முகடு
Moment — மொமெண்டு
Moving averages — நகரும் சராசரிகள்

N

Normal curve — இயல்நிலை வளைகோடு
Normal curve of error — இயல்நிலைப் பிழை வளைகோடு
Normal deviate — இயல்நிலை விலக்கம்
Normal distribution — இயல்நிலைப் பரவல்
Normal equations — ஒழுங்குச் சமன்பாடுகள், இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்
Notation — குறியீடு
Null hypothesis — சூனிய எடுகோள்

O

Observation — கண்டறிதல்
Ogive — ஒகைவ், குவிவு வளைகோடு
One-tailed test — ஒருவால்புறச் சோதனை
Ordinate — குத்தாயம்
Origin — மூலம்
Origin, arbitrary — எதேச்சை மூலம்
Orthogonal polynomials — செங்குத்துப் பல்லுறுப்புக் கோவை
Oscillation — ஊசல்

P

Parameter — முழுமைத் தொகுதியின் அளவை
Peakedness — சிகரத் தன்மை
Percentiles — சதமானம்
Periodic function — காலவாரிச் சார்பலன்

Population — முழுமைத் தொகுதி
Probability — நிகழ்திறம், வாய்ப்பு
Probable error — நிகழ்பிழை
Product-moment method — பெருக்க மொமென்டு முறை

Q

Quantile — மதிப்பளவை
Quartile — கால்மானம்
Quartile range — கால்மான இடைவெளி
Quartile deviation — கால்மான இடைவெளி விலக்கம்

R

Random — இயைபிலா
Range — வீச்சு
Rank — மதிப்பிடம்
Rates — வீதங்கள்
Ratios — விகிதங்கள்
Regression — மாறிகளின் தொடர்பு
Regression coefficient — மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு
Regression equation — மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடு
Regression line — மாறிகளின் தொடர்பு நேர்கோடு
Rejection region — தள்ளுபடி மண்டிலம்
Relative — ஒப்பீட்டு, சார்ந்த
Residual — எச்சம்

S

Sample — மாதிரி
Sample, random — இயைபிலா மாதிரி
Sampling distribution — மாதிரிப் பரவல்
Sampling errors — மாதிரிப் பிழைகள்
Scatter — சிதறல்
Scatter diagram — சிதறல் விளக்கப் படம்
Seasonal fluctuations — பருவகால மாற்றங்கள்
Secular trends — பன்னெடுங்காலப் போக்கு
Semilogarithmic chart — அரைலாகிருத விளக்கப் படம்
Significance — சிறப்பு
Significance level — சிறப்பு வரம்பு
Significance test — சிறப்புகாண் சோதனை
Skewness — கோட்டம்
Smoothing — இழைத்தல்
Standard — தரம்

Standard deviation	— தரவிலக்கம்
Standard error	— தரப்பிழை
Statistic	— மாதிரி அளவை
Statistics (data)	— புள்ளிவிவரங்கள்
Statistics (science)	— புள்ளியியல்
Symmetry	— சமச்சீர்

T

Table	— பட்டியல், அட்டவணை
Tabulation	— பட்டியல்அமைத்தல்
Tendency	— போக்கு
Tests	— சோதனைகள்
Time series	— காலத் தொடர்வரிசை
Transformation	— உருமாற்றம்
Trend	— போக்கு
Two-tailed test	— இருவால்புறச் சோதனை

U

Unbiassed	— பிறழ்ச்சியில்லா
Unit	— அலகு
Unstable	— நிலையற்ற

V

Variable, variate	— மாறி
Variable, historical	— வரலாற்று மாறி
Variable, continuous	— தொடர் மாறி
Variable, discrete	— தொடர்ச்சியற்ற மாறி, தனித்த மாறி
Variable, dependent	— சார்புடைய மாறி
Variable, independent	— சார்பிலா மாறி
Variable, random	— இயைபிலா மாறி
Variance	— மாறுபாடு
Variation	— மாறுபாடு, மாற்றம்
Variation, coefficient of	— மாற்றக் கெழு

பொருள் குறிப்பு அகராதி